

文章编号: 1001-0920(2012)09-1370-06

基于拟线性化和 Haar 函数的最优控制问题的直接求解方法

韩振宇, 李树荣

(中国石油大学 信息与控制工程学院, 山东 青岛 266580)

摘要: 针对有约束条件的非线性最优控制问题, 提出一种基于拟线性化和 Haar 函数的数值求解方法. 首先将最优控制问题转化为一系列的二次规划问题, 并使用系数未知的 Haar 函数对问题中的状态变量进行近似; 然后应用拟线性化法将原非线性最优控制问题转化为相应的一系列受限的二次最优控制问题进行求解; 最后基于所提出的方法对 2 个受限非线性最优控制问题进行求解, 并通过仿真结果表明了采用所提出的算法求解最优控制问题的有效性.

关键词: 有理 Haar 函数; 最优控制; 二次规划; 不等式约束

中图分类号: TP301

文献标志码: A

Quasilinearization and rationalized Haar approach for direct solution of optimal control problems

HAN Zhen-yu, LI Shu-rong

(College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China.

Correspondent: LI Shu-rong, E-mail: lishuron@upc.edu.cn)

Abstract: This paper presents a numerical method based on quasilinearization and rationalized Haar functions for solving nonlinear constrained optimal control problems. The optimal control problem is converted into a sequence of quadratic programming problems. The rationalized Haar functions with unknown coefficients are used to approximate the control variables and the derivative of the state variables. Then the quasilinearization method is used to change the nonlinear optimal control problems with a sequence of constrained linear-quadratic optimal control problems. The simulation results of two constrained nonlinear optimal control problems show the effectiveness of the proposed method.

Key words: rationalized Haar functions; optimal control; quadratic programming; inequality constraints

1 引言

在以往求解最优控制问题的方法中, 直接法始终是一种被广泛应用的方法, 具有重要的应用和研究地位. 其中利用某些函数序列对原控制问题进行近似从而进行直接求解的方法在直接法中是经常使用的方法. 早在 1975 年, Chen 等^[1]便将沃尔什序列法 (Walsh series method) 引入最优控制问题的直接求解, 并得到了相应最优控制问题的分段常数解. 同样, 人们还引入了勒让德小波法^[2], 切比雪夫多项式法^[3]和傅立叶序列法^[4]对最优控制问题进行直接求解.

Haar 小波函数正交集由一组幅值为 $+2^{i/2}$, $-2^{i/2}$ 和 0 ($i = 1, 2, \dots$) 的方波组成^[5]. 正是由于正交集中含有 0, 用 Haar 小波对函数进行展开较其他方波函数 (如 Walsh 函数^[6]) 的展开速度更快、收敛性更好.

Lynch 等^[7]通过去除无理数等对 Haar 函数进行了改进, 降低了 Haar 函数在应用中的复杂度, 得到了有理 Haar 函数. 有理 Haar 函数由幅值为 $+1$, -1 和 0 的方波构成, 保留了原有 Haar 函数的所有性质, 从而可以被更有效地应用^[8]. 在通信和信号处理等领域, Haar 小波转换已经在很大程度上取代了傅立叶转换. 在近 20 年中, Haar 函数在系统和控制领域也开始得到应用^[9].

综上所述, 一般的正交函数序列虽然能够对控制系统进行近似求解, 但函数形式较为复杂, 而 Haar 函数仅由 $+1$, -1 和 0 共 3 个幅值构成, 结构简单, 易于应用. 因此, 本文基于 Haar 函数的便利特性提出一种求解包含状态和控制不等式限制的非线性最优控制问题的数值计算方法. 在求解中, 首先使用拟线性化

收稿日期: 2011-03-07; 修回日期: 2011-06-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974039); 中国科学院数学机械化重点实验室开放课题项目(F0905009A).

作者简介: 韩振宇(1984-), 男, 博士生, 从事最优控制和路径规划的研究; 李树荣(1966-), 男, 教授, 博士生导师, 从事最优控制和非线性规划的研究.

