

文章编号: 1001-0920(2012)09-1376-05

一种结合信噪比的独立成分分析算法

万俊, 张晓晖, 饶炯辉, 胡清平

(海军工程大学 兵器工程系, 武汉 430033)

摘要: 针对传统独立成分分析算法存在的不足, 在简要介绍独立成分分析的基本原理和相关算法的基础上, 提出一种结合负熵与信噪比的独立成分分析法. 推导了算法的关键公式, 给出了实现算法, 并进行了计算机仿真实验, 分别使用传统算法和改进算法对模拟产生的合成数据进行分离. 通过对实验结果进行的计算分析表明了所提出的改进算法比基于负熵的传统算法具有更佳的信号分离能力, 能更好地从混合信号中估计出源信号.

关键词: 盲源分离; 独立成分分析; 负熵; 信噪比

中图分类号: TN911.72

文献标志码: A

An independent component analysis algorithm using signal noise ratio

WAN Jun, ZHANG Xiao-hui, RAO Jiong-hui, HU Qing-ping

(Department of Weapon Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China. Correspondent: WAN Jun, E-mail: wanjun198524@163.com)

Abstract: An independent component analysis(ICA) algorithm based on the combination of negentropy and signal noise ratio(SNR) is presented to solve the deficiency of traditional ICA method after the introduction of principle and algorithm of ICA. The main formulas in the algorithm are elaborated and the idiographic steps of algorithm are given. Then the computer simulation is used to testify the performance of this algorithm. Both the traditional fast ICA algorithm and the presented ICA algorithm are applied to separate the mixed signal data. Experiment results show that the proposed method has better performance on separating signals than the traditional fast ICA algorithm based on negentropy, and can estimate the source signals from the mixed signals more exactly.

Key words: blind source separation; independent component analysis; negentropy; signal noise ratio

1 引言

独立成分分析(ICA)是20世纪90年代发展起来的一种统计信号处理方法,它是在源信号和传输通道参数未知的情况下,以统计独立性为标准,利用各种成分统计特征的差异,将由相互统计独立的源信号混合而成的信号分离为各自独立的信号分量^[1].独立成分分析技术不需知道信号源和各种干扰源的特征,只假设它们是统计独立的便可以来自不同源的混合信号进行分离,是一种常用的盲源分离(BSS)方法,已广泛应用于信号和图像处理^[2-3]、数据压缩^[4]、特征识别^[5]等领域.

目前,除在各领域的应用研究外,还有许多学者对ICA的具体算法进行了研究.文献[6]提出了一种基于自适应人工神经网络的ICA算法,避开了病态矩阵问题,使学习矩阵和独立成分求解的复杂性都有所降低;[7]以峰度作为信号非高斯性的度量,分析了随

着源信号混合程度的不同,混合信号的非高斯性的变化规律,并以此设计了一种ICA的快速直接搜索算法;[8]从随机变量微分熵的概念出发,定义了随机变量的相似度,讨论了用求解相似度极点的方法实现观测数据线性组合非高斯性最大化,并分析了串行估计ICA模型中独立分量的原理和算法;[9]中提出了核独立成分分析的概念,通过核函数将信号数据向量映射到一个可再生的核希尔伯特空间,与互信息理论相结合,通过典型相关分析对数据进行分离,相比于传统的ICA方法,其分离效果更佳.本文则在简要介绍独立成分分析原理和相关算法的基础上,引入与估计信号有关的因子,将负熵与信噪比相结合,提出了一种改进的ICA算法.

2 独立成分分析问题描述

独立成分分析是一种从多维统计数据中寻找其内在的统计独立成分,从混合信号中提取出相互独立

收稿日期: 2011-04-06; 修回日期: 2011-07-08.

作者简介: 万俊(1985-),男,博士生,从事水下激光探测的研究; 张晓晖(1966-),女,教授,博士生导师,从事水下激光探测、水中激光通信等研究.

的原始信号成分的方法^[10]. 其一般线性模型为

$$X(t) = AS(t). \quad (1)$$

其中: $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 为 M 维观测信号向量; $S(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)]^T$ 为 N 维源信号向量, 即存在 N 个独立信号源; A 为 $M \times N$ 阶满秩混合矩阵, 且 $N \leq M$.

