

文章编号: 1001-0920(2012)09-1359-06

具有主观取值倾向的离散灰数预测模型及其应用

曾波^{1,2}, 刘思峰², 孟伟^{1,2}, 陈久梅¹

(1. 重庆工商大学 商务策划学院, 重庆 400067; 2. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘要: 针对灰色理论既有成果尚无法对具有主观取值倾向的离散灰数序列建立预测模型的问题, 通过构建标准离散灰数“核”序列、“灰单元格”面积序列以及元素“取值可能性”序列的灰色预测模型群, 实现离散灰数及其元素取值可能性大小的预测, 从而建立具有主观取值倾向的离散灰数预测模型. 将所提出的模型应用于空气监测点空气污染指数(API)的模拟及预测, 取得了较好的效果, 对拓展灰色预测模型的应用范围具有积极意义.

关键词: 灰色系统理论; 离散灰数预测模型; 主观取值倾向; 空气监测点; 空气污染指数预测

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Prediction model of discrete grey number with subjective valued orientation and its application

ZENG Bo^{1,2}, LIU Si-feng², MENG Wei^{1,2}, CHEN Jiu-mei¹

(1. College of Business Planning, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. College of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: ZENG Bo, E-mail: zbljh2@163.com)

Abstract: The existing achievements of grey theory still cannot build a prediction model of discrete grey number with subjective valued orientation. Therefore, a group of grey forecasting model is built based on the sequences of “core”, “area of grey cell grid” and “possible values” of standard discrete grey numbers, which realizes the prediction of discrete grey numbers and their possible values, and then the prediction model of discrete grey number with subjective valued orientation is built. The model is employed to simulate and forecast the API (air pollution index) of air monitoring point, and a fine result is obtained, which has a vital significance for extending the applied scope of grey prediction model.

Key words: grey system theory; prediction model of discrete grey number; subjective valued orientation; air monitoring point; prediction of API

1 引言

以GM(1,1)为核心的灰色预测模型是灰色系统理论的重要组成部分, 经过20多年的发展, 已经在工业、农业、社会、科技、能源、交通等众多领域得到广泛应用, 成功地解决了生产、生活和科学研究中的大量实际问题^[1]. 与此同时, 科研工作者也从不同角度对灰色预测模型不断地进行了优化和拓展^[2-10], 促进了灰色预测理论的日趋完善. 然而, 由于灰代数运算体系尚不够完善, 灰数间的数学运算将导致结果灰度增加, 从而增大了构建基于灰数序列的灰色预测模型的难度. 目前, 灰色预测模型的建模对象还主要面

向“实数”序列而非“灰数”序列, 这有违灰色系统的理论内涵. 因此, 深入研究基于“灰数”序列的灰色预测模型具有重要的理论意义和实际应用价值.

目前, 基于区间灰数序列及离散灰数序列的灰色预测模型, 已涌现出一些探索性的研究成果. 文献[11]通过区间灰数的标准化处理, 构建了区间灰数的GMBIGN(1,1)模型; [12-15]分别从“区间灰数的几何特征”及“灰数的核和灰度”的角度, 对区间灰数预测模型及白化权函数已知的灰数预测模型进行了一些探索性的研究; [15]对离散灰数预测模型的构建进行了研究, 所提出的模型对离散灰数中每个元素考虑

收稿日期: 2011-03-07; 修回日期: 2011-07-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271226, 70972143, 71101159); 重庆市自然科学基金项目(cstc2012jjA1211, CSTC2010BB2262); 教育部人文社会科学基金项目(11YJC630273, 11YJC630032, 12YJC630140.); 重庆市教委人文社会科学研究重点项目(11SKH03); 重庆市教委科学技术研究项目(KJ120706).

作者简介: 曾波(1975—), 男, 副教授, 博士, 从事灰色系统建模理论、方法及应用的研究; 刘思峰(1955—)男, 教授, 博士生导师, 从事灰色理论、数量经济学等研究.

