

文章编号: 1001-0920(2012)09-1415-06

快速高阶滑模微分器

蒲明, 吴庆宪, 姜长生, 程路

(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

摘要: 首先利用 Terminal 吸引子函数代替高阶滑模微分器中的不连续函数, 以避免抖振; 然后在高阶滑模微分器每一层滑模面中增加快速收敛项, 以提高收敛速度, 并分别针对不同情况证明了快速高阶滑模微分器的稳定性, 给出了估计误差的具体表达式, 提出了一种抑噪设计方法; 最后比较了快速高阶滑模微分器与标准高阶滑模微分器的收敛时间和误差, 总结了快速高阶滑模微分器的一般设计方法, 并通过仿真结果表明了所得结论的正确性和有效性。

关键词: 快速高阶滑模微分器; 去除抖振; 抑制噪声; 减小误差

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Fast higher-order sliding mode differentiator

PU Ming, WU Qing-xian, JIANG Chang-sheng, CHENG Lu

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.

Correspondent: PU Ming, E-mail: msznuaa@163.com)

Abstract: Firstly, discontinuous function in higher-order differentiator is substituted by Terminal attractor function to eliminate chattering. Then, fast convergence term is inserted into each sliding mode of higher-order differentiator to speed up convergence. The system is stable under different conditions and the estimation error expression is given. A method for noise restrain is proposed. The difference of the convergence time and the estimation error between fast higher-order differentiator and normal higher-order differentiator are analyzed. The universal design method for fast higher-order differentiator is generalized. Finally, simulation results show the correctness and effectiveness of all conclusions.

Key words: fast higher-order differentiator; eliminate chattering; restrain noise; reduce error

1 引言

由 Levant^[1] 提出的高阶滑模微分器, 吸收了滑模变结构所具有的鲁棒性强、精度高、反应快等优点, 是保证 PID 控制、优化控制、动态滑模控制等诸多控制方法获取高品质状态微分的重要手段。但是, 文献 [1] 未对整体误差大小及抑噪能力作出定量分析。文献 [2-3] 等给出了高阶滑模微分器的一些应用, 但其理论结果并无突破。

本文在文献 [1] 的基础上, 首先利用 Terminal 吸引子函数代替高阶滑模微分器中的不连续函数, 以避免抖振; 然后对高阶滑模微分器增加线性项, 以加快初始阶段的收敛速度, 并分别针对不同情况证明了高阶滑模微分器整体的稳定性, 给出了估计误差上界的具体表达式, 所提出的方法不仅能够有效抑制噪声, 而且能够减小由其他干扰造成的估计误差; 最后分析

了快速高阶滑模微分器与非快速高阶滑模微分器在收敛时间和误差上的区别, 总结了快速高阶滑模微分器的一般设计方法, 并通过仿真结果表明了上述结论的有效性和所提出控制方案的优越性。

2 无抖振快速高阶滑模微分器

受快速终端滑模的启发^[4], 在文献 [1] 的基础上有如下 n 阶无抖振快速滑模微分器:

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0 = -\lambda_{0,1}(z_0 - f(t)) - \lambda_{0,2} \times \\ \quad |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \text{sgn}(z_0 - f(t)) + z_1; \\ \dot{z}_i = v_i = -\lambda_{i,1}(z_i - v_{i-1}) - \lambda_{i,2} \times \\ \quad |z_i - v_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \text{sgn}(z_i - \\ \quad v_{i-1}) + z_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{z}_n = v_n = -\lambda_{n,1}(z_n - v_{n-1}) - \lambda_{n,2} \times \\ \quad |z_n - v_{n-1}|^{q/p} \text{sgn}(z_n - v_{n-1}). \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2011-02-21; 修回日期: 2011-04-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(90716028, 60974106).

作者简介: 蒲明(1981-), 男, 博士生, 从事滑模控制的研究; 吴庆宪(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制等研究.

其中: $f(t) = f_0(t) + \xi(t)$, $f_0(t)$ 为原始信号, $\xi(t)$ 为 $f_0(t)$ 受到的噪声污染; v_i 为 $f_0(t)$ 的第 $i + 1$ 阶微分估计值; z_i 为系统 (1) 中内部状态; $\lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}, \dots, \lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}$ 为微分器设计参数; q, p 为 Terminal 吸引子设计参数.

