

文章编号: 1001-0920(2012)10-0000-00

一类幂弱化缓冲算子及其性质研究

王正新¹, 党耀国², 刘思峰²

(1. 浙江师范大学 经济与管理学院, 浙江 金华 321004; 2. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘要: 针对经典弱化缓冲算子的固定结构问题, 将可变参数引入弱化缓冲算子, 构造若干实用的幂弱化缓冲算子, 并分析可变参数与幂弱化缓冲算子作用强度之间的关系. 通过调整可变参数的数值, 实现对算子作用强度的有效控制. 结果表明, 经典弱化缓冲算子是幂弱化缓冲算子的特殊情形, 幂弱化缓冲算子在控制作用强度方面的有效性要明显优于传统缓冲算子. 最后, 通过实例验证了幂弱化缓冲算子的有效性与优越性.

关键词: 灰色系统; 幂弱化缓冲算子; 可变参数; 预测

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

A sort of power weaken buffer operators and its properties

WANG Zheng-xin¹, DANG Yao-guo², LIU Si-feng²

(1. School of Economics and Management, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China; 2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: WANG Zheng-xin, E-mail: jenkins226@163.com)

Abstract: For the problem of the fixed structure of classic weaken buffer operators, this paper introduces variable parameters into weaken buffer operator, constructs a number of practical power weaken buffer operators and analyzes the relationship between the intensity and variable parameters in order to effectively control the intensity of the weaken buffer operators. The results show that the classical weaken buffer operators are special cases of power weaken buffer operators which are superior to the traditional operators in the aspect of the controlling the intensity. Finally, an example of a product sales show the effectiveness and superiority of the power weaken buffer operators.

Key words: grey system; power weaken buffer operator; variable parameters; forecasting

1 引言

序列生成是灰色系统建模和预测的基础, 按照不同的目的和功能可将其分为函数变换和缓冲算子. 函数变换的主要目的是提高序列的光滑度, 以符合一般建模条件, 这对于稳定的小“小样本、贫信息”系统是有效的. 当系统的运行受到外界某种因素的强烈干扰时, 如一项新政策的实施, 即使原始数据具有很高的光滑度, 预测精度往往也不理想. 此时的问题不在于序列是否光滑或者模型优劣与否, 而是在于系统所表现出来的行为数据已不能正确地反映系统的真实变化规律. 刘思峰^[1]将该类系统称为冲击扰动系统, 提出利用缓冲算子解决冲击扰动系统的预测问题, 并构建了较为完善的缓冲算子公理体系, 提出了第 1 个缓冲算子——平均弱化缓冲算子, 之后通过大量应用实例验证了该经典缓冲算子的实用性.

弱化缓冲算子的功能在于消除加快数据发展速度或增加数据振幅的冲击扰动项的影响.

党耀国等^[2]在此基础上构造了几何平均弱化缓冲算子、加权平均弱化缓冲算子、加权几何平均弱化缓冲算子等若干个具有普遍意义的实用弱化算子, 并研究了其特性及各种弱化缓冲算子之间的内在关系; 文献 [3] 基于反函数与广义时间序列的平均发展速度, 构造了一类新的弱化缓冲算子; [4] 基于反向累积和的概念, 构造一类新的弱化缓冲算子, 讨论其相互关系及其性质, 并证明了新构造的弱化缓冲算子的权重为有界递增序列; [6-7] 根据灰色系统理论的差异信息原理和新信息优先的原理, 分别构造了两类新型弱化缓冲算子; [8] 针对传统缓冲算子不能实现作用强度的微调, 从而导致缓冲作用效果过强或过弱的问题, 构造了变权弱化缓冲算子, 研究了缓

收稿日期: 2011-03-28; 修回日期: 2011-06-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71071077); 全国教育科学“十一五”规划青年课题 (EIA100402).

作者简介: 王正新(1981—), 男, 讲师, 博士, 从事灰色系统理论、管理决策方法的研究.