的是等可能地取值. 然而, 通常情况下离散灰数中每个元素的取值可能性并不均等, 如何构建具有主观取值倾向(文中用“取值可能性”来度量)的离散灰数预测模型是本文研究的核心内容.

本文首先将离散灰数标准化, 通过标准离散灰数的“核”序列以及“灰单元格”面积序列将离散灰数序列转换成等信息量的实数序列群; 然后分别构建这些序列的GM(1, 1)模型, 从而推导和构建离散灰数的预测模型. 通过构建标准离散灰数中元素“取值可能性”序列的灰色模型实现离散灰数中元素主观取值可能性大小的预测, 从而解决具有主观取值倾向的离散灰数预测模型的构建问题.

2 基本概念

定义 1 在某一区间内取有限个值或可数个值的灰数, 称为离散灰数^[16]; 将离散灰数中的元素按从小到大的顺序排列而得到的灰数称为标准离散灰数, 其数学表达形式为

$$\vec{\otimes}(t_i) \in \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}\},$$

其中 $x_{i,j+1} > x_{i,j}, j = 1, 2, \dots, n-1$; 由标准离散灰数所组成的序列称为标准离散灰数序列, 记作

$$X(\vec{\otimes}) = (\vec{\otimes}(t_1), \vec{\otimes}(t_2), \dots, \vec{\otimes}(t_m)).$$

定义 2 在标准离散灰数序列 $X(\vec{\otimes})$ 中, 由标准离散灰数 $\vec{\otimes}(t_i)$ 中元素 $x_{i,j}$ 的取值可能性大小 $w(x_{i,j})$ 所组成的序列称为 $X(\vec{\otimes})$ 的“取值可能性”序列, 记作

$$W(\vec{\otimes}) = (W(\vec{\otimes}_{t_1}), W(\vec{\otimes}_{t_2}), \dots, W(\vec{\otimes}_{t_m})),$$

其中

$$W(\vec{\otimes}_{t_i}) \in \{w(x_{i,1}), w(x_{i,2}), \dots, w(x_{i,n})\}.$$

定义 3 设 $\vec{\otimes}(t_i) \in \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}\}$, 称

$$\tilde{\otimes}(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}$$

为标准离散灰数 $\vec{\otimes}(t_i)$ 的核^[17].

定义 4 设 $X(\vec{\otimes}) = (\vec{\otimes}(t_1), \vec{\otimes}(t_2), \dots, \vec{\otimes}(t_m))$, 则由 $X(\vec{\otimes})$ 中每个灰元的“核”所构成的序列称为 $X(\vec{\otimes})$ 的“核”序列, 记作

$$X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}(t_1), \tilde{\otimes}(t_2), \dots, \tilde{\otimes}(t_m)).$$

定义 5 对标准离散灰数序列 $X(\vec{\otimes})$ 中的每个灰元在二维直角坐标平面上进行映射, 分别顺次连接相邻灰数对应各离散点(见图 1). 图 1 中: 相邻灰数对应离散点所连成的图形称为灰单元格; 由灰单元格从左至右组成的长条图形称为灰单元层; 由下至上, 灰单元层分别记作灰单元层 1, 灰单元层 2, \dots , 灰单元层 $n-1$; 灰单元层 $j (j = 1, 2, \dots, n-1)$ 中第 $i (i = 1, 2, \dots, m-1)$ 个灰单元格记作 $u_{i,j}$ (端点为 $x_{i,j}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j+1}, x_{i,j+1}$).

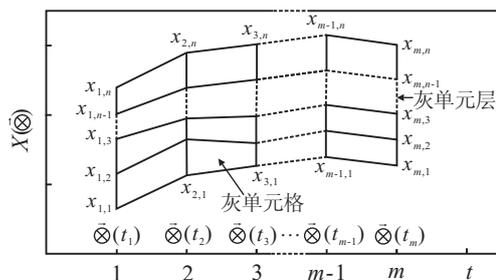


图 1 标准离散灰数序列的灰单元格及灰单元层

性质 1 标准离散灰数序列的核序列及灰单元格面积序列所含信息量之和与该标准离散灰数序列相等(信息等价性).

