第 27 卷 第 8 期
Vol. 27 No. 8

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 8 月
Aug. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 08-1121-06

基于加权可能性均值的直觉梯形模糊数矩阵博弈求解方法

万树平, 张小路

(江西财经大学 信息管理学院，南昌 330013)

摘 要: 针对支付值为直觉梯形模糊数 (ITFN) 的矩阵博弈求解问题, 提出了一种基于加权可能性均值的求解方法. 定义了 ITFN 新的运算法则, 并引入 ITFN 的下、上加权可能性均值和加权可能性均值的概念, 根据加权可能性均值给出了 ITFN 新的排序方法; 运用新的排序方法, 将求解局中人最优策略问题转化为求解双目标线性规划问题. 实例分析验证了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 直觉梯形模糊数；矩阵博弈；可能性均值；双目标规划；直觉模糊集

中图分类号: TP182　　　　**文献标识码:** A

Method based on weighted possibility mean for solving matrix games with payoffs of intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers

WAN Shu-ping, *ZHANG Xiao-lu*

(College of Information Technology，Jiangxi University of Finance and Economics，Nanchang 330013，China. Correspondent：WAN Shu-ping，E-mail：shupingwan@163.com)

Abstract: For the problem of matrix games with payoffs of intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers(ITFNs), a solving method based on weighted possibility mean is proposed. The new operation laws for ITFNs are defined. The notions of lower and upper weighted possibility means for ITFNs are introduced as well as the weighted possibility mean. A new ranking approach for ITFNs is given according to the weighted possibility mean. According to the new ranking approach, the optimal strategies of two players can be obtained by solving the bi-objective linear programming model. The example analysis verifies the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: intuitionistic trapezoidal fuzzy number；matrix game；possibility mean；bi-objective programming；intuitionistic fuzzy set

1 引 言

在实际博弈问题中, 参与人并不能确切知道博弈的支付值, 此时可采用模糊集表示参与人的评判结果, 由此产生了模糊博弈理论的研究[1-7]. 然而, 由于博弈所涉及的信息不完全, 且涉及到经济、政治、心理行为和意识形态等复杂因素, 参与人的判断往往存在一定的犹豫程度[6]. 例如: 甲、乙两人相互博弈, 由于信息的不完全和不确定性, 甲在知道乙的策略和给定自己的策略下, 可能得到的支付值为直觉梯形模糊数 (ITFN)[8-10] ([1, 2, 3, 4]; 0.7,0.2), 这表明参与人甲赢得在 [2, 3] 附近的最大隶属度为 70%, 最小非隶属度为 20%, 还有 10% 为不确定, 即甲对此局势的结果 (或结局) 的估计存在一定的犹豫程度, 这种犹豫程度影响了参与人对策略的选择.

ITFN 是直觉模糊集 (IFS)[11]的一种特殊形式, 目前关于它的研究主要集中在多属性决策领域[8-10]. 因为 IFS 同时考虑了隶属、非隶属和犹豫度 3 方面信息, 较好地刻画了参与人判断的肯定、否定和犹豫程度 3 种状态信息, 所以 IFS 能更加细腻地表达支付值的模糊性本质. 因此, 研究支付值为 IFS 的博弈具有十分重要的理论与应用价值. 目前主要有支付值为 IFS[4]、区间直觉模糊数[6]和三角直觉模糊数 (TIFN)[7]的矩阵博弈, 较少见到有关支付值为 ITFN 的矩阵博弈的研究报道.

收稿日期: 2011-02-09；**修回日期:** 2011-05-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71061006, 70861002)；教育部人文社科项目(09YGC630107)；江西省自然科学基金项目(20114BAB201012)；江西省教育厅科技项目(GJJ12265)；江西财经大学优秀青年学术人才支持计划项目；江西财经大学第 6 届学生科研课题项目.

作者简介: 万树平(1974−), 男, 教授, 博士, 从事决策分析、信息融合等研究；张小路(1985−), 男, 博士生, 从事决策分析、数量经济的研究.

本文主要研究支付值为ITFN的矩阵博弈(简称ITFN矩阵博弈)问题及其求解方法. 首先定义了ITFN新的运算法则; 其次, 引入了ITFN的下、上加权可能性均值和加权可能性均值的概念, 根据加权可能性均值给出了ITFN新的排序方法; 再次构建了支付值为ITFN的矩阵博弈, 并给出求解方法; 最后, 用实例表明了该方法的有效性.

2 直觉梯形模糊数

2.1 直觉梯形模糊数的定义

定义1[8-10] 设 $\tilde{a}$ 为实数集上一个直觉模糊数, 其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{a}},\ a\leqslant x<b;\\ \mu_{\tilde{a}},\ b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{a}},\ c<x\leqslant d;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

非隶属函数为

$$\nu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-x+\nu_{\tilde{a}}(x-a)}{b-a},\ a\leqslant x<b;\\ \nu_{\tilde{a}},\ b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{x-c+\nu_{\tilde{a}}(d-x)}{d-c},\ c<x\leqslant d;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

其中: $0\leqslant\mu_{\tilde{a}}\leqslant 1,\ 0\leqslant\nu_{\tilde{a}}\leqslant 1,\ \mu_{\tilde{a}}+\nu_{\tilde{a}}\leqslant 1;\ a,b,c,d\in R$, 称 $\tilde{a}=([a,b,c,d];\mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}})$ 为ITFN; $\mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}}$ 分别为最大隶属度和最小非隶属度; $\pi_{\tilde{a}}(x)=1-\mu_{\tilde{a}}(x)-\nu_{\tilde{a}}(x)$ 为 $\tilde{a}$ 的犹豫函数, 其值越小, 表示模糊数越确定. 当 $b=c$ 时, ITFN退化为TIFN.