为便于分析, 令 $\sigma_0 = z_0 - f_0(t), \dots, \sigma_i = z_i - f_0^{(i)}(t), \dots, \sigma_n = z_n - f_0^{(n)}(t)$, 则在 Filippov 意义下, 式 (1) 可变换为如下误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\lambda_{0,1}(\sigma_0 - \xi(t)) - \lambda_{0,2} \times \\ \quad |\sigma_0 - \xi(t)|^{n/(n+1)} \text{sgn}(\sigma_0 - \xi(t)) + \sigma_1; \\ \dot{\sigma}_i = -\lambda_{i,1}(\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}) - \lambda_{i,2} \times \\ \quad |\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \text{sgn}(\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}) + \\ \quad \sigma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{\sigma}_n = -\lambda_{n,1}(\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}) - \lambda_{n,2} \times \\ \quad |\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}|^{q/p} \text{sgn}(\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}) - f_0^{(n+1)}(t). \end{cases} \quad (2)$$

当式 (2) 中各误差状态 $\sigma_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 收敛于 0 点时, 由 n 阶滑模微分器的内部状态 z_i 可以精确估计出 $f_0(t)$ 的各阶微分值 $f_0^{(i)}(t)$. 下面分别针对不同情况给出系统 (2) 的稳定性证明.

3 稳定性分析

定义 1 对于 $s_i < s'_i, i = 0, 1, \dots, n$, 若存在一个有限时刻 T , 使得 $t > T$ 后, 从区域 $|\sigma_i| < s'_i$ 出发的高阶滑模微分器误差系统 (2) 的轨迹能收敛并停留在区域 $|\sigma_i| < s_i$ 之内, 则系统 (2) 是有限时间稳定的, 即 Lyapunov 稳定的^[5].

定理 1 n 阶无抖振快速滑模微分器误差系统 (2) 对于任意给定有限初始误差状态 $\sigma_i(0), i = 0, 1, \dots, n$, 任意时变函数 $f_0(t)$, 若 $f_0^{(n+1)}(t) \neq 0$, 且 $f_0^{(n)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 $L > 0$, 干扰 $\xi(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ 是噪声的上界, 则总存在一组正数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_i = \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}$, 使系统 (2) 是 Lyapunov 稳定的, 且 σ_i 收敛至一包含原点的闭球 B_i 内. 收敛过程振荡衰减, 且闭球半径满足

$$r(B_i) < \frac{L^{(n+1)p/q}}{A_i \Theta_i} + \Xi_i \varepsilon \triangleq r(B_i)_1 + r(B_i)_2. \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A_i &= (\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})^{(n+1)p/q} (\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{n+1} \times \\ &\quad \dots (\lambda_{i,1} + \lambda_{i,2})^{(n+1)/(n-i)}, \\ \Theta_i &= (\lambda_{i-1,1} + \lambda_{i-1,2})^{i/(n-i+1)} \times \\ &\quad (\lambda_{i-2,1} + \lambda_{i-2,2})^{(i-1)/(n-i+2)} \dots (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{1/n}, \\ \Xi_i &= 2(\lambda_{i-1,1} + \lambda_{i-1,2}) \dots (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}). \end{aligned}$$

为证明定理 1, 先证明以下几个引理:

引理 1 $|a + b|^l \leq |a|^l + |b|^l, \forall 0 < l < 1$.

证明 当 a 与 b 同号时, 设 $a \geq 0, b \geq 0$, 令 $f(x) = x^l, x > 0, 0 < l < 1$, 有 $f(0) = 0$. 设 $0 \leq x_1 \leq x_2$, 则由

拉格朗日中值定理有

$$f(x_1) - f(0) = x_1 f'(\xi_1), 0 \leq \xi_1 \leq x_1;$$

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) = x_1 f'(\xi_2), x_2 \leq \xi_2 \leq x_1 + x_2.$$

因此有 $\xi_1 \leq \xi_2$. 又因为 $f'(x) = l(l-1)x^{l-2} \leq 0$, 有 $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, 所以有

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) \leq x_1 f'(\xi_1) = f(x_1),$$

即 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$. 令 $x_1 = a, x_2 = b$, 从而引理 1 成立. 当 $a \leq 0, b \leq 0$ 时, 有类似证明.

a, b 异号时, 证明简单, 不再详述. \square

引理 2 存在一足够小的时间段 δ , 对于任意 $0 < s_i < s'_i, i = 0, 1, \dots, n$, 在时间段 δ 内, 若存在一正数 K 使得 $\int_{\delta} |\xi(t)| dt < K$ 成立, 则式 (2) 中各误差系统状态从区域 $|\sigma_i| < s_i$ 出发的轨迹不会超出区域 $|\sigma_i| < s'_i$.

证明 设 s_{Mi} 满足 $s_i < s'_i < s_{Mi}, i = 0, 1, \dots, n$. 对于 $|\sigma_0| < s_0$, 由引理 1, 有

$$\begin{aligned} |\dot{\sigma}_0| &= \\ &|-\lambda_{0,1}(\sigma_0 - \xi(t)) - \lambda_{0,2}|\sigma_0 - \xi(t)|^{n/(n+1)} \times \\ &\quad \text{sgn}(\sigma_0 - \xi(t)) + \sigma_1| \leq \\ &\lambda_{0,1}|\sigma_0| + \lambda_{0,1}|\xi(t)| + \lambda_{0,2}|\sigma_0 - \xi(t)|^{n/(n+1)}|\sigma_1| \leq \\ &\lambda_{0,1}|\sigma_0| + \lambda_{0,1}|\xi(t)| + \lambda_{0,2}|\sigma_0|^{n/(n+1)} + \\ &\lambda_{0,2}|\xi(t)|^{n/(n+1)} + |\sigma_1| \leq \\ &\lambda_{0,1}s_{M0} + \lambda_{0,2}s_{M0}^{n/(n+1)} + s_{M1} + \lambda_{0,1}|\xi(t)| + \\ &\lambda_{0,2}|\xi(t)|^{n/(n+1)}. \end{aligned}$$

