第 27 卷 第 9 期
Vol. 27 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 9 月
Sep. 2012

文章编号: 1001-0920(2012)09-1337-06

基于直觉模糊集的模糊信息系统模型

朱小栋[a,b], 王恒山[a], 卢 菁[c]

(上海理工大学 a. 信息管理与电子商务系，b. 超网络研究中心，c. 计算机科学与技术系，上海 200093)

摘 要: 首先设计直觉模糊集的真度 λ 截集方法, 并结合该方法提出了基于直觉模糊集的模糊信息系统 IS_I; 然后详细分析了 IS_I 的系统模型和系统的对象可满足性, 证明了 IS_I 是其他信息系统的泛化; 最后提出了 IS_I 的形式化概念分析理论, 并分析了 IS_I 在知识发现和知识推理中的应用. 理论验证和实例分析结果均表明了 IS_I 系统模型在描述客观世界和支持模糊推理方面的正确性和有效性.

关键词: 直觉模糊集；决策逻辑语言；模糊集；信息系统；系统模型

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

Intuitionistic fuzzy set based fuzzy information system model

ZHU Xiao-dong[a,b], *WANG Heng-shan*[a], *LU Jing*[c]

(a. Institute of Information Management & Electronic Business，b. Research Center for Super Network，c. Department of Computer Science & Engineering，University of Shanghai for Science & Technology，Shanghai 200093，China. Correspondent：ZHU Xiao-dong，E-mail：zhuxd81@gmail.com)

Abstract: Firstly, a method of intuitionistic fuzzy sets based truth λ cut sets is presented. Based on this cut sets method, an intuitionistic fuzzy set based fuzzy information system IS_I(intuitionistic fuzzy information system) is proposed. The system model and the objects satisfiability at a given threshold are analyzed in detail. It is proved that IS_I are the generalization of traditional information systems. Finally, an IS_I based formal concept analysis theory is proposed, and the application of IS_I in the knowledge discovery and knowledge reasoning is discussed. Theory analysis and examples show the correction and effectiveness of IS_I in term of real world description and fuzzy reasoning.

Key words: intuitionistic fuzzy set；decision logic language；fuzzy set；information system；system model

1 引 言

近年来, 粒计算作为一种新的信息和知识处理方法, 已引起许多研究者的高度重视, 并在许多领域得到了应用. 1979 年, Zadeh[1]首次介绍了信息粒化的概念, 认为模糊数学理论应是信息粒化计算的主要工具. 然而, 这一概念的提出并没有引起足够的关注. 1982 年, 波兰学者 Pawlak[2]提出了粗糙集理论, 并对决策逻辑语言进行了详细研究, 同时给出了粒计算的一个具体例子.

粗糙集的提出, 使更多的人认识到了信息粒度的重要性. 1997 年, Zadeh[3]重新回顾了信息粒化, 同年, Lin[4]倡导使用粒计算来命名这个日渐成长的研究领域, 引起了许多学者的研究兴趣. Pawlak[5], Liu[6]和 Yao[7-9]等研究了基于粗糙集的信息粒化问题; Lin[4,10]提出了一种基于领域系统的粒计算方法; Zhang 等[11]提出了基于商空间理论的模糊粒度计算方法; Chen 等[12]提出了粒计算的决策逻辑语言, 是对经典决策逻辑语言的扩展.

1986 年, Atanassov[13]提出了直觉模糊集 IFS 的概念: 直觉模糊集是对模糊集的推广, 模糊集实际上是直觉模糊集的特殊情形. 直觉模糊集同时考虑非空集上元素隶属度与非隶属度两方面的信息, 使得直觉模糊集在处理不确定性信息时相比于传统的模糊集具有更强的表达能力和灵活性. Li 等[14-17]对直觉模糊集理论进行了许多研究, 给出了直觉模糊集在决策支持领域的应用; Kong 等[18]则研究了直觉模糊集在数据处理中的应用.

近年来, Zadeh模糊集理论及其在知识处理领域

收稿日期: 2011-04-13；**修回日期:** 2011-07-18.

基金项目: 上海市教委培养优秀青年教师基金项目(Slg10010)；国家自然科学基金项目(71071098)；上海市教育委员会科研创新项目(12YZ103)；上海市重点学科项目(S30504)；教育部人文社会科学基金项目(12YJC870037).

作者简介: 朱小栋(1981−), 男, 讲师, 博士, 从事数据工程与知识工程的研究；王恒山(1948−), 男, 教授, 博士生导师, 从事管理信息系统的研究.

的应用已逐渐成熟, 其局限性也逐渐显现. 国内外学者针对基于IFS的知识处理的研究[19-21]是对传统模糊集研究的合理扩展, 研究基于直觉模糊集的粒计算方法对粒计算理论的发展具有重要意义.