证明 根据定义 1, 当 $m = 4, n = 3$ 时, 有

$$X(\vec{\otimes}) = (\vec{\otimes}(t_1), \vec{\otimes}(t_2), \vec{\otimes}(t_3), \vec{\otimes}(t_4)).$$

其中

$$\vec{\otimes}(t_i) \in \{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}, x_{i,1} < x_{i,2} < x_{i,3}.$$

$X(\vec{\otimes})$ 的核序列为

$$X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}(t_1), \tilde{\otimes}(t_2), \tilde{\otimes}(t_3), \tilde{\otimes}(t_4)).$$

其中

$$\tilde{\otimes}(t_1) = \frac{1}{3}(x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3}),$$

$$\tilde{\otimes}(t_2) = \frac{1}{3}(x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3}),$$

$$\tilde{\otimes}(t_3) = \frac{1}{3}(x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3}),$$

$$\tilde{\otimes}(t_4) = \frac{1}{3}(x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3}).$$

由图 1 可知, 灰单元层的面积序列分别为

$$S_1 = (s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,1}), S_2 = (s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,2}).$$

其中

$$s_{1,1} = \frac{(x_{1,2} - x_{1,1}) + (x_{2,2} - x_{2,1})}{2},$$

$$s_{2,1} = \frac{(x_{2,2} - x_{2,1}) + (x_{3,2} - x_{3,1})}{2},$$

$$s_{3,1} = \frac{(x_{3,2} - x_{3,1}) + (x_{4,2} - x_{4,1})}{2},$$

$$s_{1,2} = \frac{(x_{1,3} - x_{1,2}) + (x_{2,3} - x_{2,2})}{2},$$

$$s_{2,2} = \frac{(x_{2,3} - x_{2,2}) + (x_{3,3} - x_{3,2})}{2},$$

$$s_{3,2} = \frac{(x_{3,3} - x_{3,2}) + (x_{4,3} - x_{4,2})}{2}.$$

联立上述方程, 可解出

$$X = BA.$$

其中

$$X = [x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, x_{4,1}, x_{4,2}, x_{4,3}]^T,$$

$$A = [\tilde{\otimes}(t_2), \tilde{\otimes}(t_3), \tilde{\otimes}(t_4), s_{1,1}, s_{1,2},$$

$$s_{2,1}, s_{2,2}, s_{3,1}, s_{3,2}, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4/3 & -2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 4/3 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -4/3 & -2/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -4/3 & 2/3 & 4/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

从证明过程可以发现, 标准离散灰数序列中的元素可以通过核序列和面积序列计算得到. 将其推广, 不难得出如下转换关系:

$$X(\vec{\otimes}) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\vec{\otimes}) = (\vec{\otimes}(t_1), \vec{\otimes}(t_2), \vec{\otimes}(t_3), \dots, \vec{\otimes}(t_m)), \\ S_1 = (s_{1,1}, s_{2,1}, \dots, s_{m-1,1}), \\ S_2 = (s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{m-1,2}), \\ \vdots \\ S_{n-1} = (s_{1,n-1}, s_{2,n-1}, \dots, s_{m-1,n-1}). \end{cases}$$

其中: $m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$. 从而序列转换前后的“信息等价性”得以证明. \square

注1 $\vec{\otimes}(t_1) \in \{x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}\}$ 中的元素视为建模的初始值, 为已知条件.

3 模型构建

3.1 核序列灰色预测模型构建

根据定义4, 标准离散灰数序列 $X(\vec{\otimes})$ 的核序列为

$$X(\vec{\otimes}) = (\vec{\otimes}(t_1), \vec{\otimes}(t_2), \dots, \vec{\otimes}(t_m)).$$

构建 $X(\vec{\otimes})$ 的 GM(1, 1) 模型, 其时间响应序列为

$$\hat{\otimes}^{(1)}(t_{k+1}) = \left(\vec{\otimes}(t_1) - \frac{b_0}{a_0} \right) e^{-a_0 k} + \frac{b_0}{a_0}, \quad (1)$$

