

文章编号: 1001-0920(2012)11-1735-05

直觉模糊离散粒子群算法

汪禹喆¹, 雷英杰¹, 周林¹, 李润玲²

(1. 空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800; 2. 北京军代局 232厂, 北京 100000)

摘要: 在研究和分析离散粒子群算法(DBPSO)的基础上, 提出一种基于直觉模糊熵的改进离散粒子群算法(IFDPSO). 该算法以直觉模糊熵作为粒子群状态测度和速度变异的基本参数, 同时加入了位置变异策略以保证算法在有限时间内尽可能多地遍历到次优位置及其邻域, 增强了算法的全局寻优能力. 实验数据表明, 在求解较大规模整数规划问题(如0-1背包问题)时, IFDPSO比DPSO和蚁群算法(ACO)更为有效, 从而为解决这类问题提供了新的途径和方法.

关键词: 离散粒子群算法; 直觉模糊熵; 直觉模糊离散粒子群算法; 背包问题

中图分类号: TP183

文献标志码: A

Intuitionistic fuzzy discrete particle swarm algorithm

WANG Yu-zhe¹, LEI Ying-jie¹, ZHOU Lin¹, LI Run-ling²

(1. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China; 2. Air Force Agency Office of 232 Factory in Beijing, Beijing 100000, China. Correspondent: WANG Yu-zhe, E-mail: afric001@sina.com)

Abstract: On the basis of the analysis and research on discrete particle swarm optimization algorithm(DPSO), an improved DPSO algorithm(IFDPSO) based on intuitionistic fuzzy entropy is proposed, which takes the intuitionistic fuzzy entropy as the measure of the state of particle swarm and the parameter of velocity mutation. With the location mutation strategy, the IFDPSO can possibly search as much as possible sub-optimal location and its neighborhood, and the algorithm ability of searching global best value is intensified. The experimental data shows that, in solving large scale integer programming problem such as 0-1 knapsack problem, IFDPSO algorithm represents more effective than DPSO algorithm and ant colony optimization(ACO) algorithm, which provides a new way for solving 0-1 knapsack problem.

Key words: discrete particle swarm optimization algorithm; intuitionistic fuzzy entropy; intuitionistic fuzzy particle swarm optimization algorithm; knapsack problem

1 引言

背包问题是0-1整数规划中经典的NPC问题, 由Merkel和Hellman于1978年提出, 其模型广泛应用于目标分配、多属性决策等问题. 目前常用的传统解法有: 动态规划、单纯型法、贪心法等; 常用的智能算法包括: 遗传算法、粒子群算法、蚂蚁算法及混合智能算法等. 在5万个解以下且约束宽松时, 传统方法一般能找到满意的结果; 当超过5万个解时, 智能算法具有明显优势. 在求解很多大规模0-1背包问题时往往不需要求得最优解, 一是求解难度大, 二是求解目标很可能只需满足某一特定指标的次优解, 如目标分配和多属性决策等都属于这类问题, 因此本文以所求解结果最优作为评价求解方法的标准.

Kennedy等^[1]在基本粒子群算法基础上提出了解决0-1规划问题的离散粒子群优化算法(DBPSO). DBPSO算法能较好地确定最优解所在范围, 在解决小规模0-1规划问题时效果较好; 在面对较大规模或复杂离散问题时存在收敛过慢或不收敛的情况. 针对DBPSO算法, 国内外学者对其进行了改进^[2-4]. 文献[2]提出一种扰动机制来控制种群粒子的多样性, 但仍然容易陷入局部最优, 实验结果不理想. 文献[3]针对离散及组合优化问题, 提出一种改进的离散粒子群算法, 有效降低了粒子搜索发散度, 加快了收敛速度, 但使粒子更有可能陷入局部极优. 文献[4]引入遗传算法的变异和交叉算子, 提出了一种求解多目标最小生成树问题的离散粒子群优化算法, 通过基

收稿日期: 2011-04-28; 修回日期: 2011-09-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60773209); 陕西省自然科学基金项目(2006F18).

作者简介: 汪禹喆(1983-), 男, 博士, 从事军事装备与信息科学的研究; 雷英杰(1956-), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能信息处理与决策等研究.