独立成分分析的目的在于信号源 S 和混合矩阵 A 均未知的条件下, 通过 X 寻找变换矩阵 W , 使得 X 通过 W 后得到的输出 Y 是信号源 S 的估计, 即

$$Y(t) = WX(t) = WAS(t) \approx S(t), \quad (2)$$

其中 $Y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)]^T$ 为信号源的估计. 理想情况下, 当 $M = N$ 时, $W = A^{-1}$, $Y(t) = S(t)$. 一般情况下, 信号源和混合矩阵都是未知的, 因此难以求得分析解, 大都通过一些假设和约束条件求得一个变换矩阵 W , 使得经过式 (2) 得到的输出向量 $Y(t)$ 是源信号向量 $S(t)$ 的最优逼近.

3 独立成分分析求解算法

3.1 独立性度量函数

独立成分分析算法的一个重要步骤是构造或选取度量信号独立性的函数. 由式 (2) 可知, 最终计算得到的 Y 的每一个分量, 实际上是向量 S 中各源信号的线性组合. 假设各个源信号之间相互独立, 则由中心极限定理可知, 多个独立随机变量的混合信号更趋近于高斯分布, 可以使用输出信号 Y 的非高斯性作为信号之间独立性的度量, 因此 ICA 问题的求解便可转化为使得最终结果 Y 非高斯性最大化的问题.

目前, 主要使用的非高斯性度量函数包括峭度和负熵. 但峭度对野值极其敏感, 峭度的值可能只取决于分布于边缘的少量观测值, 而这些观测值可能是错误的或者是与问题无关的, 即峭度的鲁棒性较差. 因此, 许多情况下都使用负熵来度量非高斯性.

熵是信息论的基本概念, 也是随机变量不确定性的度量, 定义如下:

$$H(y) = - \int p(y) \log p(y) dy. \quad (3)$$

一组随机变量的相互独立性越强, 这组变量的熵值越大. 信息论中指出, 在具有相同方差的随机变量中, 高斯变量具有最大的熵. 因此, 定义负熵作为一个非负的量值来度量变量的非高斯性, 即

$$J(y) = H(y_{\text{gauss}}) - H(y). \quad (4)$$

其中: y_{gauss} 是与 y 具有相同相关矩阵的高斯随机向量, 即 $H(y_{\text{gauss}})$ 为最大熵值.

3.2 FastICA 算法

Aapo 等^[10]提出了负熵的几种近似计算, 并在此基础上提出基于负熵的快速不动点算法, 即 FastICA

算法^[11]. 其迭代计算步骤如下:

Step 1: 对数据进行中心化, 使其均值为 0.

Step 2: 对数据进行白化, 得到 X .

Step 3: 令 $W = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$, 初始化各向量, 使其具有单位范数, 并从中选取某一向量作为初始向量 w_i . 若非提取第一个独立成分, 则通过下式减去已提取出的独立成分的投影:

$$w_i = w_i - \sum_{j=1}^{i-1} (w_i^T w_j) w_j, \quad (5)$$

以保证每次所估计的都是不同的独立成分.

Step 4: 更新 w_i , 具体公式为

$$w'_i \leftarrow E\{Xg(w_i^T X)\} - E\{g'(w_i^T X)\}w_i. \quad (6)$$

其中函数 g 可取以下形式:

$$g_1(y) = y \exp(-y^2/2), \quad (7)$$

$$g_2(y) = y^3. \quad (8)$$

Step 5: 设置阈值 ε . 若

$$|w_i'^T w_i| - 1 > \varepsilon,$$

则返回 Step 4; 否则, 通过 $y_i^T = w_i^T X$ 估计出一个独立成分并继续计算其他向量 w , 直至所有独立成分都被估计出来.

4 改进的盲源分离算法

FastICA 算法虽然收敛速度很快, 但分离精度稍差, 每次得到的结果存在一定的随机性. 为此, 本文将负熵函数乘以一个与感兴趣信号有关的信噪比因子作为信号独立性的度量函数来改进盲源分离算法. 对于结合了信噪比与负熵的度量函数, 从算法的基本思想上就要求最终的分离信号不但是独立的, 而且各源信号之外的噪声含量小, 即信号还原精度高. 信噪比的定义计算公式如下:

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{\sum_{i=1}^N (s_i - y_i)^2}. \quad (9)$$

文献 [12] 曾提出一种基于最大信噪比的盲源分离算法, 文中的信噪比的计算公式为

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{yy^T}{(y' - y)(y' - y)^T}. \quad (10)$$

其中 $y'(t) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^p y(t-i)$, p 取小于 100 的整数. 可以看出, 为简化计算, 式 (10) 的分子部分使用估计信号 y 代替了源信号, 但在分离 2 个亚高斯的混合信号时, 这种简化会使算法的分离效果急速下降, 甚至严重失效^[13]. 因此, 仍应使用估计信号的滑动平均 y' 来代替源信号.

