

文章编号: 1001-0920(2012)10-1494-05

一类上三角随机非线性系统的输出反馈控制

李武全¹, 吴昭景², 王 会¹

(1. 鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025; 2. 烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘 要: 针对一类上三角随机非线性系统的输出反馈控制问题, 首先利用反推技术, 为其对应的标称系统设计稳定的输出反馈控制器; 然后利用低增益齐次占优技术, 为整个系统设计输出反馈控制器. 所设计的控制器能保证闭环系统的平衡点为依概率全局渐近稳定的, 并将低增益齐次占优技术推广到了随机系统, 首次解决了一类上三角随机系统的镇定问题. 最后通过数值仿真验证了所提出控制方案的有效性.

关键词: 上三角随机非线性系统; 输出反馈; 低增益; 齐次占优

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Output-feedback control of a class of upper-triangular stochastic nonlinear systems

LI Wu-quan¹, WU Zhao-jing², WANG Hui¹

(1. School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China; 2. School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai 264005, China. Correspondent: LI Wu-quan, E-mail: sea81@126.com)

Abstract: For the output-feedback control of a class of upper-triangular stochastic nonlinear systems, by using backstepping design method, a stabilizing output feedback controller is designed for its corresponding nominal system. Then by using the low gain homogeneous domination technique, an output-feedback controller is constructed for the whole system to ensure that the equilibrium at the origin of the closed-loop system is globally asymptotically stable in probability. The low gain homogeneous domination technique is generalized to stochastic systems, which can solve the stabilization problem for a class of upper-triangular stochastic nonlinear systems for the first time. Finally, a simulation example shows the effectiveness of the control scheme.

Key words: upper-triangular stochastic nonlinear systems; output-feedback; low gain; homogeneous domination

1 引 言

近年来, 关于上三角非线性系统控制问题的研究受到越来越多的关注^[1-3]. 该研究既具有重要的理论价值, 又具有较强的实际意义^[4].

随机系统的稳定性问题是近年来的研究热点之一. 根据处理海森项的方法, 随机镇定理论的研究方法可分为两大类: 一类是文献 [5] 提出的四次 Lyapunov 函数法, 通过增加控制律变量中的能量来抵制海森项对系统产生的影响; 另一类是文献 [6] 提出的加权二次 Lyapunov 函数法, 在风险指标下, 通过调整权值函数加大反馈容量的能力以抵消海森项对系统产生的影响. 随后, 随机系统的理论得到迅速发

展^[7-11]. 但值得指出的是, 目前绝大部分关于随机系统的结果都是关于下三角系统的, 对于上三角随机系统, 由于其结构的特殊性, 许多传统的方法, 比如反推法就不再适用了, 再加上 Hessian 交叉项的作用, 使得上三角随机系统的控制问题极具挑战性. 对于上三角随机系统的输出反馈控制问题, 目前还没有任何结果.

本文受关于上三角确定性结果等的启发, 基于低增益齐次占优技术, 研究一类上三角随机非线性系统的输出反馈控制问题. 通过采用有效的观测器和选择恰当的低增益参数, 所设计的输出反馈控制器能够保证闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的.

收稿日期: 2011-05-09; 修回日期: 2011-09-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61104128, 60974028, 10971256, 71101066).

作者简介: 李武全(1981—), 男, 讲师, 博士, 从事随机非线性系统控制的研究; 吴昭景(1970—), 男, 副教授, 博士, 从事随机非线性系统的无源性理论与小增益技术的研究.