2.2 ITFN的运算法则

定义2 对于ITFN $\tilde{a}=([a,b,c,d];\mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}})$, 若 $a>0$, 则称其为正ITFN. 下文所讨论的均为正ITFN.

定义3 设 $\tilde{a}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\nu_i)(i=1,2)$ 为两个ITFN, 则定义:

1) $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=([a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2];\mu_1\bigwedge\mu_2,\nu_1\bigvee\nu_2)$, 其中符号 $\bigwedge,\bigvee$ 表示取小和取大运算.

2) $\tilde{a}_1\tilde{a}_2=([a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2,d_1d_2];\mu_1\bigwedge\mu_2,\nu_1\bigvee\nu_2)$.

3) $\lambda\tilde{a}_1=\begin{cases}([\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1,\lambda d_1];\mu_1,\nu_1),\ \lambda\geqslant 0;\\ ([\lambda d_1,\lambda c_1,\lambda b_1,\lambda a_1];\mu_1,\nu_1),\ \lambda<0.\end{cases}$

4) $\tilde{a}_1^{\lambda}=([a_1^{\lambda},b_1^{\lambda},c_1^{\lambda},d_1^{\lambda}];\ \mu_1,\nu_1),\ \lambda\geqslant 0$.

易证明, 上述运算法则具有如下性质:

1) $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=\tilde{a}_2+\tilde{a}_1$;

2) $\tilde{a}_1\tilde{a}_2=\tilde{a}_2\tilde{a}_1$;

3) $\lambda(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2)=\lambda\tilde{a}_1+\lambda\tilde{a}_2$;

4) $(\tilde{a}_1^{\lambda})^k=\tilde{a}_1^{\lambda k},\ \tilde{a}_1^{\lambda}\tilde{a}_1^{k}=\tilde{a}_1^{\lambda+k},\ \lambda,k\geqslant 0$;

5) 若 $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3$ 为任意的ITFN, 则有

$$(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2)\tilde{a}_3=\tilde{a}_1\tilde{a}_3+\tilde{a}_2\tilde{a}_3,\ (\tilde{a}_1\tilde{a}_2)\tilde{a}_3=\tilde{a}_1(\tilde{a}_2\tilde{a}_3).$$

注1 定义ITFN的运算应采取保守稳妥的原则, 其结果不应放大隶属度和缩小非隶属度, 否则容易造成信息的失真. 受文献[7]的启发, 定义3给出的ITFN运算结果对隶属与非隶属度只作取小和取大的处理, 即只保留小的隶属度和大的非隶属度, 而[8]的运算结果对隶属与非隶属度作加、减、乘与幂的处理. 例如, 对ITFN ([1, 2, 3, 4]; 0.4, 0.2)与([2, 3, 5, 6]; 0.5, 0.4)求和, 由定义3得到的结果为([3, 5, 8, 10]; 0.4, 0.4), 没有放大隶属度和缩小非隶属度. 而[8]得到的结果为([3, 5, 8, 10]; 0.7, 0.08), 可见, 隶属度0.4和0.5被进一步放大为0.7, 而非隶属度0.2和0.4则被缩小为0.08, 导致运算结果信息的扭曲. 因此, 本文运算法则更加简单合理, 而且更利于决策者进行信息的集成. 当ITFN退化为TIFN时, 定义3即退化为[7] TIFN的运算法则.

2.3 ITFN的加权可能性均值

定义4 对于ITFN $\tilde{a}=([a,b,c,d];\ \mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}})$, 定义其 (α,β)- 截集, α- 截集和 β- 截集分别为

$$\tilde{a}_{\alpha,\beta}=\{x|\mu_{\tilde{a}}(x)\geqslant\alpha,\nu_{\tilde{a}}(x)\leqslant\beta\},$$

$$\tilde{a}_{\alpha}=\{x|\mu_{\tilde{a}}(x)\geqslant\alpha\},\ \tilde{a}_{\beta}=\{x|\nu_{\tilde{a}}(x)\leqslant\beta\}.$$

其中: $0\leqslant\alpha\leqslant\mu_{\tilde{a}},\ \nu_{\tilde{a}}\leqslant\beta\leqslant 1,\ 0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 1$.

根据ITFN的定义容易得到

$$\tilde{a}_{\alpha}=[\tilde{a}_{\alpha}^{l},\tilde{a}_{\alpha}^{u}]=\Big[a+\frac{(b-a)\alpha}{\mu_{\tilde{a}}},d-\frac{(d-c)\alpha}{\mu_{\tilde{a}}}\Big],$$

$$\tilde{a}_{\beta}=[\tilde{a}_{\beta}^{l},\tilde{a}_{\beta}^{u}]=\Big[\frac{b-a\nu_{\tilde{a}}-\beta(b-a)}{1-\nu_{\tilde{a}}},\frac{c-d\nu_{\tilde{a}}+\beta(d-c)}{1-\nu_{\tilde{a}}}\Big].$$

由定义4易得到如下定理.

