文章编号: 1001-0920 (2012) 10-0000-00

一种有限对象集的输出通道任意增益/相角裕度调节方法

武 杰, 孙秀霞, 董文瀚
(空军工程大学 工程学院，西安 710038)

摘 要: 针对一类有限多输入多输出线性时不变对象集, 提出一种调节输出通道增益/相角裕度的方法. 采用增益相角裕度测试器理论, 将问题转化为有限不确定对象集的稳定性问题; 基于连续线性二次调节器理论, 设计针对单个对象的输出反馈控制器; 利用周期控制方法, 设计针对有限对象集的线性周期控制器. 该控制器可使有限对象集的所有反馈控制回路在输出通道同时实现任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度. 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 连续线性二次调节器理论；周期控制；线性周期控制器；输出反馈；增益裕度；相角裕度
中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Tuning method to provide arbitrarily large gain/phase margins in output channels for a finite set of plants

WU Jie, *SUN Xiu-xia*, *DONG Wen-han*
(Engineering College，Air Force Engineering University，Xi’an 710038，China．Correspondent：WU Jie，E-mail: wujiekgd@163.com)

Abstract: For a finite set of multi-input-multi-output(MIMO) linear time-invariant(LTI) plants, a method to tune gain/phase margins in the output channels is presented. By using the theory of gain-phase margin tester, the question is translated into a simultaneous stabilization problem of a finite set of uncertain plants. An output feedback controller is designed for a plant based on continuous-time linear quadratic regulator(LQR) theory, and a method of periodic control is used to design a linear periodic controller for a finite set of plants. The controller can simultaneously provide gain margins as large as desired and phase margins of up to 90 degrees in the output channels of all feedback control loops for a finite set of plants. Simulation results show the effectiveness of the method.

Key words: continuous-time LQR theory；periodic control；linear periodic controller；output feedback；gain margin；phase margin

1 引 言

近年来, 如何获得满意的增益裕度和相角裕度引起了人们的广泛关注[1-9]. 针对单输入单输出 (SISO) 对象, 文献 [1-4] 通过调节 PID 控制器来获得满意的增益裕度或相角裕度; [5] 采用分析综合的方法设计一个状态反馈控制器, 达到了相同的目的; 针对多输入多输出 (MIMO) 对象, [6-7] 采用连续线性二次调节器 (LQR) 理论, 设计了一类静态通用采样保持函数 (GSHF) 控制器使系统在输出通道实现任意大的增益裕度; [8-9] 采用一种新的证明方法, 将 [6-7] 的成果拓展到了联合增益相角裕度问题中.

但是, 综合分析上述文献可以看到, 目前提出的增益/相角裕度调节方案均仅能调节单个对象的增益/相角裕度, 不能同时调节有限 MIMO 对象集的增益/相角裕度[1-9]. 为此, 本文针对有限 MIMO 对象集, 提出了一种新的控制策略, 以期使有限对象集的所有反馈控制回路在输出通道同时获得任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度.具体方案如下: 利用增益相角裕度测试器[10], 使有限集联合增益相角裕度问题转化为有限集不确定系统的稳定性问题; 采用连续 LQR 理论和周期控制方法, 设计一个统一的线性周期控制器, 使有限集 MIMO 闭环系统的所有反馈控制回路均可在输出通道获得任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度.

收稿日期: 2011-03-10；**修回日期:** 2011-10-19.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (60904038).
作者简介: 武杰(1985−), 男, 博士, 从事现代控制理论与应用的研究；孙秀霞(1962−), 女, 教授, 博士生导师, 从事现代控制理论与应用、飞行控制等研究.

2 问题描述

考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0; \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统状态; $u \in \boldsymbol{R}^m$ 为系统的控制输入; $y \in \boldsymbol{R}^r$ 为系统输出; A, B, C 属于如下集合:

$$\{(A_i, B_i, C_i) \in \boldsymbol{R}^{n_i \times n_i} \times \boldsymbol{R}^{n_i \times m} \times \boldsymbol{R}^{r \times n_i} :$$
$$i = 1, 2, \cdots, q\},$$

即有限对象集的每个对象均具有 m 个输入和 r 个输出, 但可能有不同的状态维数.