其还原值为

$$\hat{\otimes}(t_{k+1}) = (1 - e^{a_0}) \left(\vec{\otimes}(t_1) - \frac{b_0}{a_0} \right) e^{-a_0 k} \Rightarrow$$

$$\hat{\otimes}(t_{k+1}) = C_0 \times e^{-a_0 k}. \quad (2)$$

其中

$$C_0 = (1 - e^{a_0}) \left(\vec{\otimes}(t_1) - \frac{b_0}{a_0} \right) = \text{Const.}$$

由定义3可知

$$\begin{aligned} \hat{\otimes}(t_k) &= \\ \frac{\hat{x}_{k,1} + \hat{x}_{k,2} + \dots + \hat{x}_{k,n}}{n} &= C_0 \times e^{-a_0(k-1)} \Rightarrow \\ \hat{x}_{k,1} + \hat{x}_{k,2} + \dots + \hat{x}_{k,n} &= n \times C_0 \times e^{-a_0(k-1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

3.2 灰单元格面积序列灰色预测模型构建

由图1可知, 灰单元格 $u_{i,j}$ 为梯形, 其面积记作 $s_{i,j}$. 由梯形的面积公式可得

$$s_{i,j} = \frac{(x_{i,j+1} - x_{i,j}) + (x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})}{2}. \quad (4)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, m-1; j = 1, 2, \dots, n-1$. 则灰单元层 j 中所有灰单元格的面积构成序列

$$S_j = (s_{1,j}, s_{2,j}, \dots, s_{m-1,j}).$$

对序列 S_j 建立 GM(1, 1) 模型, 其还原值为

$$\hat{s}_{k,j} = (1 - e^{a_j}) \left(s_{1,j} - \frac{b_j}{a_j} \right) e^{-a_j(k-1)} \Rightarrow$$

$$\hat{s}_{k,j} = C_j \times e^{-a_j(k-1)}. \quad (5)$$

其中: a_j, b_j 为序列 S_j 的 GM(1, 1) 模型参数; 而

$$C_j = (1 - e^{a_j}) \left(s_{1,j} - \frac{b_j}{a_j} \right) e^{-a_j(k-1)} = \text{Const.}$$

根据式(4), 可推得

$$(\hat{x}_{k+1,j+1} - \hat{x}_{k+1,j}) = 2\hat{s}_{k,j} - (\hat{x}_{k,j+1} - \hat{x}_{k,j}).$$

当 $k = p-1$ 时, 有

$$(\hat{x}_{p,j+1} - \hat{x}_{p,j}) =$$

$$2\hat{s}_{p-1,j} - (x_{p-1,j+1} - x_{p-1,j}) \Rightarrow$$

$$(\hat{x}_{p,j+1} - \hat{x}_{p,j}) =$$

$$2\hat{s}_{p-1,j} - 2\hat{s}_{p-2,j} + \dots + (-1)^p(x_{2,j+1} - x_{2,j}). \quad (6)$$

由式(5)可知, 式(6)的前 $(p-2)$ 项是以 $q = -e^{a_j}$ 为公比的等比数列. 由等比数列的求和公式可得

$$(\hat{x}_{p,j+1} - \hat{x}_{p,j}) =$$

$$\frac{2C_j \times e^{-a_j(p-2)} [1 - (-e^{a_j})^{p-2}]}{1 + e^{a_j}} +$$

$$(-1)^p(x_{2,j+1} - x_{2,j}) = A_j. \quad (7)$$

当 $j = n-1$ 时, 有

$$\hat{x}_{p,n} - \hat{x}_{p,n-1} =$$

$$\frac{2C_{n-1} e^{-a_{n-1}(p-2)} [1 - (-e^{a_{n-1}})^{p-2}]}{1 + e^{a_{n-1}}} +$$

$$(-1)^p(x_{2,n} - x_{2,n-1}) = A_{n-1}. \quad (8)$$

3.3 取值可能性序列灰色预测模型构建

根据定义2, $X(\vec{\otimes})$ 的“取值可能性”序列为

$$W(\vec{\otimes}) = (W(\vec{\otimes}_{t_1}), W(\vec{\otimes}_{t_2}), \dots, W(\vec{\otimes}_{t_m})).$$