定理1 对于任意ITFN $\tilde{a}=([a,b,c,d];\ \mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}})$, $0\leqslant\alpha\leqslant\mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}}(x)\leqslant\beta\leqslant 1,0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 1$, 有

$$\tilde{a}_{\alpha,\beta}=\tilde{a}_{\alpha}\bigcap\tilde{a}_{\beta}.$$

定义5 对于ITFN $\tilde{a}=([a,b,c,d];\ \mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}})$, 定义其隶属、非隶属函数的下、上加权可能性均值分别为

$$m_*(\tilde{a}_{\alpha})=\int_0^{\mu_{\tilde{a}}}\tilde{a}_{\alpha}^{l}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big/\int_0^1\mathrm{Pos}[\tilde{a}_{\alpha}\leqslant\tilde{a}_{\alpha}^{l}]\mathrm{d}\alpha,$$

$$m^*(\tilde{a}_{\alpha})=\int_0^{\mu_{\tilde{a}}}\tilde{a}_{\alpha}^{u}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big/\int_0^1\mathrm{Pos}[\tilde{a}_{\alpha}\geqslant\tilde{a}_{\alpha}^{u}]\mathrm{d}\alpha,$$

$$m_*(\tilde{a}_{\beta})=\int_{\nu_{\tilde{a}}}^1\tilde{a}_{\beta}^{l}g(\beta)\mathrm{d}\beta\Big/\int_0^1\mathrm{Pos}[\tilde{a}_{\beta}\leqslant\tilde{a}_{\beta}^{l}]\mathrm{d}\beta,$$

$$m^*(\tilde{a}_{\beta})=\int_{\nu_{\tilde{a}}}^1\tilde{a}_{\beta}^{u}g(\beta)\mathrm{d}\beta\Big/\int_0^1\mathrm{Pos}[\tilde{a}_{\beta}\geqslant\tilde{a}_{\beta}^{u}]\mathrm{d}\beta.$$

其中: Pos为可能度[12], 且有

$$\mathrm{Pos}[\tilde{a}\leqslant\tilde{a}_{\alpha}^{l}]=\sup_{x\leqslant\tilde{a}_{\alpha}^{l}}\mu_{\tilde{a}}(x)=\alpha,$$

$$\mathrm{Pos}[\tilde{a}\geqslant\tilde{a}_{\alpha}^{u}]=\sup_{x\geqslant\tilde{a}_{\alpha}^{u}}\mu_{\tilde{a}}(x)=\alpha,$$

$$\mathrm{Pos}[\tilde{a} \leqslant \tilde{a}_\beta^l] = \sup_{x \leqslant \tilde{a}_\beta^l} \nu_{\tilde{a}}(x) = \beta,$$

$$\mathrm{Pos}[\tilde{a} \geqslant \tilde{a}_\beta^u] = \sup_{x \geqslant \tilde{a}_\beta^u} \nu_{\tilde{a}}(x) = \beta;$$

$f(\alpha)$ 和 $g(\beta)$ 是非负单调不减的加权函数, 且满足

$$\alpha \in [0, \mu_{\tilde{a}}],\ f(0) = 0,\ \int_0^{\mu_{\tilde{a}}} f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \mu_{\tilde{a}},$$

$$\beta \in [\nu_{\tilde{a}}, 1],\ g(1) = 0,\ \int_{\nu_{\tilde{a}}}^1 g(\beta)\mathrm{d}\beta = 1 - \nu_{\tilde{a}}.$$

隶属函数的下 (上) 加权可能性均值是 α- 截集的最小 (大) 值的 f 加权平均, 非隶属函数的下 (上) 加权可能性均值是 β- 截集的最小 (大) 值的 g 加权平均.

定义 6　对于 ITFN $\tilde{a} = ([a, b, c, d];\ \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}})$, 定义其隶属、非隶属函数的加权可能性均值分别为

$$m(\tilde{a}_\alpha) = [m_*(\tilde{a}_\alpha) + m^*(\tilde{a}_\alpha)]/2,$$

$$m(\tilde{a}_\beta) = [m_*(\tilde{a}_\beta) + m^*(\tilde{a}_\beta)]/2.$$

对于不同的 α- 截集, 加权函数 $f(\alpha)$ 可以取不同的值, 从而减小了具有很大不确定性的 α- 截集对于 $m(\tilde{a}_\alpha)$ 的影响, 使得 $m(\tilde{a}_\alpha)$ 更能综合地反映隶属函数的信息. 一般地, 加权函数 $f(\alpha)$ 的取值应使得 $m(\tilde{a}_\alpha)$ 具有简单的表达式, 同时又具有有用的性质, 进而便于决策者进行计算和决策. 对于 $g(\beta)$ 有类似的分析. 例如, 选取

$$f(\alpha) = 2\alpha/\mu_{\tilde{a}},\ \alpha \in [0, \mu_{\tilde{a}}];$$

$$g(\beta) = 2(1-\beta)/(1-\nu_{\tilde{a}}), \beta \in [\nu_{\tilde{a}}, 1].$$

得到

$$m(\tilde{a}_\alpha) = \mu_{\tilde{a}}(a + 2b + 2c + d)/3,$$

$$m(\tilde{a}_\beta) = (1 - \nu_{\tilde{a}})(a + 2b + 2c + d)/3.$$

因为 $0 \leqslant \mu_{\tilde{a}} + \nu_{\tilde{a}} \leqslant 1$, 所以 $m(\tilde{a}_\alpha) \leqslant m(\tilde{a}_\beta)$.