于目标共享的适应度评价函数提高种群多样性,以避免算法过早陷入局部最优解。

针对现有 DBPSO 算法的不足,本文引入直觉模糊熵作为变异测度和速度变异基本参数,提出一种基于直觉模糊熵的改进离散粒子群算法——IFDPSO,并将其用于解决大规模背包问题。由于位置变异策略可以保证算法在有限运算时间内尽可能多地遍历到次优位置及其邻域,从而可以增强算法的全局寻优能力,为有效解决大规模 0-1 整数规划(如背包问题)提供了新的思路和方法。

2 直觉模糊熵与 DBPSO 算法分析

2.1 直觉模糊熵

信息熵的理论源于对信息科学范畴不确定性和现象的研究。最早信息总量的不确定性由概率熵描述,之后产生了模糊熵。两者的不同之处在于:前者度量了事件的随机不确定性,而后者度量了事件的模糊不确定性。对模糊集 A 的模糊程度数量化或度量被称为模糊熵。一个模糊集的熵可看作是一个映射,以离散论域 $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ 为例,对于 X 上所有模糊子集,其模糊熵 $H: F(X) \rightarrow [0, 1]$ 。Atanassov^[5]直觉模糊集(IFS)是对 Zadeh 模糊集理论最有影响的一种扩充和发展。IFS 增加了一个新的属性参数——非隶属度函数,进而可以描述“非此非彼”的“模糊概念”,同时考虑隶属度、非隶属和犹豫度 3 个方面的信息,在处理不确定信息时具有更强的表现能力,因而引起众多学者的关注^[5-8]。

直觉模糊熵(IFE)是在模糊熵理论上的扩展,在描述粒子群状态及其与系统能量变化的关系上有明显优势,已被用于分析 DBPSO 算法种群状态变化过程^[9]。本文利用直觉模糊熵作为粒子群状态的测度,规定每个粒子历史最优位置为中心存在一个半径为 R_i 的作用域,且认定:凡是在此位置的作用域范围内的粒子在该位置附近聚集;凡在作用域之外的粒子则未在此位置附近聚集;而在所有作用域之外的粒子则被认为是孤立点。

定义 1 选取每个粒子在每代中的历史最优位置作为聚合点 $i(i = 1, 2, \dots, N)$, 每个粒子到聚合点 i 的距离为 $Dk_j(k = 1, 2, \dots, N)$, 则粒子的作用域半径为 $R_i = K \times \max(Dk_j)$, 其中 K 为 $[0, 0.5]$ 上的随机数。

定义 2 规定在第 t 代中, 如果粒子 k 到第 i 个历史最优位置的距离 Dk_j 小于第 i 个历史最优位置的作用域半径 R_i , 则认为粒子属于此作用域, 该位置的粒子计数器 T_i 加 1。若存在粒子使得当 $i = 1, 2, \dots, N$ 时 $Dk_j > R_i$, 则称该粒子为“孤点”, 全局计数

器 T_x 加 1。由上述条件可定义

$$\mu_{ki}^t = T_{ki}/N, \pi_{ki}^t = T_x/N, \quad (1)$$

$$\gamma_{ki}^t = 1 - \mu_{ki}^t - \pi_{ki}^t. \quad (2)$$

其中: μ_{ki}^t 为第 t 代中所有粒子隶属于第 i 个历史最优位置的程度; π_{ki}^t 为孤点的犹豫度, 为粒子不属于第 i 个历史最优位置的程度。

定义 3 在 t 次迭代中, 本文采用文献[8]所定义的直觉模糊熵, 则种群的直觉模糊熵 H^t 定义为

$$H^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\min(\mu_{ki}^t, \gamma_{ki}^t) + \pi_{ki}^t}{\max(\mu_{ki}^t, \gamma_{ki}^t) + \pi_{ki}^t}, \quad (3)$$

其中 H^t 的变化范围为 $[0, 1]$ 。

2.2 DBPSO 求解过程分析

由于 DBPSO 算法自身运算的特殊性^[1], 目前多数研究都是利用实验与分析相结合的手段, 针对具体问题对 DBPSO 算法求解过程进行分析, 以判断 DBPSO 算法在该问题上的收敛性。这里选择 0-1 背包问题作为目标问题, DBPSO 算法采用基本粒子群算法(BPSO)的速度公式, 并将速度通过 Sigmoid 函数转换为粒子位置变化的概率。基本公式如下:

$$v_{id}^{k+1} = wv_{id}^k + c_1r_1(pj_{id}^k - x_{id}^k) + c_2r_2(pg_{id}^k - x_{id}^k), \quad (4)$$

$$y_{id}^{k+1} = 1/(1 + \exp(-v_{id}^{k+1})), \quad (5)$$

$$\text{if } r_3 < y_{id}^{k+1}, x_{id}^k = 1 \text{ or } x_{id}^k = 0. \quad (6)$$