控制目标为: 给定一个有限对象集合, 并设计统一的线性控制器, 使该有限集内的所有对象在输出通道可获得任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度.

类似文献 [8], 该控制目标可等价为以下问题: 在系统 (1) 的输出通道加入不确定性, 得到实际系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0; \\ y(t) = \gamma Cx(t). \end{cases} \tag{2}$$

其中不确定参数 $\gamma \in \boldsymbol{C}$, 并属于如下集合:

$$\varGamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi}) := \{\rho \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi} : \rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}], \phi \in [-\bar{\phi}, \bar{\phi}]\}.$$

这里: $\underline{\rho} \in (0, 1]$, $\bar{\rho} \in [1, \infty)$, $\bar{\phi} \in [0, 90^\circ)$. 此时, 不确定系统状态 $x(t) \in \boldsymbol{C}^n$, 输出 $y(t) \in \boldsymbol{C}^r$. 由文献 [10] 可知, $\gamma = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}$ 为系统 (1) 的增益相角裕度测试器. $[\underline{\rho}, \bar{\rho}]$ 代表系统 (1) 增益的调节范围, $[-\bar{\phi}, \bar{\phi}]$ 代表系统 (1) 相角的调节范围. 当 $\bar{\phi} = 0$ 时, 该问题为有限集增益裕度问题; 当 $\underline{\rho} = \bar{\rho} = 1$ 时, 该问题为有限集相角裕度问题; 一般情况则为有限集联合增益相角裕度问题[8-9].

用 (A, B, C) 表示系统 (1), $(A, B, \gamma C)$ 表示系统 (2). 控制目标可以转化为设计控制律 $u(t)$ 来稳定如下系统:

$$\{(A_i, B_i, \gamma C_i) : \gamma \in \varGamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi}); i = 1, 2, \cdots, q\}.$$

为了完成控制器设计, 对系统 (1) 作如下假设:

假设 1 系统 (1) 的每一个 (C_i, A_i) 可观测;

假设 2 系统 (1) 的每一个系数矩阵 B_i 行满秩;

假设 3 当 $i \neq j$ 时, A_i 和 A_j 的特征值完全不同.

符号标记为: 记函数 $f = o(T^j)$, 若存在常数 $c_1 > 0, T_1 > 0$, 使 $\|f(T)\|_2 \leqslant c_1 T^j, T \in (0, T_1)$; $\mathrm{sp}\{M\}$ 表示矩阵 $M \in \boldsymbol{R}^{n_i \times n_i}$ 的特征值集合; W^* 表示 $W \in \boldsymbol{C}^{n \times m}$ 的共轭转置; 序列 $G \in s(\boldsymbol{R}^{n \times m})$ 表示该序列的每个元素均属于 $\boldsymbol{R}^{n \times m}$.

3 控制律设计及稳定性分析

3.1 控制律设计

控制律设计过程包括以下 3 个步骤:

Step 1 设计可调节单个对象增益/相角裕度的输出反馈控制器.

定理 1 选定 i, 则存在输出反馈控制器 $u = \bar{F}_i y(t) (\bar{F}_i \in \boldsymbol{R}^{m \times r})$ 稳定如下形式的任何系统:

$$\{(A_i, B_i, \gamma C_i) : \gamma \in \varGamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi})\}.$$

证明 将 $u = \bar{F}_i y(t)$ 代入 $(A_i, B_i, \gamma C_i)$ 中, 可得

$$\dot{x}(t) = (A_i + \gamma B_i \bar{F}_i C_i) x(t).$$

定义 $F_i := B_i \bar{F}_i$, 由假设 2 可知矩阵 B_i 行满秩, 则矩阵 $B_i B_i^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{n_i \times n_i}$ 可逆, 所以可得

$$\bar{F}_i = B_i^{\mathrm{T}} (B_i B_i^{\mathrm{T}})^{-1} F_i. \tag{3}$$

要证明定理 1, 即证明

$$\mathrm{sp}(A_i + \gamma B_i \bar{F}_i C_i) \subset \boldsymbol{C}^- \Leftrightarrow \mathrm{sp}(A_i + \gamma F_i C_i) \subset \boldsymbol{C}^-. \tag{4}$$

下面分两步进行证明:

1) 构造辅助系统, 采用连续 LQR 理论选择 F_i.