定理 2　设 ITFN $\tilde{a}_i = ([a_i, b_i, c_i, d_i]; \mu_{\tilde{a}_i}, \nu_{\tilde{a}_i})$, $i = 1, 2$, 其隶属、非隶属函数的加权可能性均值分别为 $m((\tilde{a}_i)_\alpha), m((\tilde{a}_i)_\beta)$, $i = 1, 2$, 若 $\mu_{\tilde{a}_1} = \mu_{\tilde{a}_2},\ \nu_{\tilde{a}_1} = \nu_{\tilde{a}_2}$, λ_1, λ_2 为正实数, 则有

$$m((\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)_\alpha) = \lambda_1 m((\tilde{a}_1)_\alpha) + \lambda_2 m((\tilde{a}_2)_\alpha), \tag{1}$$

$$m((\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)_\beta) = \lambda_1 m((\tilde{a}_1)_\beta) + \lambda_2 m((\tilde{a}_2)_\beta). \tag{2}$$

证明　由定义 3 有

$$\begin{aligned}&\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2 =\\&([\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1 +\\&\lambda_2 c_2, \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2]; \mu_{\tilde{a}_1} \bigwedge \mu_{\tilde{a}_2}, \nu_{\tilde{a}_1} \bigvee \nu_{\tilde{a}_2}) =\\&([\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2,\\&\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2]; \mu_{\tilde{a}_1}, \nu_{\tilde{a}_1}).\end{aligned}$$

由定义 6 得到

$$\begin{aligned}&m((\tilde{a}_i)_\alpha) = \mu_{\tilde{a}_i}(a_i + 2b_i + 2c_i + d_i)/3,\\&m((\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)_\alpha) =\\&\mu_{(\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)}[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + 2(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) +\\&2(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2]/3 =\\&\lambda_1\mu_{\tilde{a}_1}(a_1 + 2b_1 + 2c_1 + d_1)/3 +\\&\lambda_2\mu_{\tilde{a}_2}(a_2 + 2b_2 + 2c_2 + d_2)/3 =\\&\lambda_1 m((\tilde{a}_1)_\alpha) + \lambda_2 m((\tilde{a}_2)_\alpha).\end{aligned}$$

同理可证得式 (2). □

显然, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 有

$$m((\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)_\alpha) = m((\tilde{a}_1)_\alpha) + m((\tilde{a}_2)_\alpha),$$

$$m((\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)_\beta) = m((\tilde{a}_1)_\beta) + m((\tilde{a}_2)_\beta).$$

2.4　ITFN 的排序方法

模糊数的可能性均值类似于随机变量的均值[13], 可以较好地定量刻画模糊数所蕴含的不确定信息. 显然, 可能性均值越大, 相应的模糊数越大. 设 2 个 ITFN $\tilde{a}_i$, 其隶属、非隶属函数的加权可能性均值分别为 $m((\tilde{a}_i)_\alpha), m((\tilde{a}_i)_\beta)$, $i = 1, 2$. 根据加权可能性均值, 给出其大小比较方法如下:

1) 若 $m((\tilde{a}_1)_\alpha) < m((\tilde{a}_2)_\alpha)$, 则 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$.

2) 当 $m((\tilde{a}_1)_\alpha) = m((\tilde{a}_2)_\alpha)$ 时, 有:

① 若 $m((\tilde{a}_1)_\beta) = m((\tilde{a}_2)_\beta)$, 则 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$;

② 若 $m((\tilde{a}_1)_\beta) < m((\tilde{a}_2)_\beta)$, 则 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$.

3　ITFN 矩阵博弈模型的构建及求解

3.1　ITFN 矩阵博弈模型的构建

设五元组 $\mathrm{ITFG} = (\mathrm{I}, \mathrm{II}, S^n, S^m, \tilde{A})$ 为支付值是 ITFN 的矩阵博弈. 其中: I, II 分别代表博弈的参与人; $S_1 = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m\}$ 和 $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$ 分别为 I 和 II 的纯策略集, 且

$$S^m = \{X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}} | x_i \geqslant 0,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1\},$$

$$S^n = \{Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} | y_i \geqslant 0,\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1\}$$

分别为其混合策略集; ITFN 矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ 为参与人 I 的赢得矩阵, $\tilde{a}_{ij} = ([a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}]; \mu_{\tilde{a}_{ij}}, \nu_{\tilde{a}_{ij}})$ 为 I 和 II 分别选择纯策略 $\delta_i \in S_1$ 和 $\sigma_j \in S_2$ 时 I 获得的支付值. 由于两人零和博弈, 当 $X \in S^m$, $Y \in S^n$ 时, $X^{\mathrm{T}}\tilde{A}Y$ 表示参与人 I 的期望赢得值, 即为 II 的期望损失值.