方法将原受限最优控制问题转化为一系列受限的线性二次最优控制问题; 然后选用有理 Haar 函数序列对状态变量进行参数化处理, 从而使受限的线性二次最优控制问题可以转化为相应的二次规划问题加以求解. 为验证和比较求解受限最优控制问题的效果, 对 2 个经典问题进行了研究, 结果表明所提出的方法是可行有效的, 而且所得到的性能指标低于现有方法.

2 Haar 函数回顾

2.1 Haar 函数

有理 Haar 函数 $H_r(t)$ ($r = 1, 2, \dots$) 由 $+1, -1$ 和 0 组成. 定义 $[0, 1)$ 间的函数序列^[10]

$$H_r(t) = \begin{cases} 1, & J_1 \leq t < J_{1/2}; \\ -1, & J_{1/2} \leq t < J_0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $J_u = \frac{j-u}{2^i}$, $u = 0, \frac{1}{2}, 1$.

参数 r 的取值由 i 和 j 确定, 即

$$r = 2^i + j - 1, \quad i = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, 2^i.$$

$H_0(t)$ 的定义如下:

$$H_0(t) = 1, \quad 0 \leq t < 1.$$

有理 Haar 函数的正交性如下:

$$\int_0^1 H_r(t)H_v(t)dt = \begin{cases} 2^{-i}, & r = v; \\ 0, & r \neq v. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $v = 2^n + m - 1; n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots, 2^n$.

2.2 函数近似展开

任意函数 $f(t)$ 在希尔伯特空间 $L^2[0, 1]$ 中, 可以由有理 Haar 函数进行如下近似展开:

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r H_r(t), \quad (3)$$

其中 w_r 定义如下:

$$w_r = 2^i \int_0^1 f(t)H_r(t)dt, \quad r = 0, 1, \dots.$$

其中: 参数 $r = 2^i + j - 1; i = 0, 1, \dots, 2^i$; 当 $i = j = 0$ 时, $r = 0$. 式 (3) 中所定义的级数包含无穷项, 如果令 $i = 0, 1, \dots, \alpha$, 则式 (3) 中的无穷项级数的前 s 项可以表示为

$$f(t) \simeq \sum_{r=0}^{s-1} w_r H_r(t) = W^T \phi(t). \quad (4)$$

其中: $s = 2^{\alpha+1}; \alpha = 0, 1, \dots$.

有理 Haar 函数的系数向量 W 和有理 Haar 函数向量 $\phi(t)$ 的定义如下:

$$W = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}]^T, \quad (5)$$

$$\phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{s-1}(t)]^T. \quad (6)$$

其中: $\phi_r(t) = H_r(t); r = 0, 1, \dots, s-1$.

如果将定义域划分为 4 个区间, 则有理 Haar 函数

各个级数的波形幅度可表示如下^[11]:

$$\hat{\phi}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中的列代表有理 Haar 函数的级数. 矩阵 $\hat{\phi}_{k \times k}$ 可表述成

$$\hat{\phi}_{s \times s} = \left[\phi\left(\frac{1}{2s}\right), \phi\left(\frac{3}{2s}\right), \dots, \phi\left(\frac{2s-1}{2s}\right) \right]. \quad (8)$$

由式 (4) 和 (7) 可得

$$\left[f\left(\frac{1}{2s}\right), f\left(\frac{3}{2s}\right), \dots, f\left(\frac{2s-1}{2s}\right) \right] = W^T \hat{\phi}_{s \times s},$$

其中

$$W^T = \left[f\left(\frac{1}{2s}\right), f\left(\frac{3}{2s}\right), \dots, f\left(\frac{2s-1}{2s}\right) \right] \hat{\phi}_{s \times s}^{-1}.$$

2.3 有理 Haar 函数的积分

对 $\phi(t)$ 进行积分计算, 可得

$$\int_0^t \phi(t')dt' \simeq P\phi(t). \quad (9)$$

其中 $P = P_{s \times s}$ 为 $s \times s$ 的积分运算矩阵, 可表述为^[12]

$$P_{s \times s} = \frac{1}{2s} \begin{bmatrix} 2sP_{\frac{s}{2} \times \frac{s}{2}} & -\hat{\phi}_{\frac{s}{2} \times \frac{s}{2}} \\ \hat{\phi}_{\frac{s}{2} \times \frac{s}{2}}^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

其中: $\hat{\phi}_{1 \times 1} = [1], P_{1 \times 1} = 1/2$.