2 预备知识

用 R^+ 表示全体非负实数, X^T 表示 X 的转置, $\text{Tr}\{X\}$ 表示方阵 X 的迹, $|\cdot|$ 表示欧氏空间中向量的 2 范数, C^i 表示相应定义域上的 i 阶连续可微函数. 对于 $n \times m$ 的矩阵 A , 定义两种范数

$$|A| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}^2 \right)^{1/2}, |A|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^m |A_{ij}| \right\}.$$

\mathcal{K} 表示连续、严格单调、零点等于 0 的 R^+ 到 R^+ 的函数全体; \mathcal{K}_∞ 表示 \mathcal{K} 中无界函数全体; $R^+ \times R^+$ 到 R^+ 的函数 $\beta(s, t) \in \mathcal{KL}$ 表示对给定的 $t, \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$, 而给定 $s, \beta(s, \cdot)$ 是单调递减的且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$. 对于 $\forall x \in R^n$, 记

$$\|x\|_\Delta = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{2/r_i} \right)^{1/2}.$$

考虑如下随机非线性系统:

$$dx = f(x, u)dt + g(x)d\omega. \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 为可测的状态, $u \in R^m$ 为输入, $\omega \in R^r$ 为独立标准 Wiener 过程向量. 对于任意 $t \geq 0$, 当 $x \in R^n$ 时, $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 和 $g: R^n \rightarrow R^{n \times r}$ 是局部 Lipschitz 函数且有 $f(0) = 0, g(0) = 0$.

定义 1^[5] 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一类 \mathcal{KL} 函数 $\beta(\cdot, \cdot)$, 满足

$$P\{|x(t)| < \beta(|x_0|, t)\} \geq 1 - \varepsilon, \\ \forall t \geq 0, \forall x_0 \in R^n \setminus \{0\},$$

则称系统 (1) 在平衡点 $x = 0$ 是依概率全局渐近稳定的.

下面给出一些引理:

引理 1^[5] 对于系统 (1), 若存在一个 C^2 函数 $V(x)$ 及 \mathcal{K}_∞ 函数 α_1, α_2, K 函数 α_3 , 使得

$$\alpha_1(x) \leq V(x) \leq \alpha_2(x), \\ \mathcal{L}V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ g^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g \right\} \leq -\alpha_3(x),$$

则系统 (1) 在 $[0, +\infty)$ 上几乎处处存在唯一解, 且在平衡点 $x = 0$ 是依概率全局渐近稳定的, 即

$$P\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0 \right\} = 1,$$

其中 $\mathcal{L}V(x)$ 称为 $V(x)$ 沿系统 (1) 的无穷小算子.

引理 2^[2] 给定权重 $\Delta = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, 假设 $V_1(x)$ 和 $V_2(x)$ 分别是 τ_1 阶齐次的和 τ_2 阶齐次的, 则对于权重 $\Delta, V_1(x)V_2(x)$ 是 $\tau_1 + \tau_2$ 阶齐次函数.

引理 3^[2] 假设对于权重 $\Delta, V: R^n \rightarrow R$ 是 τ 阶齐次函数, 那么有下述结论成立:

1) $\partial V / \partial x_i$ 为 $\tau - r_i$ 阶齐次函数, 其中 r_i 为 x_i 的权重.

2) 存在常数 $\bar{c} > 0$ 使 $V(x) \leq \bar{c} \|x\|_\Delta^\tau$. 如果 $V(x)$ 是正定的, 则 $V(x) \geq \underline{c} \|x\|_\Delta^\tau$, 其中 \underline{c} 为正数.

3 低增益齐次占优定理

考虑如下的随机非线性系统:

$$dX = (E(X) + F(X))dt + G^T(X)d\omega. \quad (2)$$

其中: $X \in R^N$ 为状态; ω 的定义与式 (1) 相同; $E: R^N \rightarrow R^N, F: R^N \rightarrow R^N, G: R^N \rightarrow R^{r \times N}$ 为满足局部李普希兹条件的波雷尔函数, 且 $E(0) = 0, F(0) = 0, G(0) = 0$.

下面给出低增益齐次占优定理:

定理 1 考虑系统 (2), 假设以下两个条件成立:

1) 存在 λ 阶 C^2 的齐次李雅普诺夫函数 $V(X)$ 使 $\frac{\partial V}{\partial X} E(X)$ 负定. 其中: $E(X)$ 是 τ 阶齐次函数, $\lambda + \tau > 0$, 扩张 $\Delta = (r_1, r_2, \dots, r_N)$.