另一方面,根据前面的假设条件, y 是含多个估计信号元素的列向量,所以 yy^T 和 $(y'-y)(y'-y)^T$ 为 $N \times N$ 维的矩阵,式中的2个矩阵先进行除法运算再求对数,得到的结果仍是矩阵,显然不是信噪比应得到的计算结果,因此文献[12]的计算是错误的.通过分析,本文给出了正确的计算过程.根据前面的假设条件,有 $y_i^T = w_i^T X$,简化方程去掉下标可得 $y^T = w^T X$.

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \\ 10 \lg \frac{y'^T y'}{(y' - y)^T (y' - y)} &= \\ 10 \lg \frac{w^T X' X'^T w}{w^T (X' - X)(X' - X)^T w} &= \\ 10 \lg \frac{U}{V} &= 10(\lg U - \lg V). \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} U &= w^T X' X'^T w, \\ V &= w^T (X' - X)(X' - X)^T w. \end{aligned}$$

因此,SNR是一个以 w 和 X 为变量的函数.该函数关于分离向量 w 的向量梯度为

$$\frac{\partial F(w, X)}{\partial w} = 10 \left(\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial w} - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial w} \right). \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial w} &= \frac{\partial w^T (X' - X)(X' - X)^T w}{\partial w}, \\ \frac{\partial U}{\partial w} &= \frac{\partial w^T X' X'^T w}{\partial w}. \end{aligned}$$

根据之前的假设, w 是一个以 $w_i (i=1, 2, \dots, M)$ 为元素的 M 维列向量, w^T 为对应元素组成的行向量, $X(t)$ 为 M 维观测信号向量, $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$,简记为 $X = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T$, x_i 为单路传感器采集信号列向量, X' 为 X 的滑动平均.则经计算可得

$$\begin{aligned} U &= w^T X' X'^T w = \\ w_1^2 x_1'^T x_1' + w_2^2 x_2'^T x_2' + \dots + w_M^2 x_M'^T x_M' &= \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j x_i'^T x_j' & \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \left[\frac{\partial g}{\partial w_1}, \frac{\partial g}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial w_M} \right]^T. \quad (14)$$

式(14)是向量梯度的定义,据此可计算得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial w} &= \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j x_i'^T x_j' \right)}{\partial w} = \\ 2 \left[\sum_{j=1}^M w_j x_1'^T x_j', \sum_{j=1}^M w_j x_2'^T x_j', \dots, \sum_{j=1}^M w_j x_M'^T x_j' \right]^T. \end{aligned} \quad (15)$$

经观察发现,式(15)是矩阵的相乘运算,可进行如下分解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial w} &= 2 \begin{bmatrix} x_1'^T x_1' & x_1'^T x_2' & \dots & x_1'^T x_M' \\ x_2'^T x_1' & x_2'^T x_2' & \dots & x_2'^T x_M' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M'^T x_1' & x_M'^T x_2' & \dots & x_M'^T x_M' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} = \\ 2 \begin{bmatrix} x_1'^T \\ x_2'^T \\ \vdots \\ x_M'^T \end{bmatrix} [x_1' \ x_2' \ \dots \ x_M'] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} &= \\ 2X' X'^T w. & \end{aligned} \quad (16)$$

同理可得

$$\frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\partial w^T (X' - X)(X' - X)^T w}{\partial w} = 2(X' - X)(X' - X)^T w. \quad (17)$$

将上述2个结果代入式(12),可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(w, X)}{\partial w} &= \\ 20 \left(\frac{X' X'^T w}{w^T X' X'^T w} - \frac{(X' - X)(X' - X)^T w}{w^T (X' - X)(X' - X)^T w} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