其中速度公式的参数设置均沿用基本粒子群算法。

由 BPSO 算法的收敛性原理及 DBPSO 算法特性可知, 种群活性决定了算法搜索过程的优劣和最终收敛状态, 因此, 引入直觉模糊熵作为种群活性的测度^[9], 并将粒子速度作为对照结果。这里为了便于讨论, 仅考虑 $D = 3$ 维时的情况, 此时的解空间可视为空间立方体的 8 个顶点, 这对解规模增大的情况同样具有普遍意义。由背包限制条件可知, 该可行域并不一定是凸集, 因此存在次优解, 且在物品规模很大时采用传统方法难以有效求解。DBPSO 算法初期对粒子采用速度双向初始化方法, 并用计算机模拟整个迭代过程中所有粒子在任两维度均值的变化以及相应的直觉模糊熵 H 的变化, 分别如图 1 和图 2 所示。

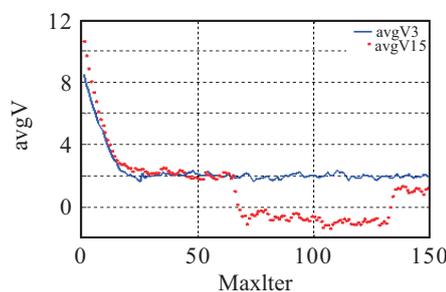


图 1 DPSO 在任意两维上速度均值的变化

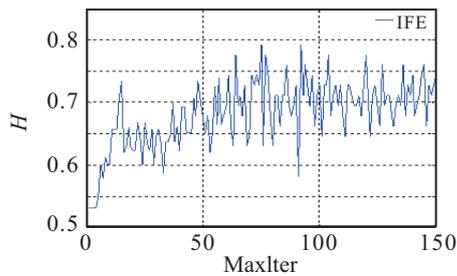


图 2 相应直觉模糊熵的变化

按 DBPSO 算法的基本定义及运算规则进行分析, 初期所有粒子均具有较大的初始速度, 在 Sigmoid 函数的作用下, 粒子在连续维上同时取 0 或 1 的概率较大, 因此粒子更容易经过可行域中的部分点而非遍历全部点, 即粒子的位置变化率低, 因而系统的活跃性(或能量)较低. 随着运算的进行, 粒子以较大几率经过最优或次优位置, 所以其“社会认知”和“个体认知”呈现趋同性, 速度递减. 此时 Sigmoid 函数取值趋于中值 0.5, 带来速率的趋同, 粒子各维位置上的变化几率相同, 粒子基本按照等概率遍历可行域, 这时粒子群状态活跃, 使系统的能量维持在一个较高的水平上.

由图 1 和图 2 的数据分析可知, 直觉模糊种群熵的变化反映了种群的活跃程度, 即种群引起的系统能量的变化. 可见, DBPSO 求解的中后期由于粒子速度衰减反而增加了其遍历各点的概率, 相当于增加了找到最优解的概率; 而速度在有限范围内波动, 一般在正向或负向上维持一个较稳定的水平, 尽管可能会跳变, 但几率较小. 即在一定迭代次数内, 某一维上粒子的位置难有大的变化, 使系统能量维持在一个较高的水平上下波动, 进而直觉模糊熵维持在较高的水平上. 但这种状态并不是真正意义上的全局搜索而是伪随机搜索, 使得算法丧失了开采当前最优解邻域的能力.

3 基于直觉模糊熵的改进 DPSO 算法

在求解大规模背包问题时, 由于问题规模和迭代次数的限制, 一般很难求出最优解, 有时只要能得到满足条件的次优解即可. 基于 DBPSO 求解过程的分析及其局部开采能力不足的缺陷, 本文提出以直觉模糊熵 (IFE) 的改进粒子群算法 DBPSO, 加入速度变异及种群控制机制, 得到改进的直觉模糊熵粒子群算法——IFDPSO.

3.1 直觉模糊熵粒子群算法

IFDPSO 算法保持了 DPSO 的速度公式及粒子位置定义方法, 同时加入了如下速度变异及种群控制机制.