2) 对于 $i = 1, 2, \dots, N$, 存在正数 c_i, \bar{c}_i, k_i 和 \bar{k}_i , 使下式成立:

$$|F_i(X)| \leq c_i \varepsilon^{1+k_i} \|X\|_\Delta^{\tau+r_i}, \\ |G_i(X)| \leq \bar{c}_i \varepsilon^{\frac{1}{2}+\bar{k}_i} \|X\|_\Delta^{\frac{\tau}{2}+r_i}. \quad (3)$$

其中: $F_i(x)$ 为 $F(x)$ 的第 i 个分量, $G_i(x)$ 为 $G(x)$ 的第 i 列. 那么, 存在常数 $0 < \varepsilon < 1$ 使

$$dX = (\varepsilon E(X) + F(X))dt + G^T(X)d\omega \quad (4)$$

依概率全局渐近稳定.

证明 由条件 1) 以及

$$\frac{\partial V}{\partial X} E(X) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial X_i} E_i(X),$$

考虑到 $\frac{\partial V}{\partial X_i}$ 和 $E_i(X)$ 分别是 $\lambda - r_i$ 和 $r_i + \tau$ 阶齐次的, 又由引理 2 和引理 3 可得

$$\frac{\partial V}{\partial X} E(X) \leq -\underline{c}_0 \|X\|_\Delta^{\tau+\lambda}, \quad (5)$$

其中: $\underline{c}_0 > 0$. 类似的, 由条件 2), 引理 2 和引理 3 可得

$$\frac{\partial V}{\partial X} F(X) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial X_i} F_i(X) \leq c_0 \varepsilon^{1+k_0} \|X\|_\Delta^{\tau+\lambda}. \quad (6)$$

其中: $k_0 = \min_{1 \leq i \leq N} \{k_i\}, c_0 > 0$ 为常数.

由引理 3 可知 $\frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_j}$ 是 $\lambda - r_i - r_j$ 阶齐次的. 由本文第 2 节中 $|A|$ 和 $|A|_\infty$ 的定义, 并且注意到 $G(z)$ 是 $r \times N$ 的矩阵, 以及式 (3), 引理 2 和引理 3 可得

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ G(X) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} G^T(X) \right\} \leq \\ \frac{1}{2} r \left| G(X) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} G^T(X) \right|_\infty \leq \\ \frac{1}{2} r \sqrt{r} \left| G(X) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} G^T(X) \right| \leq \\ \frac{1}{2} r \sqrt{r} \left| \sum_{i,j=1}^n G_i(X) \frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_j} G_j^T(X) \right| \leq \\ \frac{1}{2} r \sqrt{r} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_j} \right| |G_i(X)| |G_j^T(X)| \leq$$

$$\tilde{c}_0 \varepsilon^{1+\tilde{k}_0} \|X\|_{\Delta}^{\tau+\lambda}. \quad (7)$$

其中: $\tilde{c}_0 > 0, \tilde{k}_0 = \min_{1 \leq i, j \leq N} \{\tilde{k}_i + \tilde{k}_j\}$ 为常数. 在上述证明中用到了不等式 $|A|_{\infty} \leq \sqrt{r}|A|$, 这里 A 为 r 维方阵.

利用式 (5)~(7), 对于系统 (4), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V|_{(4)} = & \varepsilon \frac{\partial V}{\partial X} E(X) + \frac{\partial V}{\partial X} F(X) + \\ & \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ G \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} G^T(x) \right\} \leq \\ & -\varepsilon c_0 \|X\|_{\Delta}^{\tau+\lambda} + (c_0 + \tilde{c}_0) \varepsilon^{1+k} \|X\|_{\Delta}^{\tau+\lambda} \leq \\ & -\varepsilon (c_0 - (c_0 + \tilde{c}_0) \varepsilon^k) \|X\|_{\Delta}^{\tau+\lambda}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $k = \min\{k_0, \tilde{k}_0\} > 0$. 显然, 存在常数 $0 < \varepsilon < 1$ 使式 (8) 右边负定. 因此有 $0 < \varepsilon < 1$ 使

$$\mathcal{L}V|_{(4)} \leq -\tilde{c}_0 \|X\|_{\Delta}^{\tau+\lambda}, \quad (9)$$