由定义 3 得到参与人 I 的期望赢得值为

$$\tilde{\mathrm{E}}(\tilde{A}) = X^{\mathrm{T}}\tilde{A}Y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_i y_j =$$

$$\Big(\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j,\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_iy_j,\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_iy_j,$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_iy_j\Big];\bigwedge_{i,j}\mu_{\tilde a_{ij}},\bigvee_{i,j}\nu_{\tilde a_{ij}}\Big),$$

其中 $\bigwedge\limits_{i,j}$ 和 $\bigvee\limits_{i,j}$ 分别为对 (i,j) 取小、取大运算. 可见, $\tilde{\mathrm{E}}(\tilde A)$ 为 ITFN. 类似于文献 [7], 给出如下定义:

定义 7 设 $\tilde v=([a^v,b^v,c^v,d^v];\mu_{\tilde v},\nu_{\tilde v})$, $\tilde w=([a^w,b^w,c^w,d^w];\mu_{\tilde w},\nu_{\tilde w})$ 为 2 个 ITFN. 若存在 $X^*\in S^m, Y^*\in S^n$ 使得

$$(X^*)^{\mathrm T}\tilde AY\geqslant\tilde v,\ \forall Y\in S^n;$$
$$X^{\mathrm T}\tilde AY^*\leqslant\tilde w,\ \forall X\in S^m.$$

则称 $(X^*,Y^*,\tilde v,\tilde w)$ 为 ITFN 矩阵博弈的合理解; $\tilde v,\tilde w$ 分别为参与人 I, II 的合理值.

定义 8 设 V, W 分别为合理值 $\tilde v,\tilde w$ 的集合, 若存在 $\tilde v^*\in V$, $\tilde w^*\in W$ 使得

$$\tilde v^*\geqslant\tilde v,\ \forall\tilde v\in V;$$
$$\tilde w^*\leqslant\tilde w,\ \forall\tilde w\in W.$$

则称 $(X^*,Y^*,\tilde v^*,\tilde w^*)$ 为 ITFN 矩阵博弈的解; $\tilde v^*,\tilde w^*$ 为 I, II 的博弈值; X^*,Y^* 为 I, II 的最优策略.

3.2 ITFN 矩阵博弈的求解

根据定义 7 和定义 8 可知, 最优策略 (X^*,Y^*) 可通过求解如下一对模糊规划模型得到:

$$\begin{aligned}&\max\tilde v.\\ &\text{s.t. }\sum_{i=1}^{m}\tilde a_{ij}x_iy_j\geqslant\tilde v,\ Y\in S^n;\\ &\qquad\sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\min\tilde w.\\ &\text{s.t. }\sum_{j=1}^{n}\tilde a_{ij}x_iy_j\leqslant\tilde w,\ X\in S^m;\\ &\qquad\sum_{j=1}^{n}y_j=1,\ y_j\geqslant0,\ j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\tag{4}$$

由定义 3, 式 (3) 和 (4) 可转化为

$$\begin{aligned}&\max\tilde v.\\ &\text{s.t. }\sum_{i=1}^{m}\tilde a_{ij}x_i\geqslant\tilde v,\ j=1,2,\cdots,n;\\ &\qquad\sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\min\tilde w.\\ &\text{s.t. }\sum_{j=1}^{n}\tilde a_{ij}y_j\leqslant\tilde w,\ i=1,2,\cdots,m;\\ &\qquad\sum_{j=1}^{n}y_j=1,\ y_j\geqslant0,\ j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\tag{6}$$

根据第 2.4 节 ITFN 的排序方法, 式 (5) 和 (6) 可转化为如下精确值数学规划模型:

$$\begin{aligned}&\max\{m(\tilde v_\alpha),\ m(\tilde v_\beta)\}.\\ &\text{s.t. }m\Big(\Big(\sum_{i=1}^{m}\tilde a_{ij}x_i\Big)_\alpha\Big)\geqslant m(\tilde v_\alpha),\ j=1,2,\cdots,n;\\ &\qquad m\Big(\Big(\sum_{i=1}^{m}\tilde a_{ij}x_i\Big)_\beta\Big)\geqslant m(\tilde v_\beta),\ j=1,2,\cdots,n;\\ &\qquad\sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\min\{m(\tilde w_\alpha),\ m(\tilde w_\beta)\}.\\ &\text{s.t. }m\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde a_{ij}x_i\Big)_\alpha\Big)\leqslant m(\tilde w_\alpha),\ i=1,2,\cdots,m;\\ &\qquad m\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde a_{ij}x_i\Big)_\beta\Big)\leqslant m(\tilde w_\beta),\ i=1,2,\cdots,m;\\ &\qquad\sum_{j=1}^{n}y_i=1,\ y_j\geqslant0,\ j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\tag{8}$$

首先求解式 (7), 记 $\tilde\nu$ 的隶属、非隶属函数的加权可能性均值分别为

$$v_1=\mu_{\tilde v}(a^v+2b^v+2c^v+d^v)/3,$$
$$v_2=(1-\nu_{\tilde v})(a^v+2b^v+2c^v+d^v)/3,$$