冲算子调节度与可变权重之间的关系, 并利用遗传算法探讨该类缓冲算子的优化问题; [9] 从提高序列光滑性和消除冲击扰动项的影响两个方面出发, 研究了缓冲算子与灰建模精度的关系, 揭示了缓冲算子提高灰建模精度的根本原因; [10] 将弱化缓冲算子引入多雷达目标跟踪领域, 将缓冲算子与数据融合技术相结合, 仿真结果表明该方法能改善和提高雷达系统的跟踪精度; [11-12] 利用弱化算子对我国能源消费进行了短期预测.

现有的大量缓冲算子结构都是固定不变的, 导致其作用强度不能被有效控制. 文献[8]提出的变权缓冲算子虽然在一定程度上解决了该问题, 但其构成只包含 $x(k)$ 和 $x(n)$, 其余数据并未体现在算子中, 损失了大量的有用信息. 本文将可变参数引入弱化缓冲算子, 构造一类含参数强化缓冲算子, 主要包括幂平均强化缓冲算子(PASBO)、几何幂平均强化缓冲算子(GPASBO)、加权幂平均强化缓冲算子(WPASBO)以及加权几何幂平均强化缓冲算子(WGPASBO), 并研究其性质和可变参数的不同取值和作用强度的关系.

2 幂弱化缓冲算子及其性质研究

2.1 幂弱化缓冲算子的构造

首先在灰色系统缓冲算子公理体系下构造一系列幂弱化缓冲算子.

定理 1 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, 令

$$XD_1 = (x(1)d_1, x(2)d_1, \dots, x(n)d_1).$$

其中

$$x(k)d_1 = \left(\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{1/\beta},$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \beta \neq 0.$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_1 皆为弱化缓冲算子. 并称 D_1 为幂平均弱化缓冲算子(PAWBO).

证明 容易验证, D_1 满足缓冲算子三公理, 因此 D_1 为缓冲算子.

1) 当 X 为单调增长序列时, 因为

$$x(k)d_1 = \left(\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{1/\beta} \geq$$

$$\left(\frac{1}{n-k+1} (n-k+1)(x(k))^\beta \right)^{1/\beta} = x(k),$$

则 $x(k)d_1 \geq x(k)$. 即当 X 为单调增长序列时, D_1 为弱化缓冲算子.

2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_1 为弱化缓冲算子.

3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n,$$

$$x(h) = \min x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n.$$

由于

$$x(l)d_1 = \left(\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{1/\beta} \leq$$

$$\left(\frac{1}{n-k+1} (n-k+1)(x(l))^\beta \right)^{1/\beta} = x(l),$$

有 $x(l)d_1 \geq x(l)$. 同理可证 $x(h)d_1 \geq x(h)$. 因此当 X 为振荡序列时, D_1 为弱化缓冲算子. 由此定理得证. \square

定理 2 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, 令

$$XD_2 = (x(1)d_2, x(2)d_2, \dots, x(n)d_2).$$

其中

$$x(k)d_2 = \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-k+1)}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \beta \neq 0.$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_2 皆为弱化缓冲算子. 并称 D_2 为几何幂平均弱化缓冲算子(GPAWBO).

证明 容易验证, D_2 满足缓冲算子三公理, 因此 D_2 为缓冲算子.

1) 当 X 为单调增长序列时, 因为

$$x(k)d_2 =$$

$$\left((x(k))^\beta (x(k+1))^\beta \dots (x(n))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-k+1)}} \geq$$

$$\left((x(k))^\beta (x(k))^\beta \dots (x(k))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-k+1)}} = x(k). \quad (1)$$

2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_2 为弱化缓冲算子.