由文献 [11] 可知, 一个 LQR 最优控制器可保证 MIMO 线性时不变系统的每个反馈控制回路均具有 60° 的相角裕度和 $(1/2, \infty)$ 的增益裕度; 为了使系统可实现任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度, 本文仿照文献 [8-9] 的方法, 按比例调整系统 (1) 的系数矩阵 C_i, 得到辅助系统, 从而修改标准的 LQR 问题. 定义

$$\alpha := 2\cos\bar{\phi}, \tag{5}$$

$$\hat{C}_i := \alpha \underline{\rho} C_i \in \boldsymbol{R}^{r \times n_i}. \tag{6}$$

构造辅助系统:

$$\dot{w}(t) = A_i^{\mathrm{T}} w(t) + \hat{C}_i^{\mathrm{T}} v(t),\ w(0) = w_0 \in \boldsymbol{R}^{n_i}. \tag{7}$$

由文献 [12] 可知, 针对式 (7) 表示的系统, 对任意的初始值 w_0, 可找到如下形式的最优控制:

$$v(t) = F_i^{\mathrm{T}} w(t), \tag{8}$$

使性能指标

$$\int_0^\infty [w^{\mathrm{T}}(t) Q_i w(t) + v^{\mathrm{T}}(t) R_i v(t)] \mathrm{d}t$$

最小. 其中: $Q_i \in \boldsymbol{R}^{n_i \times n_i}$, $R_i \in \boldsymbol{R}^{r \times r}$ 为正定对称矩阵. 且当 $(A_i^{\mathrm{T}}, \hat{C}_i^{\mathrm{T}})$ 可控时, 系统 (7) 的连续代数 Riccati 方程具有唯一的正定对称解 P_i, 有

$$A_i P_i + P_i A_i^{\mathrm{T}} - P_i \hat{C}_i^{\mathrm{T}} R_i^{-1} \hat{C}_i P_i + Q_i = 0. \tag{9}$$

相应的辅助系统最优增益 F_i 为

$$F_i = -P_i \hat{C}_i^{\mathrm{T}} R_i^{-1}. \tag{10}$$

2) 证明由式 (10) 所得到的 F_i 满足式 (4).

由假设 1 可知, (C_i, A_i) 可观测, 则 $(A_i^{\mathrm{T}}, \hat{C}_i^{\mathrm{T}})$ 可控, 所以式 (9) 存在唯一的正定对称解 P_i. 设

$$\hat{\rho} \in \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{\bar{\rho}}{\alpha \underline{\rho}}\right],\ \phi \in [-\bar{\phi}, \bar{\phi}]; \tag{11}$$

定义 $A_{\mathrm{n}}^i := A_i^{\mathrm{T}}$, $C_{\mathrm{n}}^i := \hat{C}_i^{\mathrm{T}}$, $F_{\mathrm{n}}^i := F_i^{\mathrm{T}}$. 考虑辅助系统

$$\dot{x}(t)=(A_{\rm n}^i+\hat{\rho}{\rm e}^{-{\rm j}\phi}C_{\rm n}^iF_{\rm n}^i)x(t),\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^{n_i}.\quad(12)$$

固定 x_0 且考虑映射为 $\boldsymbol{C}^{n_i}\to\boldsymbol{C}$ 的候选 Lyapunov 函数 $V(x):=x^*P_ix$. 由 P_i 正定对称可知 V 为非负实数, 则有

$$\dot{V}(x(t)):=\frac{\partial}{\partial x}V(x)\dot{x}(t)\quad(13)$$

为实数. 展开 $\dot{V}(x)$ 并使用式 (9) 和 (10) 简化可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))\ =&\ -x^*(t)Q_ix(t)+(1-2\hat{\rho}\cos\phi)\times\\&x^*(t)(P_i\hat{C}_i^{\rm T}R_i^{-1}\hat{C}_iP_i)x(t).\end{aligned}\quad(14)$$