目前, 国内外关于模糊信息系统模型的研究大多应用传统模糊集理论. 对此, 本文提出一种基于直觉模糊集的决策逻辑语言, 该语言是在Pawlak[2,5]经典决策逻辑语言上的泛化, 是对Chen等[12]提出的决策逻辑语言的进一步推广. 实际上, 经典决策逻辑语言和基于模糊集的决策逻辑语言可以作为基于直觉模糊集的决策逻辑语言的特化.

本文首先给出直觉模糊集的定义, 提出基于直觉模糊集的真度截集; 然后提出直觉模糊信息系统 $\mathrm{IS_I}$ 模型, 并分析 $\mathrm{IS_I}$ 系统下的对象可满足性; 最后对 $\mathrm{IS_I}$ 系统进行形式化概念分析, 并给出了 $\mathrm{IS_I}$ 系统在知识发现和知识推理中的应用.

2 直觉模糊集的真度截集

定义 1 设 X 是一个给定论域, 则 X 上的一个直觉模糊集

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle|x\in X\}.$$

其中: $\mu_A:X\to[0,1]$ 表示 A 的隶属函数, $\gamma_A:X\to[0,1]$ 表示 A 的非隶属函数, 且对于 A 上的所有 $x\in X$, $0\leqslant\mu_A(x)+\gamma_A(x)\leqslant 1$ 成立.

当 X 为连续空间时

$$A=\int_X\langle\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle/x,\ x\in X;$$

当 X 为离散空间时

$$A=\sum_{i=1}^{n}\langle\mu_A(x_i),\gamma_A(x_i)\rangle/x_i,$$

$$x_i\in X,\ i=1,2,\cdots,n.$$

直觉模糊集 A 有时简记作

$$A=\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle.$$

显然, 每一个传统模糊集对应于下列直觉模糊子集:

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle|x\in X\},$$

即传统模糊集是 $\gamma_A(x)=1-\mu_A(x)$ 的特例.

对于 X 中的每一个直觉模糊集, 称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数, 它表示 x 对 A 的犹豫程度. 例如 $\langle\mu_A(x)=0.5,\gamma_A(x)=0.3\rangle$, 在投票实例中可解释为, 在100人中有50人赞成, 30人反对, 20人弃权. 显然, 对于每一个 $x\in X, 0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1$; 对于 X 中的每一个一般模糊集 A, 有 $\forall x\in X,\pi_A(x)=0$.

定义 2 X 上一切直觉模糊集的集合称为 X 上直觉模糊集的簇集, 记为 $\mathfrak{F}(X)$.

定义 3 给定论域 X, 设 $A\in\mathfrak{F}(X), x\in X, x$ 在直觉模糊集 A 上的真度映射 $T:X\to[0,1]$, 记为 $T(x)^A$.

$$T(x)^A=\alpha\mu_A(x)+\beta\pi_A(x).$$

其中 α 和 β 称为隶属度的合成权系数和直觉指数的合成权系数, 它根据人们主观想法的不同其含义略有差异. 例如隶属度与非隶属度对称, $\alpha=1,\beta=0.5$, 则 $T(x)^A=\mu_A(x)+0.5\pi_A(x)$. 若 $\pi_A(x)=0$, 则 $T(x)^A=\mu_A(x)$, 此即为 x 在经典模糊集上的真度.

定义 4 给定论域 X, 设 $A\in\mathfrak{F}(X)$, 则给定阈值 $\lambda\in[0,1]$ 时, 直觉模糊集 A 的真度 λ 截集是 $A_\lambda=\{x|T(x)^A\geqslant\lambda\}$.

3 直觉模糊信息系统 $\mathrm{IS_I}$

3.1 $\mathrm{IS_I}$ 系统模型

波兰学者Pawlak等[22]提出的粗糙集理论对决策逻辑语言进行了详细讨论. 简单地说, 决策逻辑语言是一种特殊的经典谓词逻辑, 其语义采用Tarski意义下的模型和可满足性: 信息系统IS是模型, 对符号以及公式进行解释, 如果对象 x 在模型IS的解释下满足公式 ϕ, 则记作 $x\models\phi$. Yao等[23]借助Zadeh提出的广义约束给出了带有语义限制的逻辑语言, 并将其作为一种粒计算的模型. 基于直觉模糊集的优良特性, 本文提出一种拓展的直觉模糊决策逻辑语言IFDL, 其语义采用Tarski意义下的模型和可满足性, 首先设计基于直觉模糊集的广义信息系统 $\mathrm{IS_I}$, 用以构建IFDL语言模型.