则由定义 3 和定义 6, 式 (7) 可改写为

$$\begin{aligned}&\max\{v_1,v_2\}.\\ &\text{s.t. }\frac13\sum_{i=1}^{m}\mu_{\tilde a_{ij}}(a_{ij}+2b_{ij}+2c_{ij}+d_{ij})x_i\geqslant v_1,\\ &\qquad j=1,2,\cdots,n;\\ &\qquad\frac13\sum_{i=1}^{m}(1-\nu_{\tilde a_{ij}})(a_{ij}+2b_{ij}+2c_{ij}+d_{ij})x_i\geqslant v_2,\\ &\qquad j=1,2,\cdots,n,\ v_2\geqslant v_1;\\ &\qquad\sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{9}$$

式 (9) 是一个双目标线性规划模型, 求解多目标线性规划通常要用到 Pareto 最优解的概念[6-7]. 本文采用加权平均方法将式 (9) 转化为

$$\begin{aligned}&\max(v_1+v_2)/2.\\ &\text{s.t. }\frac13\sum_{i=1}^{m}\mu_{\tilde a_{ij}}(a_{ij}+2b_{ij}+2c_{ij}+d_{ij})x_i\geqslant v_1,\\ &\qquad j=1,2,\cdots,n;\\ &\qquad\frac13\sum_{i=1}^{m}(1-\nu_{\tilde a_{ij}})(a_{ij}+2b_{ij}+2c_{ij}+d_{ij})x_i\geqslant v_2,\\ &\qquad j=1,2,\cdots,n,\ v_2\geqslant v_1;\\ &\qquad\sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{10}$$

利用单纯形法求解式 (10) 得到最优解为 (X^*, v_1^*, v_2^*), 即参与人 I 的最优策略为 X^*, 博弈值 $\tilde{v}$ 的隶属、非隶属函数的加权可能性均值为 v_1^* 和 v_2^*. 易证 (X^*, v_1^*, v_2^*) 是式 (9) 的 Pareto 最优解. 同理, 记 $\tilde{w}$ 的隶属、非隶属函数的加权可能性均值分别为

$$w_1 = \mu_{\tilde{w}}(a^w + 2b^w + 2c^w + d^w)/3,$$

$$w_2 = (1 - \nu_{\tilde{w}})(a^w + 2b^w + 2c^w + d^w)/3.$$

则式 (8) 可转化为

$$\begin{aligned}
&\min\{w_1, w_2\}.\\
&\text{s.t. } \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\mu_{\tilde{a}_{ij}}(a_{ij} + 2b_{ij} + 2c_{ij} + d_{ij})y_j \leqslant w_1,\\
&\quad i = 1, 2, \cdots, m;\\
&\quad \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(1 - \nu_{\tilde{a}_{ij}})(a_{ij} + 2b_{ij} + 2c_{ij} + d_{ij})y_j \leqslant w_2,\\
&\quad i = 1, 2, \cdots, m,\ w_1 \leqslant w_2;\\
&\quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{11}$$

然后, 利用加权平均的方法将式 (11) 转化为

$$\begin{aligned}
&\min(w_1 + w_2)/2.\\
&\text{s.t. } \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\mu_{\tilde{a}_{ij}}(a_{ij} + 2b_{ij} + 2c_{ij} + d_{ij})y_j \leqslant w_1,\\
&\quad i = 1, 2, \cdots, m;\\
&\quad \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(1 - \nu_{\tilde{a}_{ij}})(a_{ij} + 2b_{ij} + 2c_{ij} + d_{ij})y_j \leqslant w_2,\\
&\quad i = 1, 2, \cdots, m,\ w_1 \leqslant w_2;\\
&\quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{12}$$

求解式 (12) 得到最优解 (Y^*, w_1^*, w_2^*), 即参与人 II 的最优策略为 Y^*, 博弈值 $\tilde{w}$ 的隶属、非隶属函数的加权可能性均值为 w_1^* 和 w_2^*. 易证 (Y^*, w_1^*, w_2^*) 是式 (11) 的 Pareto 最优解. 显然, 当 $b_{ij} = c_{ij}$ 时, $\tilde{a}_{ij} = ([a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}];\ \mu_{\tilde{a}_{ij}}, \nu_{\tilde{a}_{ij}})$, ITFN 退化为 TIFN. 此时, 式 (7) 和 (8) 也分别退化为文献 [7] 的双目标规划模型 (5) 和 (10), 即支付值为 ITFN 的矩阵博弈是支付值为 TIFN 的矩阵博弈[7]的一个自然延伸.