3 最优控制问题描述

最优控制问题是寻找最优控制率 $u(\tau)$ 和相应的状态向量 $x(\tau), \tau \in [0, t_f]$, 使性能指标函数值最小. 本文考虑的最优控制问题如下:

$$\text{Minimize } J = \int_0^{t_f} (x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau)) d\tau. \quad (11)$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau), \tau), \quad \tau \in [0, t_f]; \quad (12)$$

$$x(0) = x_0; \quad (13)$$

$$\Psi(x(t_f), \tau) = 0; \quad (14)$$

$$u(\tau) \leq u_{\max}, \quad u(\tau) \geq u_{\min}; \quad (15)$$

$$x(\tau) \leq x_{\max}, \quad x(\tau) \geq x_{\min}. \quad (16)$$

其中: $x(\tau) \in R^n$ 为状态变量, $u(\tau) \in R^m$ 为控制变量, x_0 为初始状态, $Q_{n \times n}$ 为半正定矩阵, $R_{m \times m}$ 为正定矩阵, 向量函数 f 由一般的非线性函数组成并对 x 和 u 可微, t_f 为终端时间. 本文假设上述最优控制问题有唯一解.

4 拟线性化

在求解最优控制问题时, Bellman 等^[13]指出, 拟线性化方法可以将性能指标函数二阶展开, 并对系统中的微分方程进行线性化处理. 通过应用拟线性化方法, 问题 (11) ~ (16) 中的性能指标函数和约束条件 (系统状态方程、终端约束和不等式约束等) 便可以在相应的状态 $x^k(t)$ 和 $u^k(t)$ 上分别进行二阶和一阶

展开. 同时, 因为有理 Haar 函数定义在区间 $t \in [0, 1]$ 上, 所以可用式 $\tau = t_f t$ 对原最优控制问题的时间区间 $\tau \in [0, t_f]$ 进行转化. 这时, 最优控制问题 (11)~(16) 可转化为如下的线性二次最优控制问题:

Minimize $J^{k+1} =$

$$t_f \int_0^1 (x^{k+1T} Q x^{k+1} + u^{k+1T} R u^{k+1}) dt. \quad (17)$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{t_f} \frac{dx^{k+1}}{dt} = A^k(t)x^{k+1} + B^k(t)u^{k+1} + h^k(t); \quad (18)$$

$$x^{k+1}(0) = x_0; \quad (19)$$

$$\Psi_x(x^k(1, 1))(x^{k+1} - x^k(1)) + \Psi(x^k(1), 1) = 0; \quad (20)$$

$$u^{k+1}(t) \leq u_{\max}, \quad u^{k+1}(t) \geq u_{\min}; \quad (21)$$

$$x^{k+1}(t) \leq x_{\max}, \quad x^{k+1}(t) \geq x_{\min}. \quad (22)$$

其中

$$h^k(t) = f(x^k, u^k, \tau) - A^k(\tau)x^k - B^k(\tau)u^k, \quad (23)$$

$$A^k(t) = \partial f(x, u, \tau) / \partial x|_{x^k, u^k}, \quad (24)$$

$$B^k(t) = \partial f(x, u, \tau) / \partial u|_{x^k, u^k}. \quad (25)$$

假设 $m = n$, 且 $B^k(k)$ 在时间区间 $[0, t_f]$ 中是可逆的. 为满足这样的假设, 当 $m < n$ 时, 增加 $(n-m) \times 1$ 维的虚拟控制 $z(\tau)$, 并对性能指标函数进行相应的调整. 此时, 矩阵 $B^k(\tau)$ 修改为 $B_{\text{new}}^k(t)$ ^[14], 即

$$B_{\text{new}}^k(\tau) = \begin{bmatrix} I_{(n-m) \times (n-m)} & \\ & B_{n \times m}^k \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