只要时间段 δ 足够小, 则 $|\sigma_0|$ 变化也足够小, 从而可以保证 $|\sigma_0| < s'_0$. 再由引理 1 和 Holder 积分不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_{\delta} |\dot{\sigma}_0| dt &\leq \\ &\int_{\delta} (\lambda_{0,1}s_{M0} + \lambda_{0,2}s_{M0}^{n/(n+1)} + s_{M1} + \\ &\lambda_{0,1}|\xi(t)| + \lambda_{0,2}|\xi(t)|^{n/(n+1)}) dt \leq \\ &\delta(\lambda_{0,1}s_{M0} + \lambda_{0,2}s_{M0}^{n/(n+1)} + s_{M1}) + \\ &\lambda_{0,1} \int_{\delta} |\xi(t)| dt + \lambda_{0,2} \int_{\delta} |\xi(t)|^{n/(n+1)} dt \leq \\ &\delta(\lambda_{0,1}s_{M0} + \lambda_{0,2}s_{M0}^{n/(n+1)} + s_{M1}) + \\ &\lambda_{0,1}K + \lambda_{0,2} \int_{\delta} 1 \cdot |\xi(t)|^{n/(n+1)} dt \leq \\ &\delta(\lambda_{0,1}s_{M0} + \lambda_{0,2}s_{M0}^{n/(n+1)} + s_{M1}) + \\ &\lambda_{0,1}K + \lambda_{0,2} \left(\int_{\delta} 1^{n+1} dt \right)^{1/(n+1)} \times \\ &\left(\int_{\delta} (|\xi(t)|^{n/(n+1)})^{(n+1)/n} dt \right)^{n/(n+1)} = \\ &\delta(\lambda_{0,1}s_{M0} + \lambda_{0,2}s_{M0}^{n/(n+1)} + s_{M1}) + \\ &\lambda_{0,1}K + \lambda_{0,2} \delta^{1/(n+1)} \left(\int_{\delta} |\xi(t)| dt \right)^{n/(n+1)} \leq \\ &\delta(\lambda_{0,1}s_{M0} + \lambda_{0,2}s_{M0}^{n/(n+1)} + s_{M1}) + \end{aligned}$$

$$\lambda_{0,1}K + \lambda_{0,2}\delta^{1/(n+1)}K^{n/(n+1)} \triangleq K_0.$$

因此, σ_1 满足引理 2 的条件. 同理可以证明 $|\sigma_1| < s'_1$. 逐步递推, 可以证明 $|\sigma_i| < s'_i, i = 2, 3, \dots, n$. \square

定理 1 的证明 在引理 1 和引理 2 的基础上, 稳定性证明与文献 [1] 相同. 下面仅证明定理 1 的其余结论.

1) 考虑式 (2) 的第 1 个方程. 其中 $-\lambda_{0,1}(\sigma_0 - \xi(t)) - \lambda_{0,2}|\sigma_0 - \xi(t)|^{n/(n+1)}\text{sgn}(\sigma_0 - \xi(t))$ 总有让 σ_0 趋于 $\xi(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ 的作用而将 σ_1 视作扰动部分. 对于给定的 $|\sigma_1|$, 总存在一定值的 $|\sigma_0|$ 才能使 $\dot{\sigma}_0 = 0$. 记 $|\sigma_0|$ 第 k_i 次振幅为 $r(B_{0,k_i})$, 则有 $r(B_{0,k_i}) = \Gamma(r(B_{1,k_j}))$, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 代表某一函数. 其他各方程有相同定义.

假设定理 1 结论不成立, 即存在

$$r(B_{0,k_{i+1}}) > r(B_{0,k_i}),$$

则须 $|\sigma_{1,k_{j+1}}| > |\sigma_{1,k_j}|$. 以此逐步递推, 为满足上述假设, 须有 $|\sigma_{n,k_{k+1}}| > |\sigma_{n,k_k}|$. 在定理 1 条件下, 联合式 (2) 中最后两式, 显然 $|\sigma_{n,k_{k+1}}| > |\sigma_{n,k_k}|$ 不成立. 因此假设不成立, 收敛过程振荡衰减.