3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n,$$

$$x(h) = \min x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n.$$

由于

$$x(l)d_2 =$$

$$\left((x(l))^\beta (x(l+1))^\beta \dots (x(n))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-l+1)}} \geq$$

$$\left((x(l))^\beta (x(l))^\beta \dots (x(l))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-l+1)}} = x(l). \quad (2)$$

有 $x(l)d_2 \leq x(l)$. 同理可证 $x(h)d_2 \geq x(h)$. 因此, 当 X 为振荡序列时, D_2 为弱化缓冲算子. 由此定理得证. \square

定理 3 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, 令

$$XD_2 = (x(1)d_2, x(2)d_2, \dots, x(n)d_2).$$

其中

$$x(k)d_2 = \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-k+1)}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \beta \neq 0.$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_2 皆为弱化缓冲算子. 并称 D_2 为几何幂平均弱化缓冲算子 (GPAWBO).

设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, D_1 为 PAWBO, D_2 为 GPAWBO, 则有

$$\left(\prod_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-k+1)}} = x(k)d_2 \leq$$

$$x(k)d_1 = \left(\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{1/\beta},$$

$$\beta \neq 0, k = 1, 2, \dots, n,$$

当且仅当 $x(1) = x(2) = \dots = x(n)$, 即数据序列为常数序列.

证明 直接利用算术平均数大于几何平均数的不等式关系, 可知定理结论成立. 有时系统行为数据序列的重要程度还与各时点有关, 假设各时点的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. \square

定理 4 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, 设各时点的权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \geq 0, \omega_n \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$. 令

$$XD_3 = (x(1)d_3, x(2)d_3, \dots, x(n)d_3).$$

其中

$$x(k)d_3 = \left(\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta \right)^{1/\beta},$$

$$\beta \neq 1, k = 1, 2, \dots, n.$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_3 皆为弱化缓冲算子, 并称 D_3 为加权幂平均弱化缓冲算子 (WPAWBO).

证明 容易验证, D_3 满足缓冲算子三公理, 因此 D_3 为缓冲算子.

1) 当 X 为单调增长序列时, 因为对于任意 k 有

$$x(k)d_3 = \left(\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta \right)^{1/\beta} \geq$$

$$\left(\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^\beta \right)^{1/\beta} = x(k),$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_3 为弱化缓冲算子.

2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_3 为弱化缓冲算子.

3) 当 X 为振荡序列时

$$x(l) = \max x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n,$$

$$x(h) = \min x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n.$$

由于

$$x(l)d_3 = \left(\frac{1}{\sum_{i=l}^n \omega_i} \sum_{i=l}^n \omega_i (x(i))^\beta \right)^{1/\beta} \geq$$

$$\left(\frac{1}{\sum_{i=l}^n \omega_i} \sum_{i=l}^n \omega_i (x(l))^\beta \right)^{1/\beta} = x(l),$$

有 $x(l)d_3 \leq x(l)$. 同理可证 $x(h)d_3 \geq x(h)$. 因此当 X 为振荡序列时, D_3 为弱化缓冲算子. 由此定理得证. \square

定理 5 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负的系统行为数据序列, 各时点的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \geq 0, \omega_n \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$. 令

$$XD_4 = (x(1)d_4, x(2)d_4, \dots, x(n)d_4).$$

其中

$$x(k)d_4 = \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^{\beta \omega_i} \right)^{\left(1/\beta \sum_{i=k}^n \omega_i\right)},$$

$$\beta \neq 1, k = 1, 2, \dots, n.$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_4 皆为弱化缓冲算子, 并称 D_4 为加权几何幂平均弱化缓冲算子 (WGPAWBO).

证明 容易验证, D_4 满足缓冲算子三公理, 因此 D_4 为缓冲算子.

1) 当 X 为单调增长序列时, 因为对于任意 k 有

$$x(k)d_4 = \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^{\beta \omega_i} \right)^{\left(1/\beta \sum_{i=k}^n \omega_i\right)} \geq$$

$$\left(\prod_{i=k}^n (x(k))^{\beta \omega_i} \right)^{\left(1/\beta \sum_{i=k}^n \omega_i\right)} = x(k),$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_4 为弱化缓冲算子.

2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_4 为弱化缓冲算子.