其中: $I_{(n-m) \times (n-m)}$ 为 $(n-m) \times (n-m)$ 的单位矩阵, $O_{m \times (n-m)}$ 为零矩阵. 修改后的控制向量为

$$u_{\text{new}}^{k+1}(\tau) = \begin{bmatrix} z(\tau) \\ u^{k+1}(\tau) \end{bmatrix},$$

同时, 性能指标函数转化为

$$\hat{J}^{k+1} = J^{k+1} + \int_0^{t_f} z^T l z d\tau.$$

其中: \hat{J}^{k+1} 为 J^{k+1} 的近似值, $J_z = \int_0^{t_f} z^T l z d\tau$, l 为只含有正数的对角矩阵. 为使虚拟控制逐步趋向零, l 中的数值在迭代计算初始时应尽量大, 为避免之后的迭代计算出现病态, 需对 l 中的数值进行适当的调整. L 的调整使 $J_z / J^{k+1} \times 100\% \leq 0.5\%$ 得到满足即可.

因为 Haar 函数具有较快的收敛性能^[6], 所以借助 Haar 函数对最优控制问题进行近似, 可以加快求解过程的收敛速度. 应用有理 Haar 函数对状态方程和控制进行如下近似:

$$\dot{x}^{k+1}(t) = \hat{\phi}^T(t)M, \quad (26)$$

$$\hat{\phi}(t) = I \otimes \phi(t), \quad (27)$$

$$M = [M_1^T, M_2^T, \dots, M_n^T]. \quad (28)$$

其中: I 为 $n \times n$ 维单位矩阵; $\phi(t)$ 为 $s \times 1$ 向量, $s = 2^{\alpha+1}$, $\alpha = 0, 1, \dots$; $\hat{\phi}$ 为 $ns \times n$ 维矩阵; M 为 $ns \times 1$ 维向量; \otimes 为克罗内克积; $\phi(t)$ 为有理 Haar 函数向量, 定义如下:

$$\phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{s-1}(t)]. \quad (29)$$

同时, 初始条件可转化为

$$x(0) = \hat{\phi}(t)d, \quad (30)$$

式中 d 为 $ns \times n$ 维向量, 即

$$d = [d_1^T, d_2^T, \dots, d_n^T]^T. \quad (31)$$

应用有理 Haar 函数的积分操作矩阵 P 计算 x^{k+1} , 有

$$x^{k+1}(t) - x(0) = \int_0^{t_f} \hat{\phi}^T(t') M dt' = \hat{\phi}^T \hat{P}^T M. \quad (32)$$

由式 (31) 和 (32) 得

$$x^{k+1}(t) = \hat{\phi}^T(t)(d + \hat{P}^T M). \quad (33)$$

根据式 (17) 和 (33), 控制变量 u^{k+1} 可表示为

$$u^{k+1} = (B^k)^{-1} \left[\frac{1}{t_f} \hat{\phi}^T M - A^k \hat{\phi}^T (d + \hat{P}^T M) - h^k \right]. \quad (34)$$

将式 (33) 和 (34) 代入 (17), 可得

$$\begin{aligned} J_N^{k+1} = & t_f \int_0^1 \left[(d + \hat{P}^T M)^T (I \otimes \phi) Q (I \otimes \phi^T) (d + \hat{P}^T M) + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{t_f} M^T (I_x \otimes \phi) - (d + \hat{P}^T M)^T (I \otimes \phi) (A^k)^T - \right. \right. \\ & \left. \left. (h^k)^T \right) F(t) \left(\frac{1}{t_f} (I \otimes \phi^T) M - A^k (I \otimes \phi^T) (d + \right. \right. \\ & \left. \left. \hat{P}^T M) - h^k \right) \right], \end{aligned}$$

其中 $F(t) = (((B^k)^{-1})^T R (B^k)^{-1})$.