其中: $W(\vec{\otimes}_{t_i}) \in \{w(x_{i,1}), w(x_{i,2}), \dots, w(x_{i,n})\}; W(\vec{\otimes}_{t_i})$ 中对应位置的元素构成序列群

$$W(X_{i,j}) \in \{w(x_{i,1}), w(x_{i,2}), \dots, w(x_{i,j})\},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

构建 $W(X_{i,j})$ 的 GM(1,1) 模型, 其还原值为

$$\hat{w}(x_{k+1,j}) = (1 - e^{a_{wj}}) \left(\hat{w}(x_{1,j}) - \frac{b_{wj}}{a_{wj}} \right) e^{-a_{wj}k} \Rightarrow$$

$$\hat{w}(x_{k+1,j}) = C_{wj} \times e^{-a_{wj}k}.$$

其中: a_{wj}, b_{wj} 为序列 $W(X_{i,j})$ 的 GM(1,1) 模型参数;

$$C_{wj} = (1 - e^{a_{wj}}) \left(\hat{w}(x_{1,j}) - \frac{b_{wj}}{a_{wj}} \right).$$

当 $k = p - 1$ 时, 有

$$\hat{w}(x_{p,j}) = C_{wj} \times e^{-a_{wj}^{(p-1)}}. \quad (9)$$

3.4 模型推导

根据式 (3), 当 $k = p$ 时, 有

$$\hat{x}_{p,1} + \hat{x}_{p,2} + \dots + \hat{x}_{p,n} = n \times C_0 \times e^{-a_0(p-1)} = A_0. \quad (10)$$

综合式 (8) 和 (10), 可得到如下方程组:

$$\begin{cases} \hat{x}_{p,1} + \hat{x}_{p,2} + \dots + \hat{x}_{p,n} = A_0, \\ -\hat{x}_{p,1} + \hat{x}_{p,2} = A_1, \\ -\hat{x}_{p,2} + \hat{x}_{p,3} = A_2, \\ \vdots \\ -\hat{x}_{p,n-1} + \hat{x}_{p,n} = A_{n-1}. \end{cases} \quad (11)$$

设矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p,1} \\ \hat{x}_{p,2} \\ \vdots \\ \hat{x}_{p,n} \end{bmatrix},$$

则方程组 (11) 可以表达为 $B\hat{X} = Y$. 解 X 得

$$\hat{X} = (B^T B)^{-1} B^T Y. \quad (12)$$

根据式 (12), 可实现离散灰数各个元素的预测 (从离散灰数预测模型的推导过程不难发现, 离散灰数序列及其转换后实数序列群具有相同的信息量). 又根据式 (9), 可实现标准离散灰数 $\tilde{\otimes}(t_p)$ 中第 j ($j = 1, 2, \dots, n$) 个位置元素取值可能性的预测.

综合式 (11) 和 (12), 可得

$$\begin{cases} \hat{X} = (B^T B)^{-1} B^T Y, \\ \hat{w}(x_{p,j}) = C_{wj} e^{-a_{wj}^{(p-1)}}. \end{cases} \quad (13)$$

称式 (13) 为具有主观取值倾向的离散灰数预测模型. 该组合模型的预测对象属于不同类型, 因此预测结果不存在通常所说的“误差累计”问题.

4 应用举例

某环保站定期派 3 位工作人员对某监测点进行空气取样, 然后据此分别计算空气污染指数 (API). 由

于取样时间、技术水平、误差处理等原因, 3 位工作人员测算出的相同位置的 API 并不相同. 环保工程师参考历史数据并结合实际情况, 认为 3 位工作人员测得的 API 作为“真值”具有不同的可能性, 有的大一些, 有的小一些. 由于空气监测点多而环保站人力有限, 只能采取轮流对监测点进行取样的方式计算该区域的 API, 而对没有取样的监测点只能通过“均值”等方式粗略地模拟该监测点的 API. 工作人员测得的 API 值构成该点 API 值的离散灰数, 不同的 API 值具有作为“真值”的不同可能性, 而可能性的大小, 没有一套严密的固定程式进行推演和计算, 主要凭经验通过主观判断进行.