3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n,$$

$$x(h) = \min x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n,$$

由于

$$x(l)d_4 = \left(\prod_{i=l}^n (x(i))^{\beta \omega_i} \right)^{\left(1/\beta \sum_{i=l}^n \omega_i\right)} \geq$$

$$\left(\prod_{i=l}^n (x(l))^{\beta \omega_i} \right)^{\left(1/\beta \sum_{i=l}^n \omega_i\right)} = x(l),$$

有 $x(l)d_4 \leq x(l)$. 同理可证 $x(h)d_4 \geq x(h)$. 因此

当 X 为振荡序列时, D_4 为弱化缓冲算子. 由此定理得证. \square

2.2 幂弱化缓冲算子的性质

性质 1 当 $\omega = (1, 1, \dots, 1)$, 即 $\omega_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 有

$$x(k)d_4 = \left(\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta \right)^{1/\beta} = \left(\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{1/\beta} = x(k)d_1.$$

即幂平均弱化缓冲算子 (PAWBO) 是加权幂平均弱化缓冲算子 (WPAWBO) 的特例.

性质 2 当 $\omega = (1, 1, \dots, 1)$, 即 $\omega_i = 1$ 时, 有

$$x(k)d_4 = \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^{\beta \omega_i} \right)^{\left(1/\beta \sum_{i=k}^n \omega_i\right)} = \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^\beta \right)^{\frac{1}{\beta(n-k+1)}} = x(k)d_2, \quad \beta \neq 1, k = 1, 2, \dots, n.$$

即几何幂平均弱化缓冲算子 (GPAWBO) 是加权几何幂平均弱化缓冲算子 (WGPAWBO) 的特例.

性质 3 当 $\beta = 1$ 时, PAWBO 退化为文献 [1] 构造的平均弱化算子 (AWBO); GPAWBO、WPAWBO、WGPAWBO 分别退化为文献 [2] 构造的几何平均弱化算子 (GAWBO)、加权平均弱化算子 (WAWBO) 和加权几何平均弱化算子 (WGAWBO).

性质 4 当 WPAWBO 和 WGPAWBO 中的参数 β 和时间权重 ω 取不同值时, 它们均可退化为文献 [3-8] 所构造的各类弱化缓冲算子.

由此可见, 本文构造的幂弱化缓冲算子与现有的各类弱化缓冲算子之间存在紧密的联系, 现有的各类弱化缓冲算子都是本文所构造的幂弱化缓冲算子的特例, 只要处理好参数的选取问题, 幂弱化缓冲算子的应用范围完全可以覆盖已有的各类弱化缓冲算子.

性质 5 当 $\beta \rightarrow 0$ 时, PAWBO 退化为 GAWBO, WPAWBO 退化为 WGAWBO.

证明 仅证明加权的情形. 因为

$$x(k)d_4 = \left(\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta \right)^{1/\beta} = x(k) = \exp \left\{ \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta \right) \right\},$$

所以由洛毕达法则可知

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{i=k}^n \ln(x(i)) \left(\frac{\omega_i (x(i))^\beta}{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta} \right).$$

又因为

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\omega_i (x(i))^\beta}{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta} \right) = \frac{\omega_i}{\sum_{i=k}^n \omega_i},$$

所以

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{i=k}^n \ln(x(i)) \left(\frac{\omega_i (x(i))^\beta}{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(i))^\beta} \right) = \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i \ln(x(i)) = \ln \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^{\omega_i} \right)^{\left(1/\sum_{i=k}^n \omega_i\right)}.$$

因此有

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} x(k)d_4 = \exp \left\{ \ln \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^{\omega_i} \right)^{\left(1/\sum_{i=k}^n \omega_i\right)} \right\} = \left(\prod_{i=k}^n (x(i))^{\omega_i} \right)^{\left(1/\sum_{i=k}^n \omega_i\right)}.$$

即 WPAWBO 退化为 WGAWBO.