2) 由于 $f_0^{(n)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 L , 根据微分知识有 $f_0^{(n+1)}(t) \in [-L, L]$, 稳态时有 $\dot{\sigma}_n = 0$, 并取边界 $f_0^{(n+1)}(t) = L$. 考虑到微分器对噪声较为敏感, 现假设跟踪快变函数 $f_0(t)$ 各阶微分误差较大, 设 $r(B_i) > 1, i = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} L &= \lambda_{n,1}r(B_n) + \lambda_{n,2}r(B_n)^{q/p} > \\ &\lambda_{n,1}r(B_n)^{q/p} + \lambda_{n,2}r(B_n)^{q/p} = \\ &(\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})r(B_n)^{q/p}. \end{aligned}$$

代入 $r(B_n) = \lambda_{n-1,1}r(B_{n-1}) + \lambda_{n-1,2}r(B_{n-1})^{1/2}$, 有

$$\begin{aligned} L &> (\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})(\lambda_{n-1,1}r(B_{n-1}) + \\ &\lambda_{n-1,2}r(B_{n-1})^{1/2})^{q/p} > \\ &(\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})(\lambda_{n-1,1}r(B_{n-1})^{1/2} + \\ &\lambda_{n-1,2}r(B_{n-1})^{1/2})^{q/p} = \\ &(\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{q/p} \times \\ &r(B_{n-1})^{(q/p) \times (1/2)}. \end{aligned}$$

如此迭代递推, 有

$$\begin{aligned} L &> (\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{q/p} \times \\ &(\lambda_{n-2,1} + \lambda_{n-2,2})^{q/2p} \times \dots \times \\ &(\lambda_{n-i,1} + \lambda_{n-i,2})^{q/ip} \dots (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{q/np} \times \\ &(r(B_0) - \varepsilon)^{q/(n+1)p}, \end{aligned}$$

即

$$r(B_0) < L^{(n+1)p/q} \left(\frac{1}{\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2}} \times \frac{1}{(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{q/p}} \times \dots \times \frac{1}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{q/np}} \right) + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\lambda_{n-2,1} + \lambda_{n-2,2})^{q/(2p)}} \times \dots \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{n-i,1} + \lambda_{n-i,2})^{q/(ip)}} \times \dots \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{q/np}} \Big)^{(n+1)p/q} + \varepsilon = \\ &\varepsilon + \frac{L^{(n+1)p/q}}{(\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})^{(n+1)p/q}} \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{n+1}} \times \dots \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{n-i,1} + \lambda_{n-i,2})^{(n+1)/i}} \times \dots \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{(n+1)/n}}; \end{aligned}$$

再有

$$\begin{aligned} r(B_1) &< \\ \lambda_{0,1}(r(B_0) + \varepsilon) + \lambda_{0,2}(r(B_0) + \varepsilon)^{n/(n+1)} &< \\ (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})(r(B_0) + \varepsilon) = \\ (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})r(B_0) + (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})\varepsilon &< \\ (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}) \left(\varepsilon + \frac{L^{(n+1)p/q}}{(\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})^{(n+1)p/q}} \times \right. \\ &\frac{1}{(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{n+1}} \times \dots \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{n-i,1} + \lambda_{n-i,2})^{(n+1)/i}} \times \dots \times \\ &\left. \frac{1}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{(n+1)/n}} \right) + (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})\varepsilon = \\ 2(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})\varepsilon + \frac{L^{(n+1)p/q}}{(\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})^{(n+1)p/q}} \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{n+1}} \times \dots \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{n-i,1} + \lambda_{n-i,2})^{(n+1)/i}} \times \dots \times \\ &\frac{1}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{1/n}}. \end{aligned}$$

现假设

$$r(B_{i-1}) < \frac{L^{(n+1)p/q}}{\Lambda_{i-1}\Theta_{i-1}} + \Xi_{i-1}\varepsilon,$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_{i-1} &= (\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})^{(n+1)p/q} \times \\ &(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{n+1} \times \dots \times \\ &(\lambda_{i-1,1} + \lambda_{i-1,2})^{(n+1)/(n-i+1)}, \\ \Theta_{i-1} &= (\lambda_{i-2,1} + \lambda_{i-2,2})^{(i-1)/(n-i+2)} \times \dots \times \\ &(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{1/n}, \\ \Xi_{i-1} &= 2(\lambda_{i-2,1} + \lambda_{i-2,2}) \dots (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} r(B_i) &< \\ (\lambda_{i-1,1} + \lambda_{i-1,2})r(B_{i-1}) &< \end{aligned}$$

$$\frac{(\lambda_{i-1,1} + \lambda_{i-1,2})L^{(n+1)p/q}}{(\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})^{(n+1)p/q}(\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{n+1}} \times \frac{1}{(\lambda_{i-2,1} + \lambda_{i-2,2})^{(i-1)/(n-i+2)}} \times \dots \times \frac{1}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})^{1/n}} + 2(\lambda_{i-1,1} + \lambda_{i-1,2}) \times (\lambda_{i-2,1} + \lambda_{i-2,2}) \times \dots \times (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}).$$

化简后即有式 (3) 成立. 由数学归纳法即可得证. \square

注 1 在定理 1 的证明中, 因为是确定恒定边界 $r(B_i)$, 故 $f_0^{(n+1)} = L, \dot{\sigma}_i = 0$ 这一静态的考虑是成立的.