这里推导出的信噪比函数对 w 的向量梯度将在后面改进盲源分离算法中使用.文献[10]中提出的负熵的近似计算公式如下:

$$J(y) \propto [E\{G(y)\} - E\{G(v)\}]^2. \quad (19)$$

本文建立如下对比度函数:

$$\Psi(w) = [E\{G(y)\} - E\{G(v)\}]^2 E(\text{SNR}). \quad (20)$$

其中: $E\{\}$ 表示期望值运算, $G(\cdot)$ 为任意非二次函数, v 为零均值单位方差高斯变量,通过极大化 $\Psi(w)$ 可得到所需分离的信号.将 $\Psi(w)$ 对 w 求向量梯度,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(w)}{\partial w} &= \\ \frac{\partial [E\{G(y)\} - E\{G(v)\}]^2 E\{10 \lg U - 10 \lg V\}}{\partial w}. \end{aligned} \quad (21)$$

利用向量梯度的计算性质以及前面推导的信噪比函数对 w 的向量梯度,将式(21)整理,可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(w)}{\partial w} &= \\ 20\gamma E\{Xg(w^T X)\} E\{\lg U - \lg V\} + \\ 20\gamma^2 E\left\{ \frac{X' X'^T w}{w^T X' X'^T w} - \frac{(X' - X)(X' - X)^T w}{w^T (X' - X)(X' - X)^T w} \right\} = \\ 20\gamma \left\{ E\{Xg(w^T X)\} E\{\lg U - \lg V\} + \right. \\ \left. \gamma E\left\{ \frac{X' X'^T w}{w^T X' X'^T w} - \frac{(X' - X)(X' - X)^T w}{w^T (X' - X)(X' - X)^T w} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\gamma = E\{G(y)\} - E\{G(v)\}$.该公式可以简化,花括号外的参数 γ 并不改变对应算法规则的稳定点,但其符号却影响其稳定性,因此可用它的符号 $\text{sign}(\gamma)$ 代替其取值,而常数20也可一同忽略,这在本质上不会

影响算法规则的特性. 将信噪比与负熵结合作为度量函数不仅要求分离出的信号是独立的, 而且通过信噪比在运算中对数据的作用, 将提高最终分离信号的准确度. 因此, 可得到一种改进的估计独立成分的梯度算法如下:

算法 1 改进的估计独立成分的梯度算法.

Step 1: 对数据进行中心化, 使其均值为 0.

Step 2: 对数据进行白化, 得到 X .

Step 3: 随机选择一个具有单位范数的初始化 w_i , 并对 γ_i 赋一个初始值. 若非提取第一个独立成分, 则通过下式减去已提取出的独立成分的投影:

$$w_i = w_i - \sum_{j=1}^{i-1} (w_i^T w_j) w_j, \quad (23)$$

以保证每次所估计的都是不同的独立成分.

Step 4: 更新 w_i , 具体公式为

$$\Delta w_i \propto$$

$$\text{sign}(\gamma_i) \left\{ E\{Xg(w_i^T X)\} E\{\lg U - \lg V\} + \right.$$

$$\left. \gamma_i E\left\{ \frac{X'X'^T w_i}{w_i^T X'X'^T w_i} - \frac{(X' - X)(X' - X)^T w_i}{w_i^T (X' - X)(X' - X)^T w_i} \right\} \right\}, \quad (24)$$

$$w_i \leftarrow \frac{w_i + \Delta w_i}{\|w_i + \Delta w_i\|}. \quad (25)$$

Step 5: 通过更新后的 w_i 更新 γ_i , 即

$$\gamma_i \leftarrow E\{G(w_i^T X)\} - E\{G(v)\}. \quad (26)$$

Step 6: 进行 w_i 的收敛判断. 如果尚未收敛, 则返回 Step 4; 若收敛, 则通过 $y_i^T = w_i^T X$ 估计出一个独立成分并继续计算其他 w , 直至所有独立成分被估计出来.