令 $\omega = (1, 1, \dots, 1)$, 即 $\omega_i = 1$, 则有

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} x(k)d_1 = \left(\prod_{i=k}^n x(i) \right)^{\frac{1}{n-k+1}}.$$

即 PAWBO 退化为几何平均弱化缓冲算子 GAWBO. \square

性质 6 对于给定的 k 和权向量 $\omega = \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n$, 设函数 $f(\beta) = x(k)d_4$, $\beta \neq 1$, 则 $f(\beta)$ 为 β 的单调递增函数.

证明 由性质 5 可知, $\lim_{\beta \rightarrow 0} x(k)d_4$ 存在, 因此, 函数 $f(\beta) = x(k)d_4$ 为连续函数, 根据文献 [13] 可知, $f(\beta)$ 为 β 的单调递增函数. \square

性质 7 对于给定的 k , 设函数 $f(\beta) = x(k)d_1$, $\beta \neq 1$, 则 $f(\beta)$ 为 β 的单调递增函数.

证明 将 $\omega_k = 1 (k = 1, 2, \dots, n)$ 直接代入性质 6 即可得证. \square

2.3 参数 β 与幂弱化缓冲算子作用强度的定性关系分析

由以上性质可见, 本文构建的几种幂弱化缓冲算子与经典弱化缓冲算子之间存在着紧密的联系. 参数 β 具有调节弱化缓冲算子的作用强度的功能, 但对于不同类型序列的作用效果的变化方向并不相同.

对于单调增长序列, 弱化算子的作用使得数据

膨胀, 弱化缓冲作用序列的增长速度比原始数据序列的增长速度减缓. 弱化算子使得增长速度减缓的幅度越大, 说明弱化算子的作用强度越大, 反之, 则越小. 因此, 根据性质5可知, 幂平均弱化算子对单调增长序列的作用强度与 β 的取值同方向变化. 如果要使其弱化速度慢一点, 就可以使用较小的参数 β , 特殊情形是使用WGAWBO, 即 $\beta \rightarrow 0$; 如果要使其弱化速度快一点, 就可以用较大的参数 β , 特殊情形是使用WAWBO, 即 $\beta = 1$. 根据实际需要, 也可以取 $\beta > 1$, 以便获得更快的调整速度.

对于单调衰减序列, 弱化算子的作用使得数据萎缩, 弱化缓冲作用序列的衰减速度比原始数据序列的衰减速度减缓. 弱化算子使得衰减速度减缓的幅度越大, 说明弱化算子的作用强度越大, 反之, 则越小. 因此, 幂平均弱化算子对单调衰减序列的作用强度与 β 的取值反方向变化. 如果要使其弱化速度慢一点, 就可以使用较大的参数 β , 特殊情形是使用WAWBO, 即 $\beta = 1$; 如果要使其弱化速度快一点, 就可以使用较小的参数 β , 特殊情形是使用WGAWBO, 即 $\beta \rightarrow 0$. 根据实际需要, 也可以取 $\beta < 0$, 以便获得更快的调整速度.

对于同一类弱化算子, 也可以根据“新息优先”的原则, 对各时点的不同权重进行适当调整弱化速度, 从而提高预测模型的精度.

2.4 参数 β 的确定

在实际应用中, 可通过模拟精度的比较来选取适当的 β 值, 用于调节缓冲算子对序列的作用强度; 另一方面也可基于一定的误差最小化准则, 采用智能优化算法(如粒子群算法、遗传算法等), 以求得最优的 β 值, 用于调节缓冲算子对序列的作用强度.

3 应用实例

本节以江西省工业废水排放达标率2000年~2005年的数据(来源于2001年~2006年《中国统计年鉴》): $X = (68.63, 75.9, 77.59, 83.06, 88.66, 92.13)$ (单位为%)为例, 说明幂平均弱化缓冲算子在预测过程中的作用.

工业废水排放达标率是指某一个地区工业废水排放达标量占其工业废水排放总量的百分比. 随着地区经济结构的升级、工业生产技术的进步以及环保政策的实施, 该指标取值的总体趋势是逐步提高的, 且上限值为100%. 目前我国31个省、市、自治区工业废水排放达标率还没有一个达到100%, 根据国家统计局公布的数据, 2008年天津市的工业废水排放达标率高达99.9%, 居于全国首位.