现利用本文介绍的方法建立 API 的预测模型, 并对预测结果作为“真值”的可能性进行预测. 表 1 是工作人员测得的某点的 API 及其相应的取值可能性.

表 1 某监测点的 API 值及其相应的取值可能性

次数	类别	工作人员 1	工作人员 2	工作人员 3
第 1 次	API	53	58	50
	可能性 / %	60	70	50
第 2 次	API	57	53	55
	可能性 / %	80	60	80
第 3 次	API	55	52	60
	可能性 / %	80	70	70
第 4 次	API	51	56	54
	可能性 / %	70	80	70
第 5 次	API	56	61	57
	可能性 / %	80	70	70

根据表 1, 可得 3 位工作人员 5 次测得某监测点 API 值的标准离散灰数序列

$$X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}(t_1), \tilde{\otimes}(t_2), \tilde{\otimes}(t_3), \tilde{\otimes}(t_4), \tilde{\otimes}(t_5)) =$$

$$\{\{50, 53, 58\}, \{53, 55, 57\}, \{52, 55, 60\},$$

$$\{51, 54, 56\}, \{53, 57, 61\}\},$$

对应“真值”可能性序列 (为计算方便, 省略百分号)

$$W(\tilde{\otimes}) = (W(\tilde{\otimes}_{t_1}), W(\tilde{\otimes}_{t_2}), \dots, W(\tilde{\otimes}_{t_5})) =$$

$$\{\{50, 60, 70\}, \{60, 80, 80\}, \{70, 80, 70\},$$

$$\{70, 70, 80\}, \{80, 70, 70\}\}.$$

现构建 $X(\tilde{\otimes})$ 具有主观取值倾向的离散灰数预测模型, 步骤如下:

Step 1 构建核序列与面积序列的灰色模型.

采用灰色建模软件 V5.0^[18] 能比较方便地计算如下 GM(1,1) 模型参数:

1) 核序列 $X(\tilde{\otimes})$ 及其 GM(1,1) 模型

$$X(\tilde{\otimes}) = (53.7, 55.0, 55.7, 53.7, 57.0),$$

$$\hat{x}_{p,1} + \hat{x}_{p,2} + \hat{x}_{p,3} =$$

$$3 \times 54.3476 \times e^{0.0073} \times (p - 1) = A_0.$$

2) 面积序列 → 灰单元层 S_1 及其 GM(1, 1) 模型

$$S_1 = (2.5, 2.5, 3.0, 3.5),$$

$$\hat{x}_{p,2} - \hat{x}_{p,1} =$$

$$\frac{2.1255 \times e^{0.1663 \times (p-2)} [1 - (-e^{-0.1663})^{p-2}]}{1 + e^{-0.1663}} +$$

$$(-1)^p \times 2 = A_1.$$

3) 面积序列 → 灰单元层 S_2 及其 GM(1, 1) 模型

$$S_2 = (3.5, 3.5, 3.5, 3.0),$$

$$\hat{x}_{p,3} - \hat{x}_{p,2} =$$

$$\frac{3.8502 \times e^{-0.0731 \times (p-2)} [1 - (-e^{0.0731})^{p-2}]}{1 + e^{0.0731}} +$$

$$(-1)^p \times 2 = A_2.$$

Step 2 构建取值可能性序列的灰色模型.