注 2 当 $r(B_i) \leq 1 (i = 0, 1, \dots, n)$ 时, 有类似结论和证明.

推论 1 n 阶滑模微分器误差系统 (2) 对于任意具有 $n + 1$ 阶微分的函数 $f_0(t)$, 任意给定有限初始状态 $\sigma_i(0), i = 0, 1, \dots, n$, 取任意一组正数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, 若 $\xi(t) = 0, f_0^{(n+1)}(t) = 0$, 则误差系统 (2) 稳定, 各误差状态 $\sigma_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 渐近收敛到原点.

推论 2 在定理 1 条件下, 总存在一组足够小的参数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$ 和一组足够大的参数 $\lambda_i, \dots, \lambda_n$, 使得 σ_i 收敛至一包含原点的闭球 B_i 内. 收敛过程振荡衰减, 且闭球半径满足

$$r(B_i) < \frac{L^{(n-i+1)p/q}}{\Lambda_i} + \Xi_i \triangleq r(B_i)_1 + r(B_i)_2.$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= (\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2})^{(n-i+1)p/q} \times (\lambda_{n-1,1} + \lambda_{n-1,2})^{n-i+1} \times \dots \times (\lambda_{i,1} + \lambda_{i,2})^{(n-i+1)/(n-i)}, \\ \Xi_i &= (\lambda_{i-1,1} + \lambda_{i-1,2}) \times (\lambda_{i-2,1} + \lambda_{i-2,2})^{(n-i+1)/(n-i+2)} \times \dots \times (2(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}))^{(n-i+1)/n} \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}. \end{aligned}$$

推论 2 的证明与定理 1 类似, 此略.

定理 2 对于 n 阶标准滑模微分器误差系统

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\lambda_0|\sigma_0 - \xi(t)|^{n/(n+1)} \text{sgn}(\sigma_0 - \xi(t)) + \sigma_1; \\ \dot{\sigma}_i = -\lambda_i|\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \times \text{sgn}(\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}) + \sigma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{\sigma}_n = -\lambda_n|\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}|^{q/p} \times \text{sgn}(\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}) - f_0^{(n+1)}(t). \end{cases} \quad (4)$$

其中干扰 $\xi(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon > 0$ 是噪声的上界, 对于任意给定有限初始状态 $\sigma_i(0), i = 0, 1, \dots, n$, 任意具有 $n + 1$ 阶微分的函数 $f_0(t)$, 总存在一组足够大的正数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, 若满足 $f_0^{(n+1)}(t) \neq 0$, 且 $f_0^{(n)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 $L > 0$, 则存在一有限时刻 T , 使得 $t > T$ 后 σ_i 收敛至一包含原点的闭球 B_i 内. 闭球半径满足 $r(B_i) <$

$$\frac{L^{p(n-i+1)/q}}{\lambda_n^{p(n-i+1)/q} \lambda_{n-1}^{n-i+1}} \times \dots \times \frac{1}{\lambda_i^{(n-i+1)/(n-i)}} + \lambda_{i-1} \times \lambda_{i-2}^{(n-i+1)/(n-i+2)} \dots \lambda_0^{(n-i+1)/n} \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}; \quad (5)$$

$$r(B_1) = \lambda_0(r(B_0) + \varepsilon)^{n/(n+1)},$$

$$r(B_{i+1}) = \lambda_i r(B_i)^{(n-i)/(n-i+1)}, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6)$$

收敛过程振荡衰减.

定理 2 的证明可参照定理 1, 此略.

定理 3 $\lambda_{n_1,2,i}, \lambda_{n_2,2,i}$ 分别代表 n_1 阶滑模微分器和 n_2 阶滑模微分器的非线性项设计参数, $0 \leq i \leq n_2 < n_1$. 对于相同的干扰 $\xi(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon > 0$ 是噪声绝对值的上界, 任意给定有限初始状态 $\sigma_i(0)$, 任意具有 $n_1 + 1$ 阶微分的时变函数 $f_0(t)$, 若满足 $f_0^{(n_1+1)}(t) \neq 0$, 且 $f_0^{(n_1)}(t)$ 的 Lipschitz 常数具有上界 $L > 0$, 取适当设计参数, 且在定理 1 结论下, 满足

$$L < (L_1 \times L_2)^{q/(p(n_1-n_2))}, \quad (7)$$

$$(\lambda_{n_1,1,i-1} + \lambda_{n_1,2,i-1}) \dots (\lambda_{n_1,1,0} + \lambda_{n_1,2,1}) <$$