4　实例分析

4.1　数值例子

现有两家生产同种产品的寡头企业甲和乙, 为了获得更多的市场份额进行博弈. 假设市场份额一定, 且他们的策略有以下 4 种: 增加广告宣传 σ_1, 适当降低价格 σ_2, 提高产品质量 σ_3, 改进产品包装 σ_4. 通过分析预测到企业甲的市场份额为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
([12,13,14,15];0.7,0.1) & ([11,13,15,17];0.8,0.2) & ([14,15,17,19];0.6,0.3) & ([12,15,18,20];0.7,0.2)\\
([17,18,19,21];0.6,0.3) & ([12,14,16,17];0.8,0.1) & ([15,16,18,20];0.7,0.2) & ([19,20,22,23];0.6,0.3)\\
([11,18,19,20];0.7,0.2) & ([15,17,18,19];0.8,0.1) & ([20,21,22,25];0.6,0.3) & ([14,15,16,19];0.7,0.3)\\
([13,14,18,28];0.8,0.2) & ([14,18,21,24];0.6,0.3) & ([17,19,20,27];0.6,0.3) & ([12,14,15,20];0.8,0.2)
\end{bmatrix},$$

其中 ([12,13,14,15]; 0.7, 0.1) 为当甲乙都选择策略 σ_1 时, 甲的市场份额在区间 [13,14] 内的最大隶属度为 0.7, 最小非隶属度为 0.1, 犹豫度为 0.2. 其他 ITFN 可作类似解释. 因此, 由式 (10) 构建线性规划为

$$\begin{aligned}
&\max(v_1 + v_2)/2;\\
&\text{s.t. } 18.9x_1 + 22.4x_2 + 24.5x_3 + 28x_4 \geqslant v_1,\\
&\quad 22.4x_1 + 23.7x_2 + 27.7x_3 + 23.2x_4 \geqslant v_1,\\
&\quad 19.4x_1 + 24x_2 + 30.6x_3 + 24.4x_4 \geqslant v_1,\\
&\quad 22.9x_1 + 25.2x_2 + 19x_3 + 24x_4 \geqslant v_1,\\
&\quad 24.3x_1 + 26.1x_2 + 28x_3 + 28x_4 \geqslant v_2,\\
&\quad 22.4x_1 + 26.7x_2 + 31.2x_3 + 27x_4 \geqslant v_2,\\
&\quad 22.6x_1 + 27.5x_2 + 30.6x_3 + 28.5x_4 \geqslant v_2,\\
&\quad 26.1x_1 + 29.4x_2 + 22.2x_3 + 24x_4 \geqslant v_2,\\
&\quad v_1 \geqslant v_2,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\
&\quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

利用 Lingo 软件求解得到

$$X^* = (0, 0.581\,9, 0.124\,6, 0.293\,5)^{\mathrm{T}},$$

$$v_1^* = 24.075,\ v_2^* = 26.914.$$

再由式 (12) 构建如下线性规划模型:

$$\begin{aligned}
&\min(w_1 + w_2)/2;\\
&\text{s.t. } 18.9y_1 + 22.4y_2 + 19.4y_3 + 22.9y_4 \leqslant w_1,\\
&\quad 22.4y_1 + 23.7y_2 + 24y_3 + 25.2y_4 \leqslant w_1,\\
&\quad 24.5y_1 + 27.7y_2 + 30.6y_3 + 22.2y_4 \leqslant w_1,\\
&\quad 28y_1 + 23.2y_2 + 24.4y_3 + 24y_4 \leqslant w_1,\\
&\quad 24.3y_1 + 22.4y_2 + 22.6y_3 + 26.1y_4 \leqslant w_2,\\
&\quad 26.1y_1 + 26.7y_2 + 27.5y_3 + 29.4y_4 \leqslant w_2,\\
&\quad 28y_1 + 31.2y_2 + 30.6y_3 + 22.2y_4 \leqslant w_2,\\
&\quad 28y_1 + 27.1y_2 + 28.5y_3 + 27y_4 \leqslant w_2,\\
&\quad w_1 \leqslant w_2,\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1,\\
&\quad y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ y_3 \geqslant 0,\ y_4 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

求解式 (13) 得到 $Y^* = (0.316\,7,\ 0.370\,9,\ 0,\ 0.312\,4)^{\mathrm{T}}$,

$w_1^* = 24.970,\ w_2^* = 27.364$. 甲的期望赢得值 $\tilde{\mathrm{E}}(X^*, Y^*) = X^{*\mathrm{T}}\tilde{A}Y^* = ([14.7, 16.6, 18.5, 21.2]; 0.6, 0.3)$, 如图1所示.

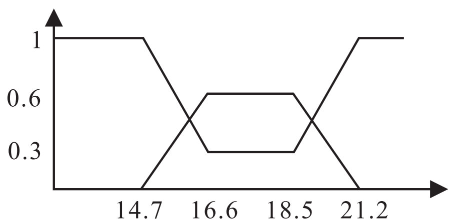

图1 市场份额竞争的ITFN矩阵博弈的解

当甲乙分别选择混合策略 $X^* = (0,\ 0.581\,9,\ 0.124\,6,\ 0.293\,5)^{\mathrm{T}}, Y^* = (0.316\,7,\ 0.370\,9,\ 0,\ 0.312\,4)^{\mathrm{T}}$ 时, 甲的销售量在区间[16.6, 18.5]内的最大隶属度为0.6, 最小非隶属度为0.3, 犹豫度为0.1.