由式 (5), (11) 及 $\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi}$ 的边界可得

$$1-2\hat{\rho}\cos\phi\leqslant0.\quad(15)$$

再根据 P_i 和 R_i 正定, 可得式 (14) 右侧第 2 项小于等于 0, 则有

$$\dot{V}(x(t))\leqslant-x^*(t)Q_ix(t).\quad(16)$$

因为 Q_i 正定, 所以对于任意 x_0, 当 $t\to\infty$ 时, $V(x(t))\to0$; 因为 P_i 正定, 所以当 $t\to\infty$ 时, 亦有 $x(t)\to0$. 由此可得

$$\begin{aligned}&{\rm sp}(A_n^i+\hat{\rho}{\rm e}^{-{\rm j}\phi}C_n^iF_n^i)\subset\boldsymbol{C}^{-1}\Leftrightarrow\\&{\rm sp}(A_i+\hat{\rho}{\rm e}^{-{\rm j}\phi}F_i\hat{C}_i)\subset\boldsymbol{C}^{-1}\Leftrightarrow\\&{\rm sp}(A_i+\alpha\underline{\rho}\hat{\rho}{\rm e}^{-{\rm j}\phi}F_iC_i)\subset\boldsymbol{C}^{-1}.\end{aligned}$$

由于 $\alpha\underline{\rho}\hat{\rho}\in[\underline{\rho},\bar{\rho}]$, 则当 $\rho\in[\underline{\rho},\bar{\rho}]$, $\phi\in[-\bar{\phi},\bar{\phi}]$ 时, 可证明式 (4) 成立, 由此定理得证. □

Step 2　在 Step 1 的基础上, 设计一个可调节单个对象增益/相角裕度的线性周期控制器.

本文设计了一种周期控制的方法, 该方法将输出反馈控制器 $u=\bar{F}_iy(t)$ 近似为周期为 $T:=ph>0$ 的控制律, 即

$$u(t)=\begin{cases}0,\ t\in[kT,(k+\dfrac{\bar{n}}{p})T);\\ \dfrac{p}{p-\bar{n}}\bar{F}_iy[kT],\ t\in[(k+\dfrac{\bar{n}}{p})T,(k+1)T).\end{cases}\quad(17)$$

其中: $k\in\boldsymbol{Z}^+$, $\bar{F}_i\in\boldsymbol{R}^{m\times r}$, $p>\bar{n}\geqslant0$ 为正整数; h 为一个控制周期 T 内的采样时间. 其基本思想是: 将控制器周期化, 每个周期分为两部分, 估计阶段和控制阶段. 在估计阶段, 关闭控制信号以鉴别系统; 在控制阶段, 应用估计阶段估计出的输出反馈控制信号, 对被控对象进行实际控制. 不断地进行上述"估计-控制-估计-$\cdots$"的过程, 周期性地探测系统并施加控制. 控制律 (17) 一个周期内的控制信号如图 1 所示.

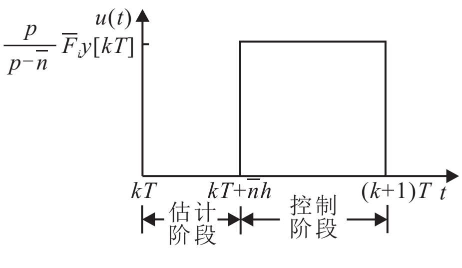

图 1　控制律 (17) 的估计和控制阶段

定理 2　选定 i, 则存在 $T_1>0$, 使得对于任意 $T\in(0,T_1)$, 控制律 (17) 稳定如下形式的任何系统:

$$\{(A_i,B_i,\gamma C_i):\gamma\in\varGamma(\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi})\}.$$

证明　定义

$$A_{\rm d}^i:={\rm e}^{A_iT},\ C_{\rm d}^i:=\frac{p}{p-\bar{n}}\int_0^{\frac{p-\bar{n}}{p}T}C_i{\rm e}^{A_i\tau}{\rm d}\tau.\quad(18)$$