上式可写为

$$\bar{J}_N^{k+1} = \frac{1}{2} M^T C_1 M + C_2^T M + C_3. \quad (35)$$

其中

$$C_1 =$$

$$t_f \int_0^1 \left[2\hat{P} (Q \otimes \phi \phi^T) \hat{P}^T + \frac{2}{t_f^2} (F(t) \otimes \phi \phi^T) - \right.$$

$$\frac{2}{t_f} (F(t) A^k(t) \otimes \phi \phi^T) \hat{P}^T -$$

$$\frac{2}{t_f} \hat{P} ((A^k(t))^T F(t) \otimes \phi \phi^T) +$$

$$\left. 2\hat{P} ((A^k(t))^T F(t) A^k(t) \otimes \phi \phi^T) \hat{P}^T \right] dt,$$

$$C_2 =$$

$$t_f \int_0^1 \left[2d^T (Q \otimes \phi \phi^T) \hat{P}^T - \frac{2}{t_f} ((h^k)^T F(t) \otimes \phi^T) - \right.$$

$$\left. \frac{2}{t_f} d^T ((A^k(t))^T F(t) \otimes \phi \phi^T) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & 2d^T((A^k(t))^T F(t)A^k(t) \otimes \phi\phi^T)\hat{P}^T + \\
 & 2((h^k)^T F(t)A^k(t) \otimes \phi^T)\hat{P}^T] dt, \\
 C_3 = & \\
 & t_f \int_0^1 [d^T(Q \otimes \phi\phi^T)d + (h^k)^T F(t)h^k + \\
 & d^T((A^k(t))^T F(t)A^k(t) \otimes \phi\phi^T)d + \\
 & d^T((A^k(t))^T F(t)h^k(t) \otimes \phi) + \\
 & ((h^k)^T F(t)A^k(t) \otimes \phi^T)d] dt.
 \end{aligned}$$

将式(33)代入(20), 终端约束可近似为

$$\begin{aligned}
 & \psi_x(x^k(1), 1)(I_x \otimes \phi^T)\hat{P}^T M = \\
 & -\psi_x(x^k(1), 1)((I_x \otimes \phi^T)d - x^k(1)) - \psi(x^k(1), 1).
 \end{aligned}$$

对于最优控制问题中不等式限制, 令其在时间点 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = 1$ 上处处满足要求即可. 将式(33)和(34)代入(21)和(22), 可得

$$\begin{aligned}
 & (B^k(t_i))^{-1} \left[\frac{1}{t_f} (I \otimes \phi^T(t_i)) - A^k(I \otimes \phi^T(t_i))\hat{P}^T \right] M \leq \\
 & (B^k(t_i))^{-1} [A^k(I \otimes \phi^T(t_i))d + h^k(t_i)] + U_{\max}, \\
 & - (B^k(t_i))^{-1} \left[\frac{1}{t_f} (I \otimes \phi^T(t_i)) - \right. \\
 & \left. A^k(I \otimes \phi^T(t_i))\hat{P}^T \right] M \leq \\
 & - (B^k(t_i))^{-1} [A^k(I \otimes \phi^T(t_i))d + h^k(t_i)] - U_{\min}, \\
 & (I \otimes \phi^T(t_i))\hat{P}^T M \leq - (I \otimes \phi^T(t_i))d + X_{\max}, \\
 & - (I \otimes \phi^T(t_i))\hat{P}^T M \leq (I \otimes \phi^T(t_i))d - X_{\min},
 \end{aligned}$$

其中 $0 \leq i \leq N + 1$. 从而原最优控制问题中每个无限维不等式约束便由 N 维不等式约束所取代.

通过以上重整, 最优控制问题(11) ~ (16)可近似为如下的二次规划问题:

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} M^T C_1 M + C_2 M + C_3; \quad (36)$$

$$\text{s.t. } F_1 M - b_1 = 0, \quad (37)$$

$$F_2 M - b_2 \leq 0. \quad (38)$$

其中

$$F_1 = \psi_x(x^k(1), 1)(I \otimes \phi^T)\hat{P}^T, \quad (39)$$

$$b_1 =$$

$$\begin{aligned}
 & -\psi_x(x^k(1), 1)((I \otimes \phi^T)d - x^k(1)) - \psi(x^k(1), 1); \\
 & \quad \quad \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$F_2 =$$