4.2 与相关文献的比较分析

为了进一步说明本文方法的优越性, 将其与文献[4,7]进行比较分析. 将第4.1节中 $\tilde{A}$ 的ITFN去掉梯形模糊数, 即将 $\tilde{A}$ 转化为IFS的表达形式

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (0.7,0.1) & (0.8,0.2) & (0.6,0.3) & (0.7,0.2) \\ (0.6,0.3) & (0.8,0.1) & (0.7,0.2) & (0.6,0.3) \\ (0.7,0.2) & (0.8,0.1) & (0.6,0.3) & (0.7,0.3) \\ (0.8,0.2) & (0.6,0.3) & (0.6,0.3) & (0.8,0.2) \end{bmatrix}.$$

采用文献[4]的方法, 设 $\lambda = 0.8$, 可求解得 $X^* = (0, 0.671\,3, 0, 0.328\,7)^{\mathrm{T}}, Y^* = X^* = (0.671\,3, 0, 0.328\,7, 0)^{\mathrm{T}}$, $P^* = Q^* = 0.306\,4$, 以及甲的期望赢得值 $\tilde{\mathrm{E}}(X^*, Y^*) = X^{\mathrm{T}}\tilde{A}Y^* = (0.611\,2, 0.251\,2)$, 即甲的期望赢得在“中等”和“高”之间.

将第4.1节中 $\tilde{A}$ 的ITFN通过取区间 $[b_{ij}, c_{ij}]$ 的中点, 可将 $\tilde{A}$ 转化为TIFN的表达形式

$$\tilde{A} =$$

$$\begin{bmatrix} ([12,13.5,15];0.7,0.1) & ([11,14,17];0.8,0.2) & \rightarrow \\ ([17,18.5,21];0.6,0.3) & ([12,15,17];0.8,0.1) & \\ ([11,18.5,20];0.7,0.2) & ([15,17.5,19];0.8,0.1) & \\ ([13,16,28];0.8,0.2) & ([14,19.5,24];0.6,0.3) & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \leftarrow & ([14,16,19];0.6,0.3) & ([12,16.5,20];0.7,0.2) \\ & ([15,17,20];0.7,0.2) & ([19,21,23];0.6,0.3) \\ & ([20,21.5,25];0.6,0.3) & ([14,15.5,19];0.7,0.3) \\ & ([17,19.5,27];0.6,0.3) & ([12,14.5,20];0.8,0.2) \end{bmatrix},$$

采用文献[7]的方法得到

$$X^* = (0, 0.538\,0, 0.224\,9, 0.237\,1)^{\mathrm{T}},$$
$$v_1^* = 12.190\,4,\ v_2^* = 13.320\,4,$$
$$Y^* = (0.092\,4, 0.356\,0, 0.000\,1, 0.551\,5)^{\mathrm{T}},$$
$$w_1^* = 12.190\,4,\ w_2^* = 14.047\,1,$$
$$\tilde{\mathrm{E}}(X^*, Y^*) = X^{\mathrm{T}}\tilde{A}Y^* =$$
$$([14.984\,2, 17.625\,9, 20.674\,3]; 0.6, 0.3),$$

即甲的销售量在点17.625 9的最大隶属度为0.6, 最小非隶属度为0.3, 犹豫度为0.1.

由以上分析可知, 对于甲的销售量, 本文得到其在区间[16.6, 18.5]内的最大隶属度为0.6, 最小非隶属度为0.3, 犹豫度为0.1; 文献[7]得到其在点17.625 9的最大隶属度为0.6, 最小非隶属度为0.3, 犹豫度为0.1; [4]得到其介于“中等”和“高”之间, 结论非常模糊. 可见, 相比于[4,7], 本文方法得到的结果能包含更多的决策信息, 更加符合现实情况. 这是由于IFS仅采用精确实数来表达隶属和非隶属度; TIFN的隶属和非隶属度相对的是三角模糊数; ITFN相对的是梯形模糊数. 在描述现实情况时, ITFN用区间数来刻画最大隶属、最小非隶属度所属的范围, 包含更多的不确定信息, 为决策者提供更丰富的信息; TIFN仅用1个数点来刻画最大隶属、最小非隶属度. 因此, 在处理某些不确定性博弈问题时, ITFN能够更加细腻、灵活地表达不确定信息.

5 结 论

本文定义了ITFN新的简单运算法则, 引入了ITFN的下、上加权可能性均值及加权可能性均值的概念, 利用隶属与非隶属函数的加权可能性均值给出了ITFN新的排序方法. 提出ITFN矩阵博弈并给出了其求解方法. 虽然选择市场份额竞争问题作为实例进行说明, 但本文方法也可应用于其他带有ITFN信息的类似竞争性决策与博弈问题. 本文的研究是TIFN矩阵博弈[7]的有益扩展, 相比于支付值为IFS[4]、区间直觉模糊数[6]和TIFN[7]的矩阵博弈, 本文研究的ITFN矩阵博弈能更加细腻、灵活地表达不确定性博弈问题, 也为解决复杂模糊信息环境下的博弈问题提供了新的途径.

参考文献(References)

[1] Bector C R, Chandra S, Vijay V. Matrix games with fuzzy goals and fuzzy linear programming duality[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3(3): 255-269.

[2] Bector C R, Chandra S, Vijay V. Duality in linear programming with fuzzy parameters and matrix games with fuzzy payoffs[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 146(2): 253-269.

[3] Li Deng-feng. Lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16(3): 371-389.

(下转第1132页)