1) 取值可能性序列 W_1 及其 GM(1, 1) 模型

$$W_1 = (50, 60, 70, 70, 80),$$

$$\hat{w}(x_{p,1}) =$$

$$(1 - e^{-0.0856}) \left(\hat{w}(x_{1,1}) - \frac{54.3731}{-0.0856} \right) e^{0.0856(p-1)}.$$

2) 取值可能性序列 W_2 及其 GM(1, 1) 模型

$$W_2 = (60, 80, 80, 70, 70),$$

$$\hat{w}(x_{p,2}) =$$

$$(1 - e^{0.0533}) \left(\hat{w}(x_{1,2}) - \frac{86.4565}{0.0533} \right) e^{-0.0533(p-1)}.$$

3) 取值可能性序列 W_3 及其 GM(1, 1) 模型

$$W_3 = (70, 80, 80, 70, 70),$$

$$\hat{w}(x_{p,3}) =$$

$$(1 - e^{0.0533}) \left(\hat{w}(x_{1,3}) - \frac{86.9893}{0.0533} \right) e^{-0.0533(p-1)}.$$

Step 3 模拟.

根据 Step 1 和 Step 2 构建的模型及表 1 中的数据, 计算模型的模拟值和模拟误差, 如表 2 所示.

表 2 模型的模拟值及模拟误差

次数	类别	工作人员 1		工作人员 2		工作人员 3	
		模拟数据	模拟误差 /%	模拟数据	模拟误差 /%	模拟数据	模拟误差 /%
第2次	API	56.7	0.5	52.7	0.6	54.7	0.5
	可能性 /%	81	1.3	61	1.7	81	1.3
第3次	API	54.8	0.4	54.3	4.4	56.4	6.0
	可能性 /%	77	3.8	67	4.3	77	10.0
第4次	API	54.9	7.6	57.2	2.1	55.9	3.5
	可能性 /%	73	4.3	73	8.8	73	4.3
第5次	API	53.8	3.9	58.4	4.3	56.9	0.2
	可能性 /%	79	1.3	69	1.4	69	1.4
平均误差 /%	API		3.1		2.9		2.6
	可能性		2.7		4.1		4.3
综合误差 /%				3.3			

只有通过模拟检测的模型才能用于预测. 由表 2 可知, 模型的综合误差为 3.3%, 查 GM(1, 1) 模型精度检验等级参照表^[17], 可知模型的精度等级介于 I 级与 II 级之间, 完全可用于预测.

Step 4 预测.

当 $p = 2, 3, 4, 5$ 时, 通过模型的计算可得到模型的模拟值 (见表 2); 当 $p = 6, 7, 8, \dots$ 时, 通过模型的计算可得到模型的预测值. 这里仅以 $p = 6$ 为例计算模型的预测值, 其余情况与此类似.

当 $p = 6$ 时, 有

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 169.1 \\ 3.1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{6,1} \\ \hat{x}_{6,2} \\ \hat{x}_{6,3} \end{bmatrix}.$$

根据 $\hat{X} = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 可计算得到

$$\hat{x}_{6,1} = 53.8, \hat{x}_{6,2} = 56.9, \hat{x}_{6,3} = 58.4,$$

即 $\tilde{\otimes}(t_6) \in \{53.8, 56.9, 58.4\}$.

根据 Step 2, 可计算得到标准离散灰数中元素取

值可能性分别为

$$\hat{w}(\hat{x}_{6,1}) = 86.25\%, \hat{w}(\hat{x}_{6,2}) = 65.52\%,$$

$$\hat{w}(\hat{x}_{6,3}) = 66.51\%,$$

即 $W(\tilde{\otimes}_{t_6}) \in \{86, 66, 66\}$.

综上可知, 可以预测空气监测点的 API 分别为 53.8, 56.9, 58.4, 而且取这 3 个数值的可能性分别为 86.25%, 65.52%, 66.51%.

5 结 论

本文针对已有离散灰数预测模型, 仅对每个元素考虑等可能地取值这一缺陷, 构造了具有主观取值倾向的离散灰数预测模型. 通过标准化离散灰数的“核”序列及“灰单元格”面积序列的 GM(1, 1) 模型实现对离散灰数中元素的预测, 通过构建标准离散灰数中元素“取值可能性”序列的灰色模型实现离散灰数中元素取值可能性大小的预测. 最后将该模型应用于空气监测点 API 的模拟及预测, 并给出了详细的建模步骤. 本文的研究成果对丰富和完善灰色预测模

型的理论体系, 拓展灰色预测模型的适用范围具有一定的积极意义. 另一方面, 本文仅讨论了组成离散灰数序列的各个灰元中元素个数相等这一特殊情况, 如何有效地构建元素个数不相等条件下具有主观取值倾向的离散灰数预测模型是下一步深入研究的主要内容.