$$\begin{bmatrix}
 +(B^k(t))^{-1} \left[\frac{1}{t_f} (I \otimes \phi^T(t)) - A^k(I \otimes \phi^T(t))\hat{P}^T \right] \\
 -(B^k(t))^{-1} \left[\frac{1}{t_f} (I \otimes \phi^T(t)) - A^k(I \otimes \phi^T(t))\hat{P}^T \right] \\
 \quad \quad \quad + (I \otimes \phi^T(t))\hat{P}^T \\
 \quad \quad \quad - (I \otimes \phi^T(t))\hat{P}^T
 \end{bmatrix},$$

$$b_2 =$$

$$\begin{bmatrix}
 +(B^k(t))^{-1} [A^k(I \otimes \phi^T(t))d + h^k(t_i)] + U_{\max} \\
 -(B^k(t))^{-1} [A^k(I \otimes \phi^T(t))d + h^k(t)] - U_{\min} \\
 \quad \quad \quad - (I \otimes \phi^T(t))d + X_{\max} \\
 \quad \quad \quad + (I \otimes \phi^T(t))d - X_{\min}
 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

式(37)表示左边向量函数的每一项均等于右边的常数项0; 式(38)表示左边向量函数的每一项均小于等于右边的常数项0; 式(36) ~ (41)表示将原非线性最优控制问题(11) ~ (16)转化为二次规划问题, 降低了计算难度, 通过求解此二次规划问题实现了对原最优控制问题的直接求解.

计算方法如下:

Step 1: 设定 $k = 0, x^0(t), u^0(t)$, 将时间区间 $\tau \in [0, t_f]$ 转换为 $t \in [0, 1]$;

Step 2: 如果 $m < n$, 则增加 $n - m$ 维虚拟控制向量;

Step 3: 对最优控制问题进行拟线性化操作;

Step 4: 应用 Haar 小波函数近似状态变量, 并计算相应的近似控制变量;

Step 5: 计算海赛矩阵 C_1 , 梯度矩阵 C_2 和常数项 C_3 ;

Step 6: 计算等式约束项 F_1, b_1 和不等式约束项 F_2, b_2 ;

Step 7: 计算 M 的最优值;

Step 8: 如果 $|J_N^{k+1} - J_N^k|$ 充分小, 则停止迭代计算, 否则转 Step 9;

Step 9: 设定 $k = k + 1$, 转 Step 3.

5 算例仿真

本节采用所提出的方法计算2个非线性最优控制问题, 并给出仿真结果. 实验环境为 Matlab, 计算机芯片为酷睿2(2.4 GHz), 内存2 G.

例 1 首先考虑范德波尔振荡器 (Van der Pol oscillator) 问题 (该例子曾在文献 [15] 中用切比雪夫法进行求解). 计算满足约束的控制向量 $u(\tau)$ 使如下性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2 + x_2^2 + u^2) d\tau.$$

$$\text{s.t. } \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u;$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0;$$

$$x_1(5) + 1 = 0, \quad x_2(5) = 0;$$

$$|u(\tau)| \leq 0.75.$$

应用 Yen 和 Nagurka 的方法^[14], 在第1个状态方程中加入虚拟控制 $z(\tau)$, 使控制变量与状态变量的数

量相等,即 $\dot{x}_1 = x_2 + z$. 同时,性能指标函数相应地变为

$$j^{k+1} = \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2 + x_2^2 + u^2 + lz^2) d\tau,$$

其中 $l = 1000$.

应用拟线性化方法,将状态变量用 N 阶小波函数近似,求解最优控制问题.表 1 给出了采用本文算法得到的性能指标和计算耗时,并与其他方法进行了比较.图 1 为状态变量的计算结果,图 2 为最优控制轨迹.