从原始数据序列可以发现, 2000年~2005年江西省工业废水排放达标率的增长速度较快, 每年

均增长速度在6%以上, 根据经验, 在该指标值达到90%以上以后将难以维系这样的增长速度.

现在假设预测人员在2005年末预测2006年和2007年的江西省工业废水排放达标率. 如果直接利用原始数据建立GM(1,1)模型, 可得如下时间响应:

$$\hat{x}(k+1) = 1395.23e^{0.52325k} - 1326.60, k = 1, 2, \dots, 7.$$

尽管该模型的平均模拟误差仅为0.92%, 但对2006年和2007年的预测值分别高达为97.36%和102.59%. 以江西省2006年的经济结构和工业生产技术水平, 难以在2006年达到97.36%, 更重要的是2007年的预测值已经超过100%, 这显然不符合客观事实. 这也说明: 具有较高模拟精度的模型不一定具有较高的预测精度. 因此, 要进行若干年后江西省工业废水排放达标率的预测, 必须要弱化序列的增长趋势. 这里利用PAWBO对原始序列进行处理, 其实际意义相当于将2005年以后江西省工业废水排放达标率继续增长的阻碍因素作用于2005年以前的数据. 利用幂平均弱化缓冲算子作用后的序列为

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \dots, x(6)d).$$

其中

$$x(k)d = \left(\frac{1}{6-k+1} ((x(k))^\beta + (x(k+1))^\beta + \dots + (x(6))^\beta) \right)^{1/\beta},$$

$$\beta \neq 0, k = 1, 2, \dots, 6.$$

当 $\beta = 1$ 时, PAWBO为经典的AWBO. 将 β 分别取为1, 2, \dots , 10, 并将经算子作用后的序列记为 XD_β , 可得以下序列:

$$XD_1 = (81.00, 83.47, 85.36, 87.95, 90.40, 92.13);$$

$$XD_2 = (81.38, 83.70, 85.54, 88.03, 90.41, 92.13);$$

$$XD_3 = (81.76, 83.93, 85.72, 88.11, 90.43, 92.13);$$

$$XD_4 = (82.13, 84.16, 85.89, 88.19, 90.44, 92.13);$$

$$XD_5 = (82.49, 84.39, 86.06, 88.26, 90.46, 92.13);$$

$$XD_6 = (82.84, 84.61, 86.22, 88.34, 90.48, 92.13);$$

$$XD_7 = (83.18, 84.83, 86.39, 88.41, 90.49, 92.13);$$

$$XD_8 = (83.50, 85.05, 86.54, 88.48, 90.51, 92.13);$$

$$XD_9 = (83.81, 85.26, 86.70, 88.56, 90.53, 92.13);$$

$$XD_{10} = (84.11, 85.46, 86.84, 88.63, 90.54, 92.13).$$

分别基于 $XD_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 建立10个GM(1,1)模型, 时间响应式分别为

$$XD_1: \hat{x}(k+1) = 3239.98e^{0.025429k} - 3158.99,$$

$$XD_2: \hat{x}(k+1) = 3346.93e^{0.024691k} - 3265.54,$$

$$\begin{aligned}
 XD_3 : \hat{x}(k+1) &= 3459.55e^{0.023959k} - 3377.99, \\
 XD_4 : \hat{x}(k+1) &= 3577.85e^{0.023236k} - 3495.72, \\
 XD_5 : \hat{x}(k+1) &= 3701.76e^{0.022524k} - 3619.27, \\
 XD_6 : \hat{x}(k+1) &= 3831.20e^{0.021826k} - 3748.35, \\
 XD_7 : \hat{x}(k+1) &= 3966.03e^{0.021143k} - 3882.86, \\
 XD_8 : \hat{x}(k+1) &= 4106.11e^{0.020478k} - 4022.61, \\
 XD_9 : \hat{x}(k+1) &= 4251.29e^{0.019832k} - 4167.44, \\
 XD_{10} : \hat{x}(k+1) &= 4410.23e^{0.019205k} - 4317.13, \\
 &k = 1, 2, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