5 仿真验算

5.1 加高斯噪声源的混合信号盲源分离

分别采用 FastICA 算法和本文提出的 ICA 算法对 4 个不同分布的仿真信号进行信号分离对比实验, 输入和输出信号波形分别如图 1~图 4 所示. 其中: 图

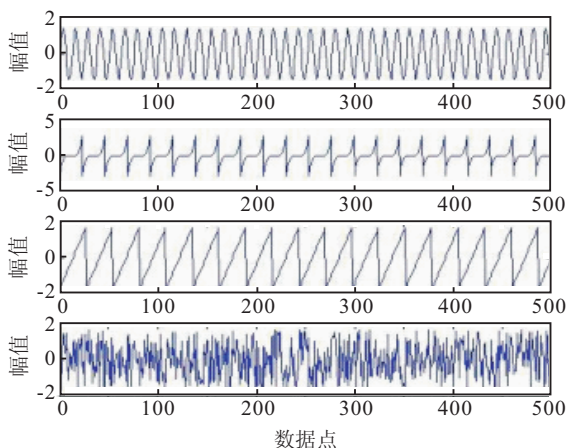


图 1 源信号

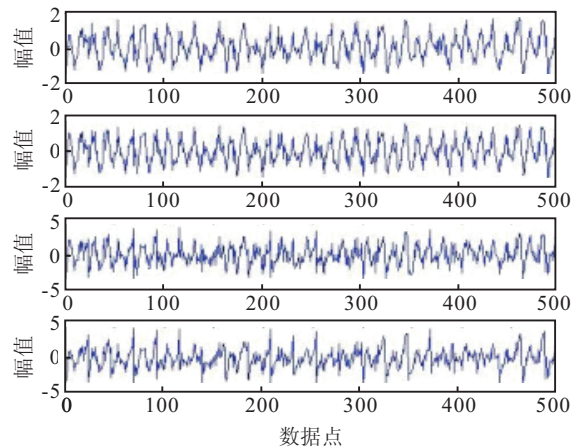


图 2 混合信号

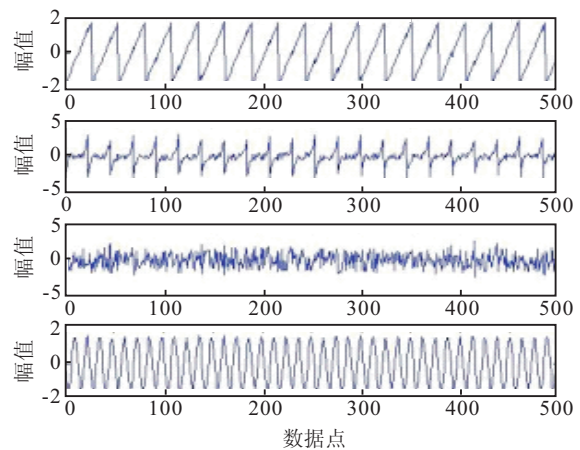


图 3 FastICA 算法分离的估计信号

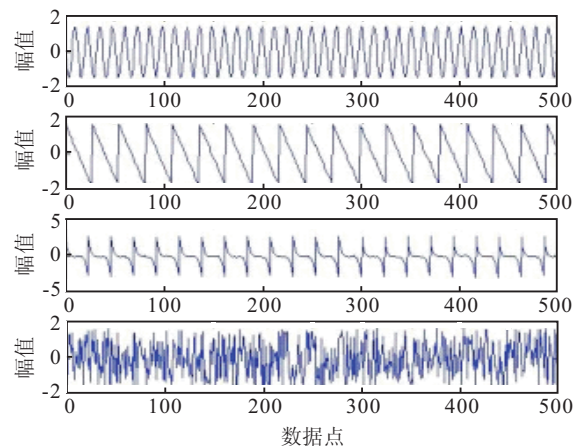


图 4 改进的 ICA 算法分离出的估计信号

1 为 4 个独立的源信号, 分别为正弦波信号、脉冲信号、锯齿波信号和标准正态分布信号; 图 2 为随机产生的矩阵对源信号混合后得到的观测信号; 图 3 为采用 FastICA 算法进行处理后得到的估计信号; 图 4 为采用本文 ICA 算法得到的估计信号.

5.2 结果分析与性能比较

从图 1~图 4 可以看出, 两种 ICA 算法都分离出了大概原始信号, 但分离信号的顺序和极性都发生了变化, 这也是目前独立成分分析尚无法解决的问题.

这里使用均方误差、信噪比和性能指数对两种算法进行定量比较,其定义如下:

1) 均方误差 (MSE)

$$\text{MSE} = \sum_{i=1}^N \frac{(s_i - y_i)^2}{N}; \quad (27)$$

2) 信噪比 (SNR)

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{\sum_{i=1}^N (s_i - y_i)^2}; \quad (28)$$

3) 性能指数 (PI)

$$\text{PI} = \frac{1}{m^2} \left[\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{ik}|} - 1 \right] + \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^m \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{kj}|} - 1 \right] \right], \quad (29)$$

其中 p_{ij} 为 $m \times m$ 维全局矩阵 $P = WA$ 的第 i 行第 j 列的元素. 可以看出, PI 值越小, 算法对混合信号的分离性能越好^[14].