表 1 例 1 仿真结果比较

方法	级数	\hat{j}^{k+1}	$ \hat{j}^{k+1} - \hat{j}^k $	计算时间/s
切比雪夫多项式法 ^[15]	$N = 16$	2.284 10	1.0000×10^{-3}	> 60
本文算法	$s = 16$	2.192 10	9.9994×10^{-4}	10.441 39

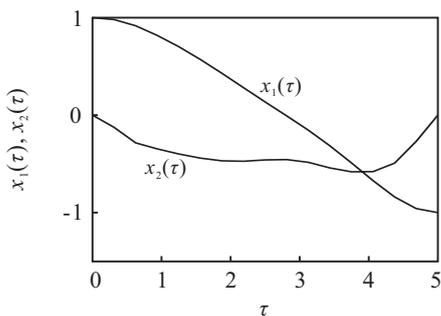


图 1 例 1 最优状态轨迹

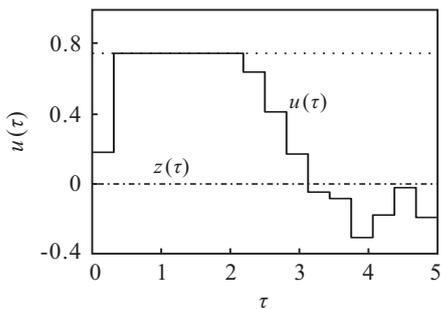


图 2 例 1 最优控制轨迹

例 2 计算控制向量 $u(\tau)$, 使如下的性能指标函数值最小:

$$J = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005u^2) d\tau.$$

$$\text{s.t. } \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2 + u;$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = -1.$$

状态变量不等式约束为

$$x_2(\tau) - 8(\tau - 0.5)^2 + 0.5 \leq 0.$$

增加虚拟控制变量 $z(\tau)$, 使状态变量与控制变量的个数相等,即 $\dot{x}_1 = x_2 + z$. 此时,性能指标函数转化为

$$\hat{j}^{k+1} = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005u^2 + lz^2) d\tau,$$

其中 $l = 1000$.

表 2 给出了采用本文算法所得到的性能指标和计算耗时,并与其他方法进行了比较.图 3 为状态变量的计算结果,图 4 为最优控制轨迹.

表 2 例 2 仿真结果

方法	级数	\hat{j}^{k+1}	$ \hat{j}^{k+1} - \hat{j}^k $	计算时间/s
切比雪夫多项式法 ^[15]	$N = 16$	0.201 46	6.5190×10^{-5}	35.309 58
本文算法	$s = 16$	0.188 42	1.9665×10^{-4}	23.501 00

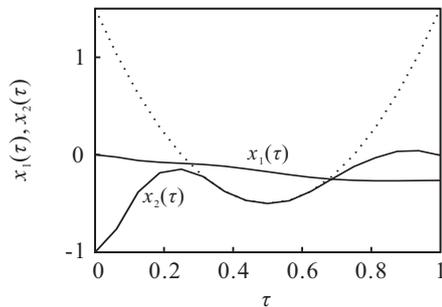


图 3 例 2 最优状态轨迹

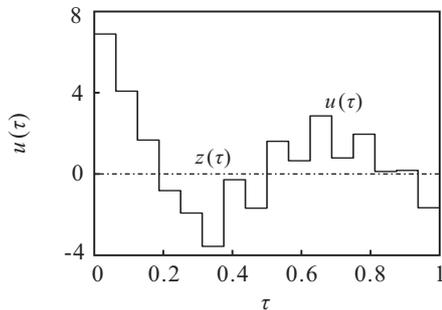


图 4 例 2 最优控制轨迹

以上 2 个仿真算例表明,本文算法可应用于求解受限最优控制问题.由表 1,表 2 和图 1~图 4 可知,在满足题设对控制或状态限制的情况下,本文算法与切比雪夫多项式法相比可以得到更佳的性能指标,而且计算耗时更少.出现这样结果的主要原因得益于 Haar 函数结构简单,正交系中的各级函数均包含“0”,这样的特性使得 Haar 函数具有较快的收敛速度,而且对函数具有较好的近似性.