取 $k = 1, 2, \dots, 5$ 可得模型的模拟值, 经检验, 以上10个模型的平均模拟误差均小于0.3%, 由于缓冲算子的主要作用在于提高预测精度, 这里不再列出具体的模拟值及其误差. 取 $k = 6, 7$ 即可得到2006年和2007年江西省工业废排放达标率的预测值. 从2007年和2008年的《中国统计年鉴》中可得2006年和2007年江西省工业废排放达标率的实际数据分别为93.23%和93.89%, 进而可以计算1步预测和2步预测的相对误差. 对应不同的 β 取值, 1步预测和2步预测的预测值及相对误差如表1所示.

表1 对应不同 β 值的幂弱化算子预测值和相对误差 %

β 值	1步预测(2006年)		2步预测(2007年)	
	预测值	相对误差	预测值	相对误差
1	94.76	1.64	97.2	4.26
2	94.66	1.53	97.03	4.08
3	94.57	1.44	96.86	3.89
4	94.47	1.33	96.69	3.71
5	94.38	1.23	96.53	3.54
6	94.29	1.14	96.37	3.37
7	94.20	1.04	96.21	3.20
8	94.11	0.94	96.06	3.04
9	94.03	0.86	95.91	2.87
10	93.95	0.77	95.77	2.72

注1 相对误差的计算公式为

$$\varepsilon(k) = \frac{|\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)} \times 100\%, \quad k = 7, 8.$$

由表1可以看出, 采用幂弱化缓冲算子作用之后的预测结果与江西省工业废排放达标率的实际数据基本吻合. 随着 β 的逐步增大, 2006年的预测误差由0.93% ($\beta = 1$) 下降到0.06% ($\beta = 10$), 2007年的预测误差也由4.54% ($\beta = 1$) 下降为3% ($\beta = 1$). 这就说明, 在本例中经典的AWBO ($\beta = 1$) 的弱化强度还不够大. 由图1可以直观地看到, 随着 $\beta = 1$ 的逐步增大, 经幂弱化缓冲算子作用之后的预测误差呈现出直线下降的态势.

由此可见, 幂平均弱化缓冲算子对于前半部分

增长速度较快, 后半部分增长速度较慢的原始数据序列的作用有助于提高预测精度; 同样, 对于单调衰减的序列, 幂平均弱化缓冲算子对于前半部分衰减速度较快, 后半部分衰减速度较慢的原始数据序列的作用仍然有助于提高预测精度, 在此不再赘述.

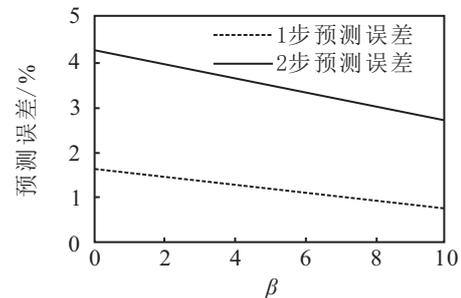


图1 幂弱化算子预测误差与 β 值的关系

另一方面, 采用遗传算子在平均相对误差最小化的准则下, 对参数进行优化的结果为 $\beta = 31.14805$, 由此可得强化缓冲序列为

$$XD = (87.82, 88.34, 88.97, 90.87, 92.13).$$

在此基础上建立GM(1,1)模型预测6月份和7月份销售额, 预测模型的时间响应函数为

$$\hat{x}(k+1) = 8289.94175e^{0.0105627k} - 8211.1212.$$

取 $k = 6, 7$ 的预测结果为 $\hat{x}(7) = 92.90$, $\hat{x}(8) = 93.89$, 预测精度分别高达为99%和100%.