其中 $\tilde{c}_0 > 0$ 是常数. 由引理 1, 系统 (4) 依概率全局渐近稳定. \square

注 1 定理 1 的证明过程为处理上三角随机非线性系统的控制问题提供了一种系统化的方法, 即低增益齐次占优技术. 不同于文献 [5-11], 该方法通过调节控制器中的低增益参数, 使整个闭环系统达到稳定, 这对于处理上三角系统的控制问题特别有效.

4 控制器设计与稳定性分析

考虑如下上三角随机非线性系统:

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_2 + f_1(\tilde{x}_3))dt + g_1^T(\tilde{x}_3)d\omega, \\ dx_2 &= (x_3 + f_2(\tilde{x}_4))dt + g_2^T(\tilde{x}_4)d\omega, \\ &\vdots \\ dx_{n-2} &= (x_{n-1} + f_{n-2}(\tilde{x}_n))dt + g_{n-2}^T(\tilde{x}_n)d\omega, \\ dx_{n-1} &= x_n dt, \\ dx_n &= u dt, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $u \in R, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 分别为系统的控制输入和状态, $\tilde{x}_i = (x_i, x_2, \dots, x_n)^T; \omega \in R^r$ 为定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的独立标准 Wiener 过程, Ω, \mathcal{F} 和 P 分别为样本空间, σ -代数域和概率测度; 函数 $f_i : R^{n-i-1} \rightarrow R, g_i : R^{n-i-1} \rightarrow R^r$ 为 C^1 函数, 满足 $f_i(0) = 0, g_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, n-2$.

对于系统 (10), 作如下假设:

假设 1 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 存在常数 $b > 0$ 使下式成立:

$$\begin{aligned} |f_i(\tilde{x}_{i+2})| &\leq b(|x_{i+2}| + \dots + |x_n|), \\ |g_i(\tilde{x}_{i+2})| &\leq b(|x_{i+2}| + \dots + |x_n|). \end{aligned} \quad (11)$$

假设 2 由假设 1 可知, 随机系统 (10) 具有上三角结构, 由于上三角结构的特殊性, 通常情况下, 很

难研究其控制问题. 因此至今关于上三角随机非线性系统的文献特别少. 利用低增益齐次占优技术, 在假设 1 的限制下, 首次解决了系统 (10) 的输出反馈控制问题.

整个设计过程分为 3 部分. 首先, 为系统 (10) 所对应的标称系统设计全局稳定的齐次状态反馈控制器; 其次, 为系统 (10) 所对应的标称系统设计全局稳定的齐次输出反馈控制器; 最后, 利用低增益齐次占优技术, 为系统 (10) 设计一个具有可调增益的输出反馈控制器, 通过恰当地选取控制器中的增益参数, 使整个闭环系统达到依概率全局渐近稳定.

4.1 标称系统的状态反馈控制

研究如下标称系统的状态反馈镇定问题:

$$\begin{aligned} dz_i &= z_{i+1} dt, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ dz_n &= v dt, \quad y = z_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Step 1 定义误差变量 $\xi_1 = z_1$ 和李雅普诺夫函数 $V_1(z_1) = \frac{1}{4} z_1^4$, 由式 (12) 可得

$$\mathcal{L}V_1(z_1) \leq z_1^3(z_2 - z_2^*) + z_1^3 z_2^*. \quad (13)$$

选取

$$z_2^* = -n z_1 = -\xi_1 \alpha_1, \quad (14)$$

将其代入式 (13) 可得

$$\mathcal{L}V_1(z_1) \leq -n \xi_1^4 + \xi_1^3(z_2 - z_2^*). \quad (15)$$

Step k 假设在 Step $k-1$, 存在正定正则并且是 C^2 的李雅普诺夫函数 $V_{k-1}(\bar{z}_{k-1})$, 定义如下虚拟控制器 $z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*$:

$$\begin{aligned} z_1^* &= 0, & \xi_1 &= z_1 - z_1^*, \\ z_2^* &= -\xi_1 \alpha_1, & \xi_2 &= z_2 - z_2^*, \\ &\vdots & &\vdots \\ z_k^* &= -\xi_{k-1} \alpha_{k-1}, & \xi_k &= z_k - z_k^*, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\alpha_i (1 \leq i \leq k-1)$ 为正数, 使

$$\mathcal{L}V_{k-1} \leq -(n-k+2) \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^4 + \xi_{k-1}^3(z_k - z_k^*). \quad (17)$$

为了完成归纳, 选取如下李雅普诺夫函数:

$$V_k(\bar{z}_k) = V_{k-1}(\bar{z}_{k-1}) + \frac{1}{4} \xi_k^4, \quad (18)$$

其中 $\bar{z}_k = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T$. 利用式 (12), (16) 和 (17) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_k(\bar{z}_k) &\leq -(n-k+2) \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^4 + \xi_{k-1}^3 \xi_k + \\ &\xi_k^3 \left(z_{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial z_k^*}{\partial z_i} z_{i+1} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

利用 Young 不等式可得

$$\xi_{k-1}^3 \xi_k \leq \frac{1}{2} \xi_{k-1}^4 + c_k \xi_k^4, \quad (20)$$

其中 $c_k > 0$ 是常数. 利用式 (16) 和 Young 不等式可得

$$-\xi_k^3 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial z_k^*}{\partial z_i} z_{i+1} \leq c_{k1} |\xi_k|^3 \sum_{i=1}^k |z_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^4 + \hat{c}_k \xi_k^4. \quad (21)$$

其中: $c_{k1} > 0, \hat{c}_k > 0$, 且均为常数. 将式 (20) 和 (21) 代入 (19) 可得

$$\mathcal{L}V_k(\bar{z}_k) \leq -(n-k+1) \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^4 + \xi_k^3(z_{k+1} - z_{k+1}^*) + \xi_k^3 z_{k+1}^* + (c_k + \hat{c}_k) \xi_k^4. \quad (22)$$

选取虚拟控制器

$$z_{k+1}^* = -(n-k+1+c_k+\hat{c}_k)\xi_k = -\xi_k \alpha_k, \quad (23)$$

将其代入式 (22) 可得

$$\mathcal{L}V_k(\bar{z}_k) \leq -(n-k+1) \sum_{i=1}^k \xi_i^4 + \xi_k^3(z_{k+1} - z_{k+1}^*). \quad (24)$$

Step n 为系统 (12) 选取如下李雅普诺夫函数

$$V_n(\bar{z}_n) = V_{n-1}(\bar{z}_{n-1}) + \frac{1}{4} \xi_n^4, \quad (25)$$

其中 $\xi_n = z_n - z_n^*$. 由式 (22) 可得

$$\mathcal{L}V_n(\bar{z}_n) \leq -\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^4 + \xi_n^3 v + (c_n + \hat{c}_n) \xi_n^4. \quad (26)$$

其中: $c_n > 0, \hat{c}_n > 0$, 且均为常数. 选取如下状态反馈控制器:

$$v = -(1+c_n+\hat{c}_n)\xi_n = -\xi_n \alpha_n, \quad (27)$$

将其代入式 (26) 可得

$$\mathcal{L}V_n(\bar{z}_n) \leq -\sum_{i=1}^n \xi_i^4. \quad (28)$$

4.2 标称系统的输出反馈控制

下面为标称系统 (12) 设计输出反馈控制器. 构造如下观测器:

$$\dot{\hat{\eta}}_k = -l_{k-1} \hat{z}_k, \quad \hat{z}_k = \eta_k + l_{k-1} \hat{z}_{k-1}. \quad (29)$$