信息系统或者信息表是描述有限对象集合的一个方便有效的形式化方法. 经典的信息系统IS可以表示成

$$\mathrm{IS}=\langle U,\mathrm{Attr},\{V_a|a\in\mathrm{Attr}\},\{I_a|a\in\mathrm{Attr}\}\rangle.$$

其中: U 是非空有限对象集合, 构成对象的论域; Attr是非空有限个属性集合; V_a 是对某个 $a\,(a\in\mathrm{Attr})$ 的值域; I_a 是 $U\to V_a$ 上的信息映射, 它指明任一 U 上的对象在 V_a 上唯一确定的值. 1982年Pawlak[2]和Wille[24]分别提出的粗糙集理论和概念格理论都是基于这种"单值"信息系统.

Orlowska等[25]研究了多值信息系统 $\mathrm{IS_M}$, 对于任意 $x\in U, I_a(x)$ 是 V_a 的子集, 即 $I_a(x)\subseteq V_a$. Quafafou提出的粗糙集理论是一种程度化的单值信息系统 $\mathrm{IS_D}$, 在该系统中, I_a 是 $U\to V_a\times[0,1]$ 上的映射, $I_a(x)=\langle\rho(x),\delta(x)\rangle$. 这里: $\rho(x)$ 是对象 x 关于属性 a 取 V_a 中的元素 $\rho(x),\delta(x)$ 是对象 x 关于属性 a 取值 $\rho(x)$ 的程度. 在Chen提出的泛化信息系统 $\mathrm{IS_G}$ 中, 信息映射 I_a 是 $U\to[0,1]^{V_a}$, 其中 $[0,1]^{V_a}$ 是 V_a 上的模糊集. $\mathrm{IS_G}$ 是一种程度化的多值信息系统.

将上述信息系统进一步推广到直觉模糊集, 可得到基于直觉模糊集的信息系统 $\mathrm{IS_I}$.

定义 5 直觉模糊信息系统是

$$\mathrm{IS_I}=\langle U,\mathrm{Attr},\{V_a|a\in\mathrm{Attr}\},\{\tilde{I}_a|a\in\mathrm{Attr}\}\rangle,$$

其中 $\tilde{I}_a$ 是 U 到 V_a 上直觉模糊集 A 的簇集的信息映射, 记为 $\tilde{I}_a: U \to \mathfrak{F}(V_a)$. 对于 U 中的 x, $\tilde{I}_a(x) = [0,1]^{V_a}$, 这里 $[0,1]^{V_a}$ 是定义在论域 V_a 上的直觉模糊集, 即 $[0,1]^{V_a} \in \mathfrak{F}(V_a)$.

定理 1　信息系统 IS_G, IS_D, IS, IS_M 是基于直觉模糊集信息系统 IS_I 的特化.

证明　事实上, IS_G 是 IS_I 在直觉指数为 0 时的特化; IS_D 是直觉指数为 0, 且直觉模糊集的真度截集为单元素集的特化; 对于经典的信息系统 IS 和多值信息系统 IS_M 而言, 则是隶属度仅取 {0,1} 这 2 个元素之一, 而不是区间 $[0,1]$ 的情形, 而且经典信息系统的真度截集为单元素集, 多值信息系统的真度截集为多元素集. □

上述几种信息系统之间的比较如表 1 所示.

表 1　信息系统对比

	IS	IS_M	IS_G	IS_D	IS_I
隶属度	二值 $\{0,1\}$	二值 $\{0,1\}$	区间 $[0,1]$	区间 $[0,1]$	区间 $[0,1]$
直觉指数	0	0	0	0	区间 $[0,1]$
真度 λ 截集	单元素集	多元素集	多元素集	单元素集	多元素集

下面用一个实例来辅助理解这个信息系统.

例 1　某直觉模糊信息系统如表 2 所示. 其中: a 表示喜欢的国家, 论域 V_a 是 {美国, 英国, 法国, 日本}; b 表示熟悉的语言, 论域 V_b 是 {英语, 法语, 日语}; $x_1, \cdots, x_5$ 表示 5 个人, 构成对象集合. 表 2 中每个数据都是一个直觉模糊集. 对于映射 $\tilde{I}_a: U \to \mathfrak{F}(V_a)$, $\tilde{I}_a(x_1) = \frac{\langle 1,0\rangle}{a_1} + \frac{\langle 0.8,0.1\rangle}{a_2} + \frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{a_3} + \frac{\langle 0.2,0.7\rangle}{a_4}$. $\frac{\langle 0.8,0.1\rangle}{a_2}$ 表示英国作为对象 x_1 所喜欢的国家, 其“喜欢”的隶属度为 0.8, 直觉指数为 0.1, 即 1-0.8-0.1.