选定 i, 将式 (17) 代入系统 $(A_i,B_i,\gamma C_i)$, 可得

$$x[(k+1)T]=(A_{\rm d}^i+\gamma F_iC_{\rm d}^i)x[kT],\ k\in\boldsymbol{Z}^+.\quad(19)$$

则要证明定理 2, 即证明存在控制律 (17) 使

$${\rm sp}(A_{\rm d}^i+\gamma F_iC_{\rm d}^i)\subset\{z\in\boldsymbol{C}:|z|<1\}.\quad(20)$$

由定理 1 可得, 式 (10) 所选择的 F_i 使 $A_i+\gamma F_iC_i$ 稳定, 定义 $A_\gamma^i:=A_i+\gamma F_iC_i$, 则 $A_\gamma^i\in\boldsymbol{C}^{n_i\times n_i}$, 且存在着唯一的实正定对称矩阵 P_γ, 使得

$$(A_\gamma^i)^*P_\gamma+P_\gamma A_\gamma^i+I=0.\quad(21)$$

考虑如下辅助系统:

$$x[k+1]=(A_{\rm d}^i+\gamma F_iC_{\rm d}^i)x[k],\ x[0]=x_0\in\boldsymbol{R}^{n_i}.\quad(22)$$

由麦克劳林公式和 γ 的有界性, 可将式 (22) 转为

$$x[k+1]=[I+A_\gamma^iT+o(T^2)]x[k].\quad(23)$$

固定 x_0 且考虑候选 Lyapunov 函数 $V:\boldsymbol{C}^{n_i}\to\boldsymbol{C}$, 即

$$V(x):=x^*P_\gamma x.\quad(24)$$

由 P_γ 正定对称可知 V 为非负实数, 因此

$$\Delta V(x[k]):=V(x[k+1])-V(x[k])\quad(25)$$

为实数. 将其依次代入式 (23) 和 (21) 可得

$$\begin{aligned}\Delta V(x[k])=&Tx^*[k][(A_\gamma^i)^*P_\gamma+P_\gamma A_\gamma^i+o(T)]x[k]=\\&-Tx^*[k]x[k]+o(T^2)x^*[k]x[k].\end{aligned}\quad(26)$$

所以存在 $T_1>0$ 使得

$$\Delta V(x[k])\leqslant0,\ T\in(0,T_1).\quad(27)$$

因此, 对于任意 x_0, 有 $\lim\limits_{t\to\infty}V(x(t))=0$, 进而有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, 从而可证明式 (20), 由此定理得证. □

Step 3　设计一个针对有限对象集的统一线性周期控制器, 该控制器可对有限对象集内的任一对象产生控制信号 (17).

选用如下形式的线性周期控制器来调节有限对象集输出通道的增益相角裕度:

$$\begin{aligned}&z[k+1]=G(k)z[k]+H(k)y[kh],\ z[0]=z_0\in\boldsymbol{R}^m;\\&u(kh+\tau)=J(k)z[k],\ \tau\in[0,h).\end{aligned}\quad(28)$$

用 $p\in\boldsymbol{Z}^+$ 表示控制器参数 G, H 和 J 的周期, 使得线性周期控制器 (28) 的周期为 $T:=ph>0$, 用 5 维数组 (G,H,J,T,p) 来表示控制器 (28); 注意到控制器 (28) 可通过一个采样器、一个零阶保持器和一个周期为 p 的 m 阶时变离散系统来执行, 如图 2 所示.

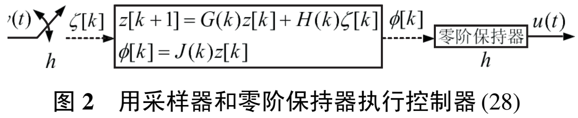

图 2　用采样器和零阶保持器执行控制器 (28)

首先给出如下引理[13]:

引理 1 选定 i, 当系统 (1) 的 (C_i, A_i) 可观测时, 存在一个 $T_0 > 0$, 使得对于任意 $T \in (0, T_0)$, $(C_i, \mathrm{e}^{A_i T})$ 可观测.