6 结 论

本文针对带有终端状态约束、不等式约束的非线性最优控制问题,提出了一种基于拟线性化和有理 Haar 函数的直接计算方法.该计算方法采用拟线性化法对非线性动态系统进行线性化,并应用系数待定的有理 Haar 小波函数将控制变量和系统状态方程展开,进而将性能指标函数、初始状态约束和不等式约束等进行近似,从而将非线性最优控制问题转化为一系列二次最优控制问题进行求解.实验结果验证了采用所提出的算法求解最优控制问题的有效性,并通过对本文方法与其他方法的比较,表明了所提出的算法在满足题设限制的情况下,可以得到较切比雪夫多

项式算法更快的计算速度和更好的性能指标, 从而验证了本文算法在求解此类最优控制问题上具有较好的收敛性和计算精度。

参考文献(References)

- [1] Chen C F, Hsiao C H. A Walsh series direct method for solving variational problems[J]. *J of the Franklin Institute*, 1975, 30(4): 265-280.
- [2] Razzaghi M, Yousefi S. Legendre wavelets direct method for variational problems[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2000, 53(3): 185-192.
- [3] Horng I R, Chou J H. Shifted Chebyshev direct method for solving variational problems[J]. *Int J of Systems Science*, 1985, 16(7): 855-861.
- [4] Razzaghi M, Razzaghi M, Arabshahi A. Solutions of convolution integral and Fredholm integral equations via double Fourier series[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1990, 40(3): 215-224.
- [5] Razzaghi M, Nazarzaded J. Walsh function, Wiley encyclopedia of electrical and electronics engineering[M]. New York: Wiley, 1999, 23: 429-440.
- [6] Beauchamp K G. Walsh functions and their applications[M]. New York: Academic Press, 1975: 72-86.
- [7] Lynch R T, Reis J J. Haar transform image coding[C]. Proc of 1976 National Telecommun Conf. Dallas, 1976, 44: 1-5.
- [8] Reis J J, Lynch R T, Butman J. Adaptive Haar transform video bandwidth reduction system for RPV's[C]. Proc of Ann Meeting Soc Photo Optic Inst Eng(SPIE). San Diego, 1976: 24-35.
- [9] Ohkita M, Kobayashi Y. An application of rationalized Haar functions to solutions of linear differential equations[J]. *IEEE Trans on Circuit and Systems*, 1986, 33(9): 853-862.
- [10] Razzaghi M, Ordokhani Y. Solution of nonlinear Volterra-Hammerstein integral equations via rationalized Haar functions[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2001, 7(2): 205-219.
- [11] Ohkita M, Kobayashi Y. An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1986, 33(9): 853-862.
- [12] Razzaghi M, Ordokhani Y. Solution of differential equations via rationalized Haar functions[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, 56(3): 235-246.
- [13] Bellman R, Kalaba R. Quasilinearization and nonlinear boundary value problems[M]. New York: Elsevier, 1965.
- [14] Yen V, Nagurka M. Optimal control of linearly constrained linear systems via state parameterization[J]. *Optimal Control Application and Methods*, 1992, 13(2): 155-167.
- [15] Jaddu H. Direct solution of nonlinear optimal control problems using quasilinearization and Chebyshev polynomials[J]. *J of the Franklin Institute*, 2002, 339(4): 479-498.

(上接第1369页)

- [5] Danon L, Diaz Guilera A, Duch J, et al. Comparing community structure of complex networks in nature and society[J]. *Nature*, 2005, 435(7043): 814-818.
- [6] Bagrow J P, Ballt E M. A local method for detecting communities[J]. *Physical Review E*, 2005, 72(4): 1-16.
- [7] Newman M E J. Fast algorithm for detecting community structure in networks[J]. *Physical Review E*, 2004, 69(2): 36-40.
- [8] Clauset A, Newman M E J, Moore C. Finding community structure in very large networks[J]. *Physical Review E*, 2004, 70(6): 23-28.
- [9] Heinzelman W. Application-specific protocol architectures for wireless network[D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, University of Rochester, 2000.
- [10] Younis O, Fahmy S. Heed: A hybrid, energy-efficient, distributed clustering approach for ad-hoc sensor networks[J]. *IEEE Trans on Mobile Computing*, 2004, 3(4): 660-669.
- [11] Capocci A, Servedio V D P, Caldarelli G, et al. Detecting communities in large networks[J]. *Computer Science*, 2004, 352(2): 669-673.
- [12] Zhou S, Mondragon R J. The rich club phenomenon in the internet topology[J]. *IEEE Communication Letters*, 2004, 8(3): 180-182.