表 2　直觉模糊信息系统

U	a	b
x_1	$\frac{\langle 1,0\rangle}{a_1} + \frac{\langle 0.8,0.1\rangle}{a_2} + \frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{a_3} + \frac{\langle 0.2,0.7\rangle}{a_4}$	$\frac{\langle 1,0\rangle}{b_1} + \frac{\langle 0,1\rangle}{b_2} + \frac{\langle 0.5,0.5\rangle}{b_3}$
x_2	$\frac{\langle 0,1\rangle}{a_1} + \frac{\langle 0.7,0.1\rangle}{a_2} + \frac{\langle 0.3,0.4\rangle}{a_3} + \frac{\langle 1,0\rangle}{a_4}$	$\frac{\langle 0,1\rangle}{b_1} + \frac{\langle 0,1\rangle}{b_2} + \frac{\langle 1,0\rangle}{b_3}$
x_3	$\frac{\langle 0.8,0\rangle}{a_1} + \frac{\langle 0.6,0.2\rangle}{a_2} + \frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{a_3} + \frac{\langle 0,0.7\rangle}{a_4}$	$\frac{\langle 1,0\rangle}{b_1} + \frac{\langle 0.8,0.1\rangle}{b_2} + \frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{b_3}$
x_4	$\frac{\langle 1,0\rangle}{a_1} + \frac{\langle 0.8,0.1\rangle}{a_2} + \frac{\langle 0.5,0.5\rangle}{a_3} + \frac{\langle 0.2,0.7\rangle}{a_4}$	$\frac{\langle 0.5,0.2\rangle}{b_1} + \frac{\langle 0.3,0.4\rangle}{b_2} + \frac{\langle 1,0.7\rangle}{b_3}$
x_5	$\frac{\langle 0,1\rangle}{a_1} + \frac{\langle 1,0\rangle}{a_2} + \frac{\langle 0.5,0.5\rangle}{a_3} + \frac{\langle 0.3,0.7\rangle}{a_4}$	$\frac{\langle 1,0\rangle}{b_1} + \frac{\langle 0.7,0.3\rangle}{b_2} + \frac{\langle 0.4,0.6\rangle}{b_3}$

与基于模糊集的信息系统模型相比, IS_I 系统的优点表现在它能够描述客观世界模糊现象中的犹豫性. 因此, 在构建实际模糊信息系统时, 若对象的属性值用传统模糊集不足以表达准确时, 换言之, 若系统中的数据存在直觉指数不为 0 时, 可采用 IS_I 系统.

3.2　IS_I 系统的对象可满足性

定义 6　采用如下规则确定 IFDL 语言的公式:

1) $\langle a, v\rangle$ 是原子公式, $a \in \mathrm{Attr}$ 且 $v \in V_a$;

2) 若 ϕ 和 φ 是公式, 则 $\neg\phi, \phi\bigwedge\varphi, \phi\bigvee\varphi, \phi\to\varphi, \phi \equiv \varphi$ 是公式;

3) 只有有限次利用规则 1) 和规则 2) 得到的是公式.

形如 $\phi\bigwedge\varphi$ 和 $(\phi\bigvee\varphi)\to\omega$ 的公式被称为合式公式, 原子公式和合式公式统称为公式.

定义 7　在给定的直觉模糊信息系统 IS_I 和 IFDL 语言下, 若对象 x 在 λ 程度上满足公式 ϕ, 则记作 $x \models_\lambda \phi$. 下面将论域 U 上对象 x 的可满足性归纳定义为:

1) $x \models_\lambda \langle a, v\rangle$ 当且仅当 $T(v)^{I(x)} > \lambda$, 这里 $T(v)^{I(x)}$ 表示 v 在直觉模糊集 $I(x)$ 上的真度;

2) $x \models_\lambda \neg\phi$ 当且仅当非 $x \models_\lambda \phi$;

3) $x \models_\lambda \phi\bigwedge\varphi$ 当且仅当 $x \models_\lambda \phi$, 且 $x \models_\lambda \varphi$;

4) $x \models_\lambda \phi\bigvee\varphi$ 当且仅当 $x \models_\lambda \phi$ 或者 $x \models_\lambda \varphi$;

5) $x \models_\lambda \phi\to\varphi$ 当且仅当 $x \models_\lambda \neg\phi\vee\varphi$;

6) $x \models_\lambda \phi\equiv\varphi$ 当且仅当 $x \models_\lambda \phi\to\varphi$, 且 $x \models_\lambda \varphi \to \phi$.

定义 8　U 在公式 ϕ 上是 λ 程度可满足的当且仅当存在 $x \in U$, 且 $x \models_\lambda \phi$.

定义 9　对于 U 上任何对象 x, 如果它在 λ 程度上满足公式 ϕ, 则称这个公式 ϕ 在 U 上 λ 程度是真.