1) 速度变异操作. 针对 DPSO 算法在中后期由于速度影响无法深入“开采”当前最优解邻域的性质, 为

使得粒子尽可能不会错过更好的解, 对速度进行如下变异操作以保证粒子在各维上取值的多样性:

$$v_{id}^t = \mu_{id}^t + v_{\max} H^t - \text{rand}, \quad (7)$$

其中 t 为当前的迭代数.

2) 粒子位置变异操作. 将所有粒子的当前最优解 $Pbest_i$ 与粒子群的最优解进行比较; 若粒子 i 的当前最优值与全局最优比值小于参数 e , 则以全局最优解取代粒子 i 的当前最优解, 其中 $0 < e < 1$. 其具体实施方法为: 当两代的熵值 $H^{t+1} - H^t$ 小于 $r_3/2 \times (\text{Iter} - 1)$ 时, 开始进行替换操作, 对粒子 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ 进行判断, 规定替换的数量不得超过种群数的一半. 这种控制策略将上代中的粒子直接进行筛选变异, 并单独对速度产生作用, 因此最大限度保留了粒子群在上代的解, 具体效果相当程度上依赖于速度变异在下代中的效果.

IFDPSO 算法具体流程如下.

Step 1: 对粒子群速度 v 和位置 x 进行初始化.

Step 2: 按照式 (4)~(6) 更新粒子的速度和位置, 计算每代中粒子群的熵值 $H(t)$. 判断是否满足结束条件, 若满足, 则算法结束; 否则转 Step 3.

Step 3: 计算 $\text{Det} = |H(t) - H(t-1)|$, 如果 $\text{Det} < (\text{rand}/2t)$ 且 $t \leq T$, 则转 Step 4; 否则转 Step 2.

Step 4: 当 $PG(t) = PG(t-1)$ 时, 按照式 (7) 进行速度变异; 否则不变.

Step 5: 对粒子群的所有粒子的适应值进行判断, 如果 $(Pbest(i)/PG(t)) < e$, 则进行替换; 否则保持不变, 转 Step 2.

IFDPSO 算法通过种群熵的变化来监控种群活性, 能更好地把握种群活动规律, 明确搜索过程的变化. 通过对运算流程的优化与控制, 在种群进入伪随机搜索阶段之前可通过粒子的速度和位置变异机制来改变种群状态, 确保了种群的搜索质量. 加入的速度变异机制可保证粒子在不同维度上速度的多样性. 与 DBPSO 算法中粒子速度不断衰减的情况不同, IFDPSO 能使粒子的速度变化在整个求解过程中更为随机, 因此可能遍历更多的位置, 同时粒子速度相对增大也能保证种群具有较强的局部开采能力. 与 DBPSO 算法后期的伪随机搜索相比, IFDPSO 算法通过对每一代运算值进行监控, 并采用位置变异机制及劣解粒子替换策略来调控种群的变化方向, 保证了在运算后期粒子以一定的概率搜索空间的其他位置, 消除了速度变异带来的可能陷入局部最优解的情况, 同时也增加了获取更优解的概率.

3.2 实验与结果分析

本文求解的对象是整数规划问题的 0-1 背包问

题^[10], 这是一个 NP 难问题, 随着问题规模的增大, 要在有限时间内得出最优解很难. 这里采用的 0-1 背包问题实例为: 各物品的质量 c_i 和价值 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 在 1 ~ 100 内随机生成, 物品种类为 n , 背包容量 C 为总质量的 0.8 倍. 背包问题的基本模型如下:

$$\max F = \sum_{i=1}^n p_i x_i; \quad (8)$$

$$\text{s.t. } C = 0.8 \sum_{i=1}^n c_i, \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \leq C, \\ 1 \leq p_i, \quad c_i \leq 100; \quad (9)$$

$$\min F = - \sum_{i=1}^n p_i x_i + M \times \\ \left\{ \min \left[0, \left(C - \sum_{i=1}^n c_i x_i \right) \right]^2 \right\}. \quad (10)$$