将脉冲信号、锯齿波信号和正弦信号作为源信号, 则 FastICA 的均方误差、信噪比和性能指数分别为 $\text{MSE} = 0.029$, $\text{SNR} = 35.5679 \text{ dB}$, $\text{PI} = 3.448$. 本文 ICA 算法的各项指标分别为 $\text{MSE} = 0.0016$, $\text{SNR} = 64.2580 \text{ dB}$, $\text{PI} = 3.203$. 可以看出, ICA 算法的 3 项性能指标都明显优于 FastICA 算法, 即改进的 ICA 算法优于传统的 FastICA 算法, 具有更佳信号分离效果.

6 结 论

本文在阐述了独立成分分析的基本原理和具体算法的基础上, 结合负熵与信噪比提出了一种改进的 ICA 算法, 并通过计算机仿真验算, 表明了所提出的 ICA 算法相对于传统的基于负熵的 FastICA 算法具有更佳的信号分离性能, 源信号能够被较好地分离出来. 但是, 由于计算过程相比 FastICA 算法复杂, 本文算法在计算速度上仍不如 FastICA 算法的收敛速度快. 因此, 如何提高所提出的 ICA 算法的计算速度尚有待深入研究.

参考文献(References)

- [1] 杨福生, 洪波. 独立分量分析的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 1-2.
(Yang F S, Hong B. The theory and application of independence component analysis[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 1-2.)
- [2] 刘婷婷, 任兴民. 独立分量分析在机械振动信号分离中的应用[J]. 振动、测试与诊断, 2009, 29(1): 36-41.
(Liu T T, Ren X M. Application of independent component

analysis to vibration signal separation of rotational machine[J]. J of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009, 29(1): 36-41.)

- [3] 黄启宏, 王帅, 刘钊. 改进的基于独立成分分析的图像特征提取算法[J]. 光电工程, 2007, 34(1): 122-125.
(Huang Q H, Wang S, Liu Z. Improved algorithm of image feature extraction based on independent component analysis[J]. Opto-Electronic Engineering, 2007, 34(1): 122-125.)
- [4] 冯燕, 何明一, 宋江红. 基于独立成分分析的高光谱图像数据降维及压缩[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(12): 2871-2875.
(Feng Y, He M Y, Song J H. ICA-based dimensionality reduction and compression of hyperspectral images[J]. J of Electronics & Information Technology, 2007, 29(12): 2871-2875.)
- [5] 王大伟, 纪华, 王延杰. 应用复值独立分量分析实现特征融合识别[J]. 光学精密工程, 2009, 17(8): 2024-2031.
(Wang D W, Ji H, Wang Y J. Feature-level fusion recognition based on complex-valued independent component analysis[J]. Optics and Precision Engineering, 2009, 17(8): 2024-2031.)
- [6] 余堃, 蒲红梅, 郑方伟. 自适应多目独立成分分析[J]. 电子科技大学学报, 2007, 36(1): 11-13.
(She K, Pu H M, Zheng F W. Adaptive independent component analysis under multisensing[J]. J of University of Electronic Science and Technology of China, 2007, 36(1): 11-13.)
- [7] 宋友, 邓丽. 独立分量分析的一种剖析方法及其搜索算法[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(8): 2346-2349.
(Song Y, Deng L. Analysis method and search algorithm to ICA[J]. J of System Simulation, 2009, 21(8): 2346-2349.)
- [8] 张旭秀, 邱天爽. 基于随机变量相似度的 ICA 方法[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(9): 2104-2108.
(Zhang X X, Qiu T S. Random variable analogy based ICA method[J]. J of Electronics & Information Technology, 2009, 31(9): 2104-2108.)
- [9] Francis R Bach, Michael I Jordan. Kernel independent component analysis[J]. J of Machine Learning Research, 2002(3): 1-48.
- [10] Aapo Hyvarinen, Juha Karhunen, Erkki Oja. Independence component analysis[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2001: 113-115.
- [11] Aapo Hyvarinen. Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis[J]. IEEE Trans on Neural Network, 1999, 10(3): 626-634.

(下转第1386页)