定义 10　若 ϕ 是直觉模糊信息系统 IS_I 中的公式, 则 ϕ 的 λ 程度上意义集定义为

$$m_\lambda(\phi) = \{x \in U | x \models_\lambda \phi\}.$$

定义 11　若 ϕ 和 φ 是 IS_I 的公式, 则有如下性质:

1) $m_\lambda(\langle a, v\rangle) | \{x \in U | T(v)^{I(x)} > \lambda\}$;

2) $m_\lambda(\neg\phi) = U - m_\lambda(\phi)$;

3) $m_\lambda(\phi\bigwedge\varphi) = m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)$;

4) $m_\lambda(\phi\bigvee\varphi) = m_\lambda(\phi)\bigcup m_\lambda(\varphi)$;

5) $m_\lambda(\phi\to\varphi) = m_\lambda(\neg\phi\bigvee\varphi)$;

6) $m_\lambda(\phi\equiv\varphi) = m_\lambda(\phi\to\varphi)\bigcap m_\lambda(\varphi\to\phi)$.

这里 $T(v)^{I(x)}$ 是 v 在直觉模糊集 $I(x)$ 上的真度映射.

定理 2 1) 如果直觉模糊信息系统$\mathrm{IS_I}$中U在公式ϕ上是λ程度可满足的, 则$m_\lambda(\phi)$非空; 2) 如果公式ϕ在U上λ程度是真, 则$m_\lambda(\phi)$是U自身.

证明 由定义8和定义10可知, 定理2中1)成立; 由定义9和定义10可知, 定理2中2)成立. □

例 2 以例1的直觉模糊信息系统为例, 该系统中$\mathrm{Attr}=\{a,b\}, V_a=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}, V_b=\{b_1,b_2,b_3\}$. 令真度函数为$T(x)^A=\mu_A(x)+0.5\pi_A(x)$, 给定阈值$\lambda=0.8$, 取公式$\phi$为$\langle a,a_1\rangle$, 可得$\phi$的$\lambda$程度上意义集为$m_{0.8}(\phi)=\{x_1,x_3,x_4\}$. 若取$\lambda=0.9$, 则$m_{0.9}(\phi)=\{x_1,x_4\}$; 若取公式$\varphi=\langle a,(a_1,a_2)\rangle$, 则$m_{0.8}(\varphi)=\{x_1,x_4\}$; 若取公式$\omega$为$\langle a,(a_1,a_2)\rangle\bigwedge\langle b,b_1\rangle$, 则可得$m_{0.8}(\omega)=\{x_1\}$.

公式ω的实际意义在于, 根据预先给定的阈值可以采集到知识“喜欢美国和英国”并“熟悉英语”的人是x_1.

4 $\mathrm{IS_I}$系统的形式化概念分析

在形式概念分析研究中, 每个概念的理解包括内涵和外延两部分. 概念的内涵描述概念所应用的对象所具有的共同特性, 概念的外延则是由对象组成的满足概念内涵的概念实例. 也就是说, 一个概念的内涵是对这个概念的外延中所有实例共同特性的抽象描述, 而外延则是这个概念的具体实例. 从粒计算的角度看, 每个粒可以解释为一个概念的实例, 即概念的外延; 可以用这个粒的名称抽象地描述这个粒, 即概念的内涵. 在IFDL语言中, 可以用二元组$\langle\phi,m_\lambda(\phi)\rangle$表示一个概念, 其中前者$\phi$是概念的内涵, 后者$m_\lambda(\phi)$是概念的外延.

首先根据Wille的形式概念分析理论, 定义一种基于IFDL的形式背景和形式概念.

定义 12 一个形式背景(U,P,R)包含2个集合U和P以及U和P上的二元关系. U的元素称为对象, P的元素称为形式背景的属性. 为了在关系R中表示一个对象x关联一个属性a, 记$x\,R\,a$或$(x,a)\in R$, 读作对象x拥有属性a.

定义 13 令$X\subseteq U$是对象的集合, $Y\subseteq P$是属性的集合, 分别定义2个运算$^\blacktriangleright$和$^\blacktriangleleft$, 则

$$X^\blacktriangleright=\{y\in P|x\,R\,y\ \text{ for all } x\in X\},$$

$$Y^\blacktriangleleft=\{x\in X|x\,R\,y\ \text{ for all } y\in Y\},$$

分别表示X的共有属性集和Y的共有对象集.

定义 14 形式背景(U,P,R)的一个形式概念是一个二元组$(X,Y), X\subseteq U, Y\subseteq P, X^\blacktriangleright=Y$且$Y^\blacktriangleleft=X$, 则分别称$X$和$Y$是概念$(X,Y)$的外延和内涵.

显然, 对于传统的形式背景, 所有取值均是0或1. 下面推广以上形式背景和形式概念的定义到直觉模糊集.