本文针对背包问题的具体做法是: 将背包最大容量的约束条件转化为惩罚系数加入基本模型, 最终转化为式 (10) 这一无约束优化问题, 其解向量为 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 其中: $x_i = 0$ 或 $1, i = 1, 2, \dots, n$; M 为一足够大的正数. 本文采用 DPSO, IFDPSO 和 ACO 这 3 种算法进行横向比较实验, 同时为考察 IFDPSO 算法求解与问题规模的关系, 设置不同规模的纵向对比实验. 评判标准包括最优值 BestVal, 平均值 AvgVal, 平均迭代次数 Iter 以及方差 Dx. 各算法具体参数设置为: 1) DPSO 算法种群 $N = 40$, 最大迭代次数 100 次, $w = 0.9, C_1 = C_2 = 2.00, V_{\max} = 10$, 采用双向初始化方法; 2) IFDPSO 算法延续 DPSO 的基本参数设置, 控制参数 $e = 0.5$, 替换粒子数为种群的一半; 3) ACO 算法蚂蚁数等同于问题规模, 迭代次数 100, 且其信息素公式及概率转移公式参数设置为 $a = 1, b = 1, Q = 1$. 横向比较实验问题规模 D 分别为 40, 110 和 200; 纵向比较实验的问题规模 D 依次设置为 150, 250 和 350. 采用相同的背包问题生成方式, 各算法分别独立运行 RunTime = 100 次. 实验相关结果如表 1 ~ 表 4 及图 3 和图 4 所示.

表 1 ~ 表 3 为在 70, 110, 200 规模上 3 种算法的求解结果. 由于在 70 物品规模时数据线分离不明显,

表 1 70 物品规模下算法运算结果比较

算法	BestVal	AvgVal	Iter	Dx
DPSO	3.119 0e+003	3.048 0e+003	21.21	20.754 9
IFDPSO	3.220 2e+003	3.191 8e+003	19.43	12.084 1
ACO	3.146 7e+003	3.072 1e+003	27.38	22.248 9

表 2 110 物品规模下算法运算结果比较

算法	BestVal	AvgVal	Iter	Dx
DPSO	5.337 6e+003	5.190 8e+003	51.07	57.34
IFDPSO	5.438 9e+003	5.277 9e+003	47.47	54.91
ACO	5.213 7e+003	5.012 0e+003	55.37	89.87

表 3 200 物品规模下算法运算结果比较

算法	BestVal	AvgVal	Iter	Dx
DPSO	8.460 3e+003	8.249 6e+003	25.26	80.79
IFDPSO	8.777 9e+003	8.373 3e+003	34.33	63.85
ACO	8.412 3e+003	7.998 2e+003	43.51	119.82

表 4 IFDPSO 求解大规模问题运算结果比较

D	BestVal	AvgVal	Iter	Dx
150	6.746 5e+003	6.232 0e+003	43.68	58.91
250	9.878 9e+003	9.412 9e+003	40.21	72.47
350	1.374 3e+004	1.184 7e+004	67.21	121.20

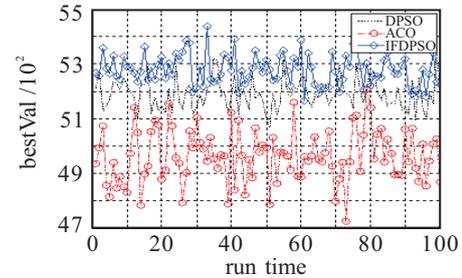


图 3 110 物品规模下算法数据图像

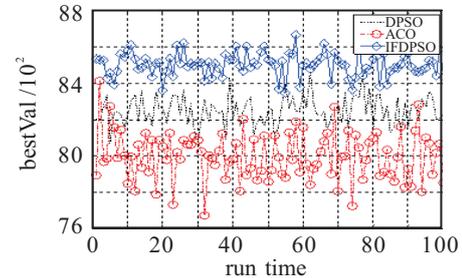


图 4 200 物品规模下算法数据图像

这里仅给出 110 及 200 规模上对应的数据图像 (图 3 和图 4). 由 3 组实验数据可以看出, 问题规模越大时 IFDPSO 的优化效果越明显, 在图 3 和图 4 上表现为 3 组数据随着问题规模的增加, 数据的分离性逐渐增大. 表 2 和表 3 显示, ACO 在求解过程中稳定性普遍较差且其整体求解效果不理想. 这是因为 ACO 等方法采用信息素引导的路径搜索方法, 由于受初始化和搜索模式的影响, 在问题规模较大时有相当的几率陷入局部最优; 而 DPSO 在中后期的伪全局搜索会在一定程度上强化搜索能力, 但在有限迭代次数内这种可能毕竟有限, 且会带来一定的数据波动, 如表 3 和图 4 所示. 当数据规模较小时, 三类方法无论是求解的质量还是迭代次数的差距并不明显; 但随着问题规模的增大, 三类算法的求解稳定性都有一定损失, 相比之下, IFDPSO 优势则越来越明显. 表 4 的实验数据表明, 随着问题规模的增大, 方差 Dx 有明显升高. 这是因为问题规模直接影响单一解的维度, 使解空间呈几何增长, 当问题规模达到 350 时, 所有备选解的数量可达到 $2.293e+105$ 个. 面对如此大的解空间, IFDPSO 的局部加强搜索策略在有限迭代次数内仅能

开采较少的解空间区域,造成求解数据稳定性下降.因此可以预见在同等实验条件下,问题规模的不断增大会造成求解稳定性的相对下降.