$$(\lambda_{n_2,1,i-1} + \lambda_{n_2,2,i-1}) \dots (\lambda_{n_2,1,0} + \lambda_{n_2,2,1}). \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{(\lambda_{n_1,1,n_1} + \lambda_{n_1,2,n_1})^{p(n_1-i+1)/q}}{(\lambda_{n_2,1,n_2} + \lambda_{n_2,2,n_2})^{p(n_2-i+1)/q}} \times \frac{(\lambda_{n_1,1,n_1-1} + \lambda_{n_1,2,n_1-1})^{n_1+1}}{(\lambda_{n_2,1,n_2-1} + \lambda_{n_2,2,n_2-1})^{n_2+1}} \times \dots \times \frac{(\lambda_{n_1,1,i} + \lambda_{n_1,2,i})^{(n_1+1)/(n_1-i)}}{(\lambda_{n_2,1,i} + \lambda_{n_2,2,i})^{(n_2+1)/(n_2-i)}}, \\ L_2 &= \frac{(\lambda_{n_1,1,i-1} + \lambda_{n_1,2,i-1})^{i/(n_1-i+1)}}{(\lambda_{n_2,1,i-1} + \lambda_{n_2,2,i-1})^{i/(n_2-i+1)}} \times \frac{(\lambda_{n_1,1,i-2} + \lambda_{n_1,2,i-2})^{(i-1)/(n_1-i+2)}}{(\lambda_{n_2,1,i-2} + \lambda_{n_2,2,i-2})^{(i-1)/(n_2-i+2)}} \times \dots \times \frac{(\lambda_{n_1,1,0} + \lambda_{n_1,2,0})^{1/n_1}}{(\lambda_{n_2,1,0} + \lambda_{n_2,2,0})^{1/n_2}}; \end{aligned}$$

或在推论 2 结论下, 满足

$$L < \left(\frac{\lambda_{n_1,2,n_1}^{p(n_1-i+1)/q} \lambda_{n_1,2,n_1-1}^{n_1-i+1}}{\lambda_{n_2,2,n_2}^{p(n_2-i+1)/q} \lambda_{n_2,2,n_2-1}^{n_2-i+1}} \times \dots \times \frac{\lambda_{n_1,2,i}^{(n_1-i+1)/(n_1-i)}}{\lambda_{n_2,2,i}^{(n_2-i+1)/(n_2-i)}} \right)^{q/(p(n_1-n_2))}, \quad (9)$$

$$\varepsilon < \left(\frac{2^{(n_2-i+1)/n_2} \lambda_{n_2,2,i-1}^{(n_2-i+1)/(n_2-i+1)}}{2^{(n_1-i+1)/n_1} \lambda_{n_1,2,i-1}^{(n_1-i+1)/(n_1-i+1)}} \times \frac{\lambda_{n_2,2,i-2}^{(n_2-i+1)/(n_2-i+2)} \dots \lambda_{n_2,2,i-j}^{(n_2-i+1)/(n_2-i+j)}}{\lambda_{n_1,2,i-2}^{(n_1-i+1)/(n_1-i+2)} \dots \lambda_{n_1,2,i-j}^{(n_1-i+1)/(n_1-i+j)}} \times \dots \frac{\lambda_{n_2,2,0}^{(n_2-i+1)/n_2}}{\lambda_{n_1,2,0}^{(n_1-i+1)/n_1}} \right)^{((n_1+1)(n_2+1))/((n_1-n_2)i)}, \quad (10)$$

则存在有限时刻 T , 使得 $t > T$ 后 $\sigma_{n_1,i}$ 和 $\sigma_{n_2,i}$ 收敛至一包含原点的闭球 $B_{n_1,i}$ 和 $B_{n_2,i}$ 内, 且有 $r(B_{n_1,i}) < r(B_{n_2,i})$.

结合推论 2 和定理 2, 定理 3 的证明较简单, 此略.

注 3 定理 3 的条件均较弱, 容易选择参数使其得到满足. 即使采用滤波器进行预处理, 由于滤波作用并不能彻底消除噪声的影响, 定理 3 的结论对滤波后的残存干扰仍具有一定的抑制作用.

4 快速高阶滑模微分器与标准高阶滑模微分器对比分析

4.1 误差分析及一般设计方法

1) 对于快速高阶滑模微分器, 可通过增大设计参数和适当增加阶次 n 两种方法减小滑模微分器误差 $r(B_i)$.

2) 实际上, $r(B_i)$ 中还存在由于滑模微分器跟踪速度滞后于 $f_0^{(i)}(t)$ 变化而引起的 $r(B_i)_3$. 只有当微分器收敛速度无穷大时, $r(B_i)_3$ 才为 0, 其值难以定量给出, 但与微分器收敛速度成反比.

3) 减小 $r(B_i)_1$ 和减小 $r(B_i)_3$ 是一致的, 都可以通过增大 $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}$ 来实现.