再通过理论证明给出如下结论:

定理 3 令 $T = ph > 0$, $\gamma \in \boldsymbol{C}$, 对于每个 $p > \bar{n} := n_1 + \cdots + n_q$, 存在一个 $h_0 > 0$ 和一个 m 阶的线性周期控制器 (G, H, J, T, p), 使得对于任意 $h \in (0, h_0)$, 该控制器可对任意 $(A_i, B_i, \gamma C_i)$ 产生相应的控制信号 (17), 其中 $i = 1, 2, \cdots, q$.

证明 对系统 $(A_i, B_i, \gamma C_i)$ 应用控制律 (17), 可得

$$x[kT + jh] = (\mathrm{e}^{A_i h})^j x[kT]. \tag{29}$$

其中: $k \in \boldsymbol{Z}^+$, $j = 0, 1, \cdots, \bar{n} - 1$. 因此有

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[kT] \\ y[kT+h] \\ \vdots \\ y[kT+(\bar{n}-1)h] \end{bmatrix}}_{=:Y[kT]\in\boldsymbol{R}^{r\bar{n}}} = \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} C_i \\ C_i\mathrm{e}^{A_i h} \\ \vdots \\ C_i\mathrm{e}^{A_i(\bar{n}-1)h} \end{bmatrix}}_{=:L_i\in\boldsymbol{R}^{r\bar{n}\times n_i}} x[kT]. \tag{30}$$

如果能找到一个增益矩阵 $F \in \boldsymbol{R}^{m\times(r\bar{n})}$ 使得

$$FL_i = \frac{p}{p-\bar{n}}\bar{F}_i C_i,\ i = 1, 2, \cdots, q. \tag{31}$$

则有

$$FY[kT] = \begin{cases} \dfrac{p}{p-\bar{n}}\bar{F}_1 y[kT], \\ \qquad \text{如果对象是 } (A_1, B_1, \gamma C_1); \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{p}{p-\bar{n}}\bar{F}_q y[kT], \\ \qquad \text{如果对象是 } (A_q, B_q, \gamma C_q). \end{cases} \tag{32}$$

此时, 对任意系统 $(A_i, B_i, \gamma C_i)$ 应用如下控制律时, 可得到相应的控制律 (17).

$$u(t) = \begin{cases} 0,\ t \in [kT, (k + \dfrac{\bar{n}}{p})T); \\ FY[kT],\ t \in [(k + \frac{\bar{n}}{p})T, (k+1)T). \end{cases} \tag{33}$$

下面的问题便是如何通过式 (31) 求出 F.

定义

$$\bar{C} := [C_1\ \ C_2\ \ \cdots\ \ C_q],$$

$$\bar{A} := \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_q\}.$$

则由假设 1 和假设 3 可得 $(\bar{C}, \bar{A})$ 可观测. 再根据引理 1 可得: 存在 $h_0 = T_0/p > 0$, 使得对于任意 $h \in (0, h_0)$, $(\bar{C}, \mathrm{e}^{\bar{A}h})$ 可观测. 则可观测矩阵

$$L := [L_1\ \ L_2\ \ \cdots\ \ L_q] =$$
$$[\bar{C}^{\mathrm{T}}\ \ (\bar{C}\mathrm{e}^{\bar{A}h})^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ (\bar{C}\mathrm{e}^{\bar{A}(\bar{n}-1)h})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

列满秩. 式 (31) 可改写为

$$FL = \frac{p}{p-\bar{n}}[\bar{F}_1 C_1\ \ \ \bar{F}_2 C_2\ \ \ \cdots\ \ \ \bar{F}_q C_q]. \tag{34}$$

因为 L 列满秩, 所以 $L^{\mathrm{T}}L$ 可逆, 解式 (34) 可得

$$[f_0\ \ f_1\ \cdots\ f_{\bar{n}-1}] := F =$$
$$\frac{p}{p-\bar{n}}[\bar{F}_1 C_1\ \ \bar{F}_2 C_2\ \cdots\ \bar{F}_q C_q][L^{\mathrm{T}}L]^{-1}L^{\mathrm{T}}. \tag{35}$$