参考文献(References)

- [1] Liu Si-feng, Lin Yi. Grey systems theory and applications[M]. Springer: Berlin Heidelberg, 2011: 1-28.
- [2] Ren Hai-bo, Dang Yao-guo, Wang Zheng-xin. GM(1, 1) model of time sequence coefficient and application[C]. Proc of 2007 IEEE Int Conf on Grey Systems and Intelligent Services. Nanjing, 2007: 18-20.
- [3] Hsu Che-chiang, Chen Chia-yon. Applications of improved grey prediction model for power demand forecasting[J]. Energy Conversion and Management, 2003, 44(14): 2241-2249.
- [4] 曾波, 刘思峰, 方志耕, 等. 灰色组合预测模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2009, 17(5): 150-155.
(Zeng B, Liu S F, Fang Z G, et al. Grey combined forecast models and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(5): 150-155.)
- [5] Chen C K, Tien T L. A new forecasting method of discrete dynamic system[J]. Applied Mathematics and Computation, 1997, 86(1): 61-84.
- [6] Huang Kuang-yu, Jane Chuen-jiuan. A hybrid model for stock market forecasting and portfolio selection based on ARX, grey system and RS theories[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36: 5387-5392.
- [7] Deng Julong. Undulating grey model GM(1, 1| $\tan(k - \tau)p, \sin(k - \tau)p$)[J]. J of Grey System, 2001, 13(3): 201-204.
- [8] Jiang Xin, Wang Bingwen, Chen Fangxin. Based GM(1, 1| τ, r)-moving object segmentation[J]. J of Grey System, 2003, 15(2): 101-106.
- [9] Huang Wen-chih, Kuo Ming-shin, Lee Kuo-Linag, et al. Application of GM(1, 1| τ, r) to analyze the ports for putting in resources[J]. J of Grey System, 2004, 16(6): 211-220.
- [10] Yu Qiuze, Li Feng, Guan Daren. Digital watermarking via undulating grey model GM(1, 1| $\tan(k - \tau)p, \sin(k - \tau)p$)[J]. J of Grey System, 2002, 14(3): 217-222.
- [11] 方志耕, 刘思峰. 基于区间灰数序列的GM(1, 1)模型(GMBIGN(1, 1))研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(10): 130-134.
(Fang Z G, Liu S F. Study on GM(1, 1) model based on interval grey number (GMBIGN(1, 1))[J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(10): 130-134.)
- [12] 曾波, 刘思峰, 谢乃明, 等. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1588.
(Zeng B, Liu S F, Xie N M, et al. Prediction model for interval grey number based on grey[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1585-1588.)
- [13] Zeng B, Liu S F, Xie N M. Prediction model of interval grey number based on DGM (1, 1)[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(4): 598-603.
- [14] 曾波, 刘思峰, 崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1815-1820.
(Zeng B, Liu S F, Cui J. Prediction model for interval grey number with known whitenization weight function[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1815-1820.)
- [15] 曾波, 刘思峰, 孟伟. 基于核和面积的离散灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1421-1424.
(Zeng B, Liu S F, Meng W. Prediction model of discrete grey number based on kernels and areas[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1421-1424.)
- [16] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(2): 471-474.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the "Kernel" and the degree of greyness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(2): 471-474.)
- [17] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 3-4.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Gray system theories and its applications[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 3-4.)
- [18] 曾波, 刘思峰. 灰色系统建模软件 5.0[EB/OL]. (2010-05-10). <http://igss.nuaa.edu.cn/institute/>.
(Zeng B, Liu S F. Grey modeling software 5.0[EB/OL]. (2010-05-10). <http://igss.nuaa.edu.cn/institute/>.)