4) 减小 $r(B_i)_2$ 与减小 $r(B_i)_3$ 矛盾. 减小 $r(B_i)_2$ 必然要求减小 $\lambda_{i-1,1}, \lambda_{i-1,2}, \dots, \lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}$, 这会降低滑模收敛速度, 从而增大 $r(B_i)_3$. 因此, 当 $f_0(t)$ 是快变函数时, 若设计 $\Xi_i = 2(\lambda_{i-2,1} + \lambda_{i-2,2}) \dots (\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}) \ll 1$, 则虽然能显著减小 $r(B_i)_2$, 但同时显著增加了 $r(B_i)_3$, 使得总体的 $r(B_i)$ 增大了, 所以 $\lambda_{i-1} \lambda_{i-2} \dots \lambda_0$ 的设计需同时兼顾 $r(B_i)_2$ 和 $r(B_i)_3$. 考虑到许多系统对抖振非常敏感, 可优先减小 $r(B_i)_2$.

5) 若适当增加滑模微分器阶次 n , 则 $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}$ 可设计的参数会增多, 不仅能进一步减小 $r(B_i)_1$, 而且能避免单个滑模面设计参数过大而引起抖振, 使得滑模微分器更加适于工程应用.

6) n 增大, 会使得各滑模面间的耦合更加复杂, 从而会使得进入并停留在 $r(B_i)$ 之前的振荡阶段的时间增加.

4.2 收敛速度分析

$|\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}| \gg 1$ 时, 有

$$|\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}| \gg |\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|^{(n-i)(n-i+1)},$$

$|\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|$ 起主导滑模收敛的作用; 而当 $|\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}| \ll 1$ 时, $|\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \text{sgn}(\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1})$ 项具有主导滑模收敛的作用. 因此, 相对于标准高阶滑模微分器, 快速微分器加快了 $|\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}| \gg 1$ 这一段的收敛速度. 这不仅在 $f_0(t)$ 及其各阶导数是快变函数时可以加快初始阶段收敛速度, 而且对于抵消定理 3 中由于增加阶次 n 而增加的收敛阶段时间也有很好的效果.

5 仿真

相对于文献 [1] 和文献 [6] 仿真中所取的较为缓慢的信号 $f_0(t) = \sin(0.5t)$, 为在更极端条件下检验所提出改进微分器的性能, 这里取 $f_0(t) = \sin(20t)$. 该信号变化迅速, 既可以检验微分器跟踪速度, 又可以检验本文方法对 $f_0^{(n+1)}(t)$ 的克服作用. $f_0(t)$ 加上噪声干扰时, $\xi(t)$ 取频率为 0.001 s 的白噪声, 且 $|\xi(t)| < 0.01$. 仿真步长均取 0.001 s.

作为对比, 跟踪微分器采用文献 [2] 中第 1 种类型, 设计参数取 $R = 5\,000, a_1 = a_2 = 30, \alpha = 0.5$. 一阶快速滑模微分器设计参数取 $\lambda_{0,1} = \lambda_{0,2} = 40, \lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} = 100$. 二阶快速滑模微分器设计参数取 $\lambda_{0,1} = \lambda_{0,2} = 40, \lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} = 100, \lambda_{2,1} = \lambda_{2,2} = 120$. 一阶标准滑模微分器和二阶标准滑模微分器的设计参数 λ_i 与快速滑模微分器的参数 $\lambda_{i,2}$ 相同. 仿真中, 所有 $q = 7, p = 9$.

在不同条件下仿真, 对 $(\sin(20t))'$ 的估计误差如图 1 和图 2 所示.

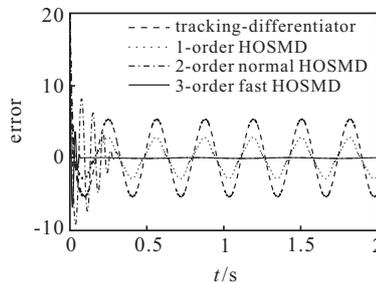


图 1 无噪声时误差比较

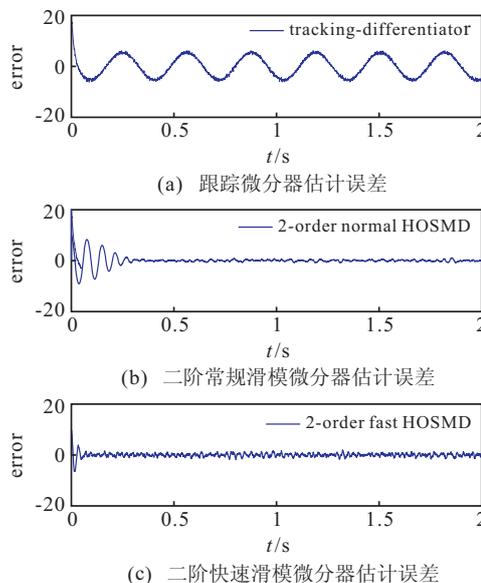


图 2 有噪声时误差比较图

由图 1 可以看出, 在无噪声时, 滑模微分器能得到 $(\sin(20t))'$ 的较高精度的估计值, 且一阶快速滑模微分器估计误差小于一阶标准滑模微分器估计误差, 二阶快速滑模微分器的估计误差小于一阶快速滑模

的估计误差. 由图2可以看出, 两种微分器对噪声均较为敏感, 但采用快速滑模微分器可以在保证整体误差不会过大的情况下, 能够在一定程度上抑制噪声.