定义 15 直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$包含一个对象的集合U, 属性的集合P和一个从U到V_a上直觉模糊集的簇集上的信息映射$\tilde{I}$, 这里$a\in P$, 即$\tilde{I}_a: U\to\mathfrak{F}(V_a)$. 对于$U$中的一个对象$x$, $\tilde{I}_a(x)=[0,1]^{V_a}$, 其中$[0,1]^{V_a}$是一个定义在$V_a$上的直觉模糊集. 因此, $[0,1]^{V_a}\in\mathfrak{F}(V_a)$. 值得注意的是, 在直觉模糊形式背景中, 二元关系已被信息映射取代.

定理 3 形式背景(U,P,R)是直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$的特殊情形.

证明 根据定理1, IS是隶属度仅取{0,1}, 而不是区间[0,1]的情形, 且经典信息系统IS的真度λ截集为单元素集. 因此, (U,P,R)中的R是直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$中$\tilde{I}$的特殊情形. □

定义 16 对于直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I}), X\subseteq U$是对象的集合, $Y\subseteq P$是属性的集合. 给定一个P上的阈值集合Λ, 即P上的每个属性分别对应各自的一个程度阈值, 则对象集X具有程度的共享属性集定义为

$$X^\blacktriangleright=\{y\in P|,\ \text{对每个}\ x\in X, \tilde{I}_y(x)\ \text{的真度截集的元素相等}\};$$

属性集Y具有程度的共享对象集为

$$Y^\blacktriangleleft=\{x\in X|,\text{对每个}\ y\in Y, \tilde{I}_x(y)\ \text{的真度截集的元素相等}\}.$$

定义 17 直觉模糊形式背景的形式概念$(U,P,\tilde{I})$是一个二元组$(X,Y), X\subseteq U, Y\subseteq P, X^\blacktriangleright=Y$且$Y^\blacktriangleleft=X$, 则称$X$和$Y$分别是概念$(X,Y)$的外延和内涵.

定理 4 形式背景(U,P,R)中形式概念是直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$的一个形式概念的特殊情形之一.

证明 定理3指出, 形式背景是直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$的特殊情形. 由定义13和定义16可知, (U,P,R)中X和Y分别是直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$中X和Y的特化. 由定义14和定义17中形式概念和直觉模糊形式概念的定义可知, 形式背景(U,P,R)中形式概念是直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$的一个形式概念的特殊情形之一. □

基于上述定理3和定理4, 称直觉模糊形式背景$(U,P,\tilde{I})$是形式背景(U,P,R)的泛化, 直觉模糊形式概念是形式概念的泛化.

5 $\mathrm{IS_I}$系统的应用

5.1 基于$\mathrm{IS_I}$系统的知识发现

Zhang等[11]指出, 人类智能的一个公认的特点是人们能够从极不相同的粒度上观察和分析同一问题, 不仅能在不同粒度的世界进行问题的求解, 而且能

够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界. 这种处理不同粒度世界的能力, 正是人类在问题求解方面强有力的表现. 直觉指数客观地反映了人们在处理问题上的犹豫程度, 直觉模糊集的真度函数因人的主观意识不同而异, 更加贴近人的主观思维. 相比 Chen 等[12]提出的 α 决策逻辑语言, IFDL 能够对粒度世界更好地建模.

在直觉模糊信息系统 $\mathrm{IS_I}$ 中, 给定一个真度阈值 $\lambda, \lambda \in [0,1]$, 则一个公式 λ 程度上意义集 $m_\lambda(\phi)$ 构成一个粒层. 一个公式 ϕ 的意义集的大小随着阈值 λ 的变化而变化, 当 λ 增大时, $m_\lambda(\phi)$ 减小, 当 λ 减小时, $m_\lambda(\phi)$ 增大.

知识发现的目标是从大量的数据中获取潜在的规则. 从形式概念的角度分析, 规则可通过概念之间的连接加以构造. 通常用 $\Rightarrow$ 和 $\Leftrightarrow$ 这 2 个连接符号建立概念之间的规则.

令 $\langle\phi, m_\lambda(\phi)\rangle$ 和 $\langle\varphi, m_\lambda(\varphi)\rangle$ 是 2 个直觉模糊集上的概念, 则 $\phi \Rightarrow \varphi$ 和 $\phi \Leftrightarrow \varphi$ 称为 λ 程度上规则. 对于 λ 程度上规则的度量有许多方法, 如支持度、绝对支持度、覆盖度、兴趣度和相互支持度等从各个侧面描述了规则. 这些度量方法可通过一个 2×2 列联表给出 (目前已有许多学者研究了基于列联表的规则表示[25-26]). 基于直觉模糊集 λ 程度上规则的列联表如表 3 所示.