选择

$$(G, H, J)(k) = \begin{cases} (0, f_0, 0),\ k = 0; \\ (I, f_k, 0),\ k = 1, 2, \cdots, \bar{n} - 1; \\ (I, 0, I),\ k = \bar{n}, \bar{n}+1, \cdots, p-1. \end{cases} \tag{36}$$

$$(G, H, J)(k) \in s(\boldsymbol{R}^{m\times m}) \times s(\boldsymbol{R}^{m\times r}) \times s(\boldsymbol{R}^{m\times m}).$$

并且设置

$$(G(k+p), H(k+p), J(k+p)) = (G(k), H(k), J(k)), \tag{37}$$

其中 $k \in \boldsymbol{Z}^+$. 易验证对任意 $(A_i, B_i, \gamma C_i)$, 式 (36) 和 (37) 所设计的控制律 (G, H, J, T, p) 均等价于控制律 (17). □

3.2 稳定性分析

定理 4 设系统 (A, B, C) 满足假设 1∼假设 3 的条件, 且 $\bar{\phi} \in [0, 90°)$, $\underline{\rho} \in (0, 1]$, $\bar{\rho} \in [1, \infty)$. 则存在一个 $T_{\max} > 0$ 和 $p_0 > \bar{n} := n_1 + \cdots + n_q$, 使得对于任意 $T \in (0, T_{\max})$ 和 $p > p_0$, 可找到一个线性周期控制器 (G, H, J, T, p) 稳定如下形式的任何系统:

$$\{(A_i, B_i, \gamma C_i) : \gamma \in \varGamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi}); i = 1, 2, \cdots, q\}.$$

证明 选取 $T_{\max} = \min\{T_0, T_1\}$, 再联合定理 1∼定理 3 即可得证该定理. □

4 数值仿真

考虑有限对象集 $\{(A_i, B_i, C_i) : i = 1, 2\}$. 其中

$$(A_1, B_1, C_1) =$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$(A_2, B_2, C_2) =$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

使用本文的设计方法, 设计一个统一的线性周期控制器, 同时使系统 (A_1, B_1, C_1) 和系统 (A_2, B_2, C_2) 的所有反馈控制回路在输出通道均具有 $[0.75, 6]$ 的增益调节范围和 $[-70°, 70°]$ 的相角调节范围. 即设计一个统一的线性周期控制器同时稳定如下系统:

$$\{(A_i, B_i, \gamma C_i) : \gamma \in \varGamma(0.75, 6, 70°); i = 1, 2\}.$$

由题可得: $\bar{n} = n_1 + n_2 = 4$, 设 $Q_1 = Q_2 = I$, $R_1 = R_2 = I$, 选择 $T = 0.0125\ \mathrm{s}$, $p = 25$. 根据本文的

设计方法可得如式 (36) 和 (37) 所示的线性周期控制律. 其中

$$f_0 = \begin{bmatrix} 1\,042.9 & 1\,043.4 \\ 0 & -4\,173.6 \end{bmatrix}, f_1 = \begin{bmatrix} 347.3 & 347.6 \\ 0 & -1\,390.4 \end{bmatrix},$$
$$f_2 = \begin{bmatrix} -348.3 & -348.2 \\ 0 & 1\,392.9 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} -1\,043.9 & -1\,044 \\ 0 & 4\,176.1 \end{bmatrix}.$$

图 3～图 6 展示了当 $\gamma = 4$, 初始值 $x_1(0) = x_2(0) = [1 \quad 1]^{\rm T}$ 时, 对象 1 和对象 2 的输出信号与控制信号的仿真结果图. 图中: y_{11}, y_{12} 以及 y_{21}, y_{22} 分别表示对象 1 和对象 2 的两个输出; u_{11}, u_{12} 以及 u_{21}, u_{22} 表示所设计的统一控制器分别应用于对象 1 和对象 2 时的控制信号.