4 结 论

离散粒子群算法自提出以来,在解决组合优化等问题上显示出了巨大潜力.本文在大量实验的基础上,首次提出了以直觉模糊熵 IFE 测量 DPSO 求解过程中粒子群状态,并分析验证了 IFE 测量的可靠性,提出了基于直觉模糊熵的改进离散粒子群算法 IFDPSO,通过对速度的控制和位置变异等策略保证算法在有限运算时间内尽可能多地遍历到最优解及次优解的邻域,在一定程度上增强了算法的局部开采能力.相对于现有研究和改进离散粒子群算法的各种尝试,本研究思路较为新颖,且在解决较大规模 0-1 背包问题等整数规划问题上较之原 DPSO 算法及 ACO,在性能上有了较大的提升.但面对规模更大的整数规划问题时,IFDPSO 算法的稳定性却有所下降,并且找到最优值的过程并不是完全成功的,因此该算法仍有进一步改进的空间.尽管如此,IFDPSO 算法仍然对改进离散粒子群算法和解决 0-1 整数规划类问题提供了新的思路和方法.

参考文献(References)

- [1] Kennedy J, Eberhart R C. A discrete binary version of the particle swarm algorithm[C]. Proc of the World Conf on Systemics, Cybernetics and Informatics. Piscataway: IEEE Service Center, 1997: 4104-4109.
- [2] 张国富, 蒋建国, 夏娜, 等. 基于离散粒子群算法求解复杂联盟的生成问题[J]. 电子学报, 2007, 35(2): 323-328. (Zhang G F, Jiang J G, Xia N, et al. Solutions of complicated coalition generation based on discrete particle swarm optimization[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(2): 323-328.)
- [3] 许金友, 李文立, 王建军. 离散粒子群算法的发散性分析及其改进研究[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(15): 4676-4681.

- (Xu J Y, Li W L, Wang J J. Research on the divergent analysis and improvement of discrete particle swarm algorithm[J]. J of System Simulation, 2009, 21(15): 4676-4681.)
- [4] 郭文忠, 陈国龙. 一种求解多目标最小生成树问题的有效离散粒子群优化算法[J]. 模式识别与人工智能, 2009, 22(4): 597-604. (Guo W Z, Chen G L. An efficient discrete particle swarm optimization algorithm for multi-criteria minimum spanning tree[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2009, 22(4): 597-604.)
- [5] 王毅, 雷英杰. 一种新的直觉模糊熵构造方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1390-1394. (Wang Y, Lei Y J. A technique for constructing intuitionistic fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2007, 22(12): 1390-1394.)
- [6] 邢清华, 刘付显. 直觉模糊集隶属度与非隶属度函数的确定方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 393-397. (Xing Q H, Liu F X. Method of determining membership and nonmembership function in intuitionistic fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 393-397.)
- [7] Vlachos Ioannis K, Sergiadis George D. Intuitionistic fuzzy information — Applications to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(2): 197-206.
- [8] 雷英杰, 王宝树, 路艳丽. 基于直觉模糊逻辑的近似推理方法[J]. 控制与决策, 2006, 21(3): 305-310. (Lei Y J, Wang B S, Lu Y L. Approximate reasoning method based on intuitionistic fuzzy logic[J]. Control and Decision, 2006, 21(3): 305-310.)
- [9] 汪禹喆, 雷英杰. 基于直觉模糊种群熵的自适应粒子群算法[J]. 计算机应用, 2008, 28(11): 2871-2873. (Wang Y Z, Lei Y J. Adaptive particle swarm optimization algorithm based on intuitionistic fuzzy population entropy[J]. J of Computer Applications, 2008, 28(11): 2871-2873.)
- [10] 胡运权, 郭辉煌. 运筹学教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 123-148. (Hu Y Q, Guo H H. Operational research tutorial[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 123-148.)