表 3　$\phi \Rightarrow \varphi$ 列联表

	φ	$\neg\varphi$	$\Sigma_{\rm row}$
ϕ	$\lvert m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)\rvert$	$\lvert m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\neg\varphi)\rvert$	$\lvert m_\lambda(\phi)\rvert$
$\neg\phi$	$\lvert m_\lambda(\neg\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)\rvert$	$\lvert m_\lambda(\neg\phi)\bigcap m_\lambda(\neg\varphi)\rvert$	$\lvert m_\lambda(\neg\phi)\rvert$
$\Sigma_{\rm col}$	$\lvert m_\lambda(\varphi)\rvert$	$\lvert m_\lambda(\neg\varphi)\rvert$	$\lvert U\rvert$

可在表 3 中定义 λ 程度上规则 $\phi\Rightarrow\varphi$ 的支持度为

$$\mathrm{Support}_\lambda(\phi\Rightarrow\varphi)=\frac{|m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)|}{|U|},$$

λ 程度上规则 $\phi\Rightarrow\varphi$ 的绝对支持度为

$$\mathrm{AbsoluteSupport}_\lambda(\phi\Rightarrow\varphi)=\frac{|m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)|}{|m_\lambda(\phi)|}.$$

如果绝对支持度为 1, 则称 λ 程度上 $\phi\Rightarrow\varphi$ 在 U 上恒成立.

$\phi\Rightarrow\varphi$ 的覆盖度为

$$\mathrm{Coverage}_\lambda(\phi\Rightarrow\varphi)=\frac{|m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)|}{|m_\lambda(\varphi)|},$$

$\phi\Rightarrow\varphi$ 的兴趣度为

$$\mathrm{Interestingness}_\lambda(\phi\Rightarrow\varphi)=\frac{|m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)|\cdot|U|}{|m_\lambda(\phi)|\cdot|m_\lambda(\varphi)|}.$$

相互支持度可用来刻画规则 $\phi\Leftrightarrow\varphi$, 即

$$\mathrm{MutualSupport}_\lambda(\phi\Leftrightarrow\varphi)=\frac{|m_\lambda(\phi)\bigcap m_\lambda(\varphi)|}{|m_\lambda(\phi)\bigcup m_\lambda(\varphi)|}.$$

例 3　以例 1 中的直觉模糊信息系统为例, 令真度函数为 $T(x)^A=\mu_A(x)+0.5\pi_A(x)$, 给定阈值 $\lambda=0.8$. 取公式 ϕ 为 $\langle a,a_1\rangle$, 公式 φ 为 $\langle b,b_1\rangle$, 规则 $\phi\Rightarrow\varphi$ 的实际含义表示一个人喜欢的国家若是美国, 则他所熟悉的语言是英语. λ 程度上规则 $\phi\Rightarrow\varphi$ 的支持度为

$$\frac{|\{x_1,x_3\}|}{5}=0.4;$$

绝对支持度为

$$\frac{|\{x_1,x_3\}|}{|\{x_1,x_3,x_5\}|}=0.67;$$

覆盖度为

$$\frac{|\{x_1,x_3\}|}{|\{x_1,x_3,x_4\}|}=0.67;$$

兴趣度为

$$\frac{|\{x_1,x_3\}|\cdot 5}{|\{x_1,x_3,x_4\}|\cdot|\{x_1,x_3,x_4\}|}=1.1,$$

该值大于 1 表示 ϕ 与 φ 正相关; λ 程度上规则 $\phi\Leftrightarrow\varphi$ 的相互支持度为

$$\frac{|\{x_1,x_3\}|}{|\{x_1,x_3,x_4,x_5\}|}=0.5.$$

5.2　基于 $\mathrm{IS_I}$ 系统的知识推理

文献 [28] 提出了直觉模糊集下的模糊蕴含式的计算方法, 并提出了一种简单的直觉模糊推理机模型

$$A'\to\boxed{\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}}\to B'.$$

这里: 大前题是, 若 x 是 A, 则 y 是 B, 即 $\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$; 小前题是, x 是 $\underset{\sim}{A}$; 推出结论为 y 是 $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ(A\to B)=A'\circ\underset{\sim}{R}$, $\circ$ 是合成运算, $\underset{\sim}{R}$ 是蕴含关系.

在 $\mathrm{IS_I}$ 系统上可以方便地应用此推理机进行模糊推理. 限于篇幅, 这里不再赘述.

6　结　论

相比传统模糊集, 直觉模糊集是对人类模糊思维的更精确模拟, 但目前直觉模糊集在知识处理领域的研究还不够成熟, 基于直觉模糊集的模糊推理还有许多问题需要解决. 本文的主要工作是讨论了基于直觉模糊集理论的逻辑方法学, 提出了直觉模糊信息系统模型 $\mathrm{IS_I}$, 分析了在该系统下的对象可满足性; 同时提出了 $\mathrm{IS_I}$ 系统的形式化概念分析理论, 并分析了 $\mathrm{IS_I}$ 系统在规则提取和知识推理中的应用. 示例表明, $\mathrm{IS_I}$ 系统具有更强的表达能力, 符合客观世界模糊现象的本质. $\mathrm{IS_I}$ 系统是信息系统的更一般形式, 能够帮助深入理解基于模糊集理论的知识表示、发现和推理等. 当然, 采用真度截集的方法存在丢失有用信息的问题, 进一步的工作将研究如何合理地选择真度中的权重和阈值.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets and information granulation[M]. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979: 20-100.