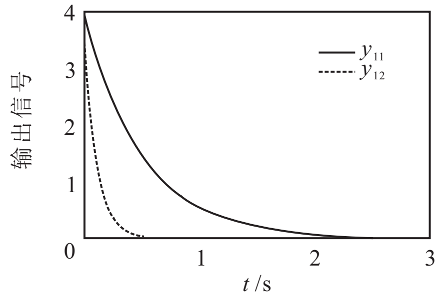

图 3　对象 1 的输出信号

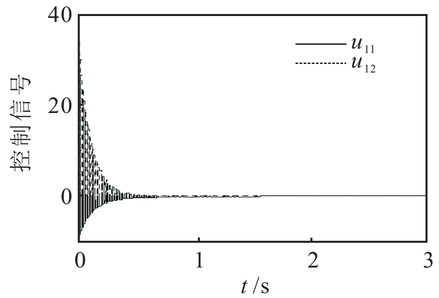

图 4　对象 1 的控制信号

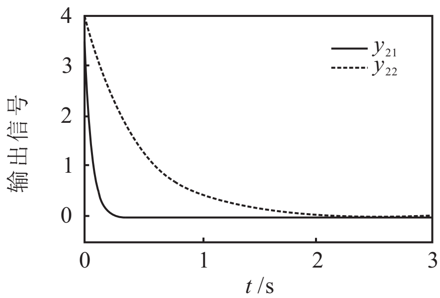

图 5　对象 2 的输出信号

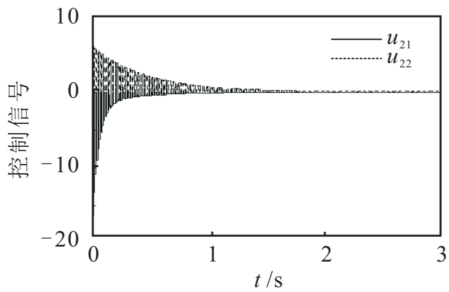

图 6　对象 2 的控制信号

5　结　论

本文针对有限集 MIMO 线性时不变系统, 提出了一种调节输出通道增益/相角裕度的方法. 首先, 针对单个对象, 采用连续 LQR 理论, 设计了输出反馈控制器; 然后, 采用周期控制方法, 设计了一个针对有限对象集的线性周期控制器, 该控制器可同时使有限集 MIMO 系统的所有反馈控制回路在输出通道获得任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度; 最后, 通过仿真实例验证了所设计控制器的有效性.

参考文献(References)

[1] Wang D J. Synthesis of phase-lead/lag compensators with complete information on gain and phase margins[J]. Automatica, 2009, 45(4): 1026-1031.

[2] Wang Q G, Zhen Y, Chang C H. Tuning of phase-lead compensators for exact gain and phase margins[J]. Automatica, 2006, 42(2): 349-352.

[3] Kaya I. Tuning PI controllers for stable processes with specifications on gain and phase margins[J]. ISA Trans, 2004, 43(2): 297-304.

[4] Wang Q G, Fung H W, Zhang Y. PID tuning with exact gain and phase margins[J]. ISA Trans, 1999, 38(4): 243-249.

[5] Haddad W M, Chellaboina V, Gholami B. Controller synthesis with guaranteed closed-loop phase constraints[J]. Automatica, 2008, 44(12): 3211-3214.

[6] Yang C, Kabamba P T. Multi-channel output gain margin improvement using generalized sampled-data hold functions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(3): 657-661.

[7] Yan W Y, Anderson B D O, Bitmead R R. On the gain margin improvement using dynamic compensation based on generalized sampled-data hold functions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(11): 2347-2354.

[8] Roosi M, Miller D E. Gain/phase margin improvement using static generalized sampled-data hold functions[J]. Systems and Control Letters, 1999, 37(3): 163-172.

[9] Roosi M, Miller D E. Gain/phase margin improvement using static generalized sampled-data hold functions[C]. Proc of the 36th Conf on Decision and Control. San Diego, 1997: 2109-2114.

[10] Chang C H, Han K W. Gain margins and phase margins for control systems with adjustable parameters[J]. AIAA J of Guidance, Control and Dynamics, 1991, 13(3): 404-408.

[11] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Zheng D Z. Linear system theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[12] 胡寿松, 王执铨, 胡维礼. 最优控制理论与系统[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

(Hu S S, Wang Z Q, Hu W L. The theory and system of optimal control[M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[13] Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(9): 820-832.