6 结 论

在标准高阶滑模微分器每一个滑模面中增加快速收敛项, 可以加快收敛速度. 本文分别针对不同情况证明了快速高阶滑模微分器的稳定性, 并给出了估计误差具体表达式. 通过增加HOSMD阶次, 并减小与噪声相关设计参数的取值, 既能够抑制噪声, 又能够同时抑制整体估计误差. 比较了快速高阶滑模微分器与非快速高阶滑模微分器的收敛时间和误差, 总结了快速高阶滑模微分器的一般设计方法和结论, 并通过仿真结果表明了所得结论的正确性和有效性.

参考文献(References)

[1] Levant A. High-order sliding modes, differentiation and output-feedback control[J]. *Int J of Control*, 2003,

76(9/10): 924-941.

- [2] Levant A. Principles of 2-sliding mode design[J]. *Automatica*, 2007, 43: 576-586.
- [3] Levant A. Finite differences in homogeneous discontinuous control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(7): 1208-1217.
- [4] Yu S H, Guo G. Global fast terminal sliding mode control for robotic manipulators[J]. *Int J of Modeling, Identification and Control*, 2006, 1(1): 72-79.
- [5] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field[J]. *Systems and Control Letters*, 1992, 19: 467-473.
- [6] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪-微分器[J]. *系统科学与数学*, 1994, 14(2): 177-183.
(Han J Q, Wang W. Nonlinear tracking-differentiator[J]. *J of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1994, 14(2): 177-183.)

(上接第1414页)

[4] Girolami M. Mercer kernel based clustering in feature space[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(3): 780-784.

[5] Scholkopf B, Mika S, Burges C, et al. Input space versus feature space in kernel-based method[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1999, 10(5): 1000-1017.

[6] 伍忠东, 高新波, 谢维信. 基于核方法的模糊聚类算法[J]. *西安电子科技大学学报: 自然科学版*, 2004, 31(4): 533-537.
(Wu Z D, Gao X B, Xie W X. A study of a new fuzzy clustering algorithm based on the kernel method[J]. *J of Xidian University: Natural Science Edition*, 2004, 31(4): 533-537.)

[7] 徐泽水. 群组决策中专家赋权方法研究[J]. *应用数学与计算数学学报*, 2001, 15(1): 19-22.
(Xu Z S. Research on methods for deriving experts' weights in group decision making[J]. *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 2001, 15(1): 19-22.)

[8] 万俊, 邢焕革, 张晓晖. 基于熵理论的多属性群决策专家权重的调整算法[J]. *控制与决策*, 2010, 25(6): 907-910.
(Wan J, Xing H G, Zhang X H. Algorithm of adjusting weights of decision-makers in multi-attribute group decision-making based on entropy theory[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(6): 907-910.)

[9] 刘力, 周建中, 杨俊杰, 等. 基于信息熵的改进模糊综合评价方法[J]. *计算机工程*, 2009, 35(18): 4-6.

(Liu L, Zhou J Z, Yang J J, et al. Improved fuzzy comprehensive assessment method based on information entropy[J]. *Computer Engineering*, 2009, 35(18): 4-6.)

- [10] 周漩, 张凤鸣, 惠晓滨, 等. 基于信息熵的专家聚类赋权方法[J]. *控制与决策*, 2011, 26(1): 153-156.
(Zhou X, Zhang F M, Hui X B, et al. Method for determining experts' weights based on entropy and cluster analysis[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(1): 153-156.)
- [11] 范九伦, 裴继红, 谢维信. 模糊相关度与聚类有效性[J]. *西安电子科技大学学报*, 1998, 25(1): 13-16.
(Fan J L, Pei J H, Xie W X. Fuzzy relation degree and cluster validity[J]. *J of Xidian University*, 1998, 25(1): 13-16.)
- [12] 傅祖芸. 信息论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2007: 27-28.
(Fu Z Y. *Information theory*[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2007: 27-28.)
- [13] Li Y F, Liu Z G. Information entropy-based viewpoint planning for 3-D object reconstruction[J]. *IEEE Trans on Robotics*, 2005, 21(3): 324-337.
- [14] Ding S F, Shi Z Z. Studies on incidence pattern recognition based on information entropy[J]. *J of Information Science*, 2005, 31(6): 497-502.
- [15] Richard J, Hathaway, Bezdek J C. Switching regression models and fuzzy clustering[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1993, 1(3): 195-204.