4 结论

经典弱化缓冲算子是幂弱化缓冲算子的特殊情形. 因为幂平均弱化算子中的参数 β 与作用强度有着同向(单调递增序列)或反向(单调递减序列)变化的关系, 所以, 在应用幂平均弱化算子时, 可通过调整参数 β 值来实现算子对序列作用强的不断调整, 以获得更高的预测精度, 这也是幂缓冲弱化算子的主要优点.

现有文献中的大量应用实例都验证了缓冲算子可有效地消除冲击扰动因素对预测结果的影响. 但如何客观地评判缓冲算子以及灰色预测模型的有效性, 还有待于进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Liu Si-feng. The three axioms of buffer operator and their application[J]. The J of Grey System, 1991, 3(1): 39-48.
- [2] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 关于弱化缓冲算子的研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 108-111.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. Study on the weakening buffer operators and researches[J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(2): 108-111.)
- [3] 吴正朋, 刘思峰, 崔立志. 基于不动点的新弱化缓冲算子的研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(12): 1805-1809.
(Wu Z P, Liu S F, Cui L Z. Study on the sequence of

- weakening buffer operator based on back cumulative-sum method[J]. Control and Decision, 2009, 24(12): 1805-1809.)
- [4] 吴正册, 刘思峰, 米传民, 等. 基于反向累积法的弱化缓冲算子序列研究[J]. 中国管理科学, 2009, 17(3): 136-141.
(Wu Z P, Liu S F, Mi C M. Study on the sequence of weakening buffer operator based on back cumulative-sum method[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(3): 136-141.)
- [5] 崔立志, 刘思峰, 吴正册. 关于新的弱化缓冲算子的研究及其应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1252-1256.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. Study on new weakening buffer operators and their application[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1252-1256.)
- [6] 崔杰, 党耀国. 一类新的弱化缓冲算子的构造及其应用[J]. 控制与决策, 2008, 23(7): 741-744.
(Cui J, Dang Y G. A kind of new weakening buffer operators and their applications[J]. Control and Decision, 2008, 23(7): 741-744.)
- [7] 罗党, 孙利. 一类弱化缓冲算子研究[J]. 华北水利水电学院学报, 2010, 31(4): 147-149.
(Luo D, Sun L. Study on a class of weakening buffer operator [J]. J of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2010, 31(4): 147-149.)
- [8] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 变权缓冲算子及其作用强度的研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1218-1222.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Study on buffer operators with variable weights and their effect Strength to original sequence[J]. Control and Decision, 2009, 24 (8): 1218-1222.)
- [9] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 缓冲算子的光滑性[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1643-1649.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. The smoothness of buffer operators[J]. System Engineering Theory and Practice, 2010, 30(9): 1643-1649.)
- [10] 刘以安, 陈松灿, 张明俊, 等. 缓冲算子及数据融合技术在目标跟踪中的应用[J]. 应用科学学报, 2006, 24(2): 154-158.
(Liu Y A, Chen S C, Zhang M J. Application of Buffer Operator and Data Fusion in Target Trackin[J]. J of Applied Science, 2006, 24(2): 154-158.)
- [11] 尹春华, 顾培亮. 基于灰色序列生成中缓冲算子的能源预测[J]. 系统工程学报, 2003, 18(2): 189-192.
(Yin C H, Gu P L. Energy forecast based on gray series spanning buffering operator[J]. J of Systems Engineering, 2003, 18(2): 189-192.)
- [12] 高岩, 周德群, 刘晨琛. 基于指数型新弱化缓冲算子的能源需求预测[J]. 管理学报, 2010, 7(8): 1211-1215.
(Gao Y, Zhou D Q, Liu C C. Energy requirement forecast based on the new weakening buffer operators with exponential type[J]. Chinese J of Management, 2010, 7(8): 1211-1215.)
- [13] 安宁宁, 韩兆洲. 几种统计平均数大小关系证明的新方法及其推广[J]. 统计与决策, 2006, (7): 141-142.
(An N N, Han Z Z. New methods for the proof of the size relationship of several average and their promotion[J]. Statistics and Decision, 2006, (7): 141-142.)