[2] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Computer and Information Science, 1982, 11(5): 341-356.

[3] Zadeh L A. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90(2): 111-127.

[4] Lin T Y. Granular computing[EB/OL]. (2009-01-17) [2011-07-28]. http://xanadu.cs.sjsu.edu/~grc/grcinfo_center /grcinfo_index.php?goto= grcinfo_whois.html.

[5] Pawlak Z. Granularity of knowledge, indiscernibility and rough sets[C]. 1998 IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Anchorage, 1998: 106-110.

[6] 刘清. Rough 集及 Rough 推理[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 1-150.
(Liu, Q. Rough set and rough reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2001: 1-150.)

[7] Yao Y Y. Information granulation and rough set approximation[J]. Int J of Intelligent Systems, 2001, 16(1): 87-104.

[8] Yao Y Y. Granular computing using neighorhood systems[C]. Advances in Soft Computing: Engineering Design and Manufacturing. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 539-553.

[9] Yao Y Y, Zhong N. Granular computing using information tables[C]. Data Mining, Rough Sets and Granular Computing. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002: 102-124.

[10] Lin T Y. From rough sets and neighborhood systmes to information granulation and computing in words[C]. Proc of European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing. Aachen, 1997: 1602-1607.

[11] 张铃, 张钹. 模糊商空间理论 (模糊粒度计算方法)[J]. 软件学报, 2003, 14(4): 770-776.
(Zhang L, Zhang B. Theory of fuzzy quotient space(methods of fuzzy granular computing)[J]. J of Software, 2003, 14(4): 770-776.)

[12] 陈万里, 程家兴. 粒计算的 α 决策逻辑语言[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 84-87.
(Chen W L, Cheng J X. α decision logic language for granular computing[J]. Control and Decision, 2006, 21(1): 84-87.)

[13] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[14] Li Deng-Feng. Closeness coefficient based nonlinear programming method for interval-valued intuitionistic fuzzy multiattribute decision making with incomplete preference information[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(4): 3402-3418.

[15] Li Deng-Feng. The GOWA operator based approach to multiattribute decision making using intuitionistic fuzzy sets[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53(5/6): 1182-1196.

[16] Li Deng-Feng. Extension principles for interval-valued intuitionistic fuzzy sets and algebraic operations[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2011, 10(1): 45-58.

[17] 徐永杰, 孙涛, 李登峰. 直觉模糊 POWA 算子及其在多准则决策中的应用[J]. 控制与决策, 2011, 26(1): 129-132.
(Xu Y J, Sun T, Li D F. Intuitionistic fuzzy prioritized OWA operator and its application in multi-criteria decision-making problem[J]. Control and Decision, 2011, 26(1): 129-132.)

[18] 孔韦韦, 雷英杰. 基于直觉模糊熵的红外图像预处理方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(8): 1484-1491.
(Kong W W, Lei Y J. Technique for infrared image preprocessing based on intuitionistic fuzzy entropy[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(8): 1484-1491.)

[19] Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(1): 37-46.

[20] Atanassov K. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61(2): 137-142.

[21] 谭春桥, 张强. 模糊多属性决策的直觉模糊集方法[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(5): 71-76.
(Tan C Q, Zhang Q. Intuitionistic fuzzy sets method for fuzzy multiple attribute decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(5): 71-76.)

[22] Pawlak, Z. Rough sets, theroetical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991: 1-200.

[23] Yao Y Y, Liau C J. A generalized decision logic language for granular computing[C]. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence. Honolulu, 2002: 773-778.

[24] Wille R. An approach based on hierarchies of concepts[C]. Ordered Sets. Boston: Reidel Publishing Company, 1982: 445-470.

[25] Orlowska E, Pawlak Z. Representation of nondeterministic information[J]. Theoretical Computer Science, 1984, 29(1/2): 27-39.

[26] Gaines B R. The trade-off between knowledge and data in knowledge acquisition[C]. Knowledge Discovery in Databases. AAAI/MIT Press, 1991: 491-505.

[27] Yao Y Y. Potential applications of granular computing in knowledge discovery and data mining[C]. Proc of World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informations. Orlando, 1999: 573-580.

[28] 朱小栋, 黄志球. 直觉模糊集的模糊蕴含式运算方法[J]. 计算机科学, 2008, 35(3): 126-127.
(Zhu X D, Huang Z Q. Fuzzy implication operation methods of intuitionistic fuzzy sets[J]. Computer Science, 2008, 35(3): 126-127.)