其中: l_{k-1} 为待定参数, $k = 2, 3, \dots, n, \hat{z}_1 = z_1$. 在式 (27) 中用 \hat{z}_i 替换 z_i , 可得到输出反馈控制器

$$v(\hat{z}) = -\alpha_n(\hat{z}_n + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_1 z_1), \quad (30)$$

其中 $\hat{z} = (z_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n)^T$. 令 $e_i = z_i - \hat{z}_i, i = 2, 3, \dots, n$, 选取

$$U(\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n) = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^n e_i^2. \quad (31)$$

类似于文献 [12], 可选取 l_{k-1} 使

$$\mathcal{L}V(Z) \leq -\frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^4 + \sum_{i=2}^n e_i^4 \right). \quad (32)$$

其中

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n)^T,$$

$$V(Z) = V_n(z_1, z_2, \dots, z_n) + U(\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n).$$

因此, 由式 (32) 可知, 闭环系统

$$dZ = E(Z)dt = (z_2, z_3, \dots, z_n, v(\hat{z}), f_{n+1}, \dots, f_{2n-1})^T dt \quad (33)$$

依概率全局渐近稳定, 其中 $f_i = -l_{i-n} \hat{z}_{i-n+1}, i = n+1, n+2, \dots, 2n-1$.

引入扩张

$$\Delta = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\text{for } z_1, z_2, \dots, z_n}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\text{for } \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n}),$$

由此可知式 (33) 为 τ 阶齐次的.

4.3 上三角随机非线性系统的输出反馈控制及稳定性分析

下面给出主要结果.

定理 2 在假设 1 的条件下, 采用和式 (30) 具有相同形式的齐次输出反馈控制器, 上三角随机非线性系统 (10) 能被全局渐近镇定.

证明 引入如下坐标变换:

$$z_i = x_i / \varepsilon^{i-1}, \quad v = u / \varepsilon^n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (34)$$

其中 $0 < \varepsilon < 1$ 为一个待定的参数. 系统 (10) 可转化为

$$\begin{aligned} dz_1 &= (\varepsilon z_2 + \bar{f}_1(\bar{z}_3))dt + \bar{g}_1^T(\bar{z}_3)d\omega, \\ dz_2 &= (\varepsilon z_3 + \bar{f}_2(\bar{z}_4))dt + \bar{g}_2^T(\bar{z}_4)d\omega, \\ &\vdots \\ dz_{n-2} &= (\varepsilon z_{n-1} + \bar{f}_{n-2}(\bar{z}_n))dt + \bar{g}_{n-2}^T(\bar{z}_n)d\omega, \\ dz_{n-1} &= \varepsilon z_n dt, \\ dz_n &= \varepsilon v dt, \\ y &= z_1, \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\bar{f}_i(\bar{z}_{i+2}) = \frac{f_i(\bar{x}_{i+2})}{\varepsilon^{i-1}}, \quad \bar{g}_i(\bar{z}_{i+2}) = \frac{g_i(\bar{x}_{i+2})}{\varepsilon^{i-1}}.$$

构造具有可调增益 ε 的齐次观测器, 即

$$\dot{\hat{\eta}}_k = -\varepsilon l_{k-1} \hat{z}_k, \quad \hat{z}_k = \eta_k + l_{k-1} \hat{z}_{k-1}, \quad (36)$$

其中 $l_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 的取值与式 (29) 相同. 另外, 采用和式 (30) 具有相同形式的控制器, 即

$$v(\hat{z}) = -\alpha_n(\hat{z}_n + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_1 z_1). \quad (37)$$

式 (35) 可写成如下形式:

$$dZ = \varepsilon E(Z)dt + F(Z)dt + G^T(Z)d\omega. \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} F(z) &= (\bar{f}_1(\bar{z}_3), \bar{f}_2(\bar{z}_4), \dots, \bar{f}_{n-2}(\bar{z}_n), 0, \dots, 0)^T, \\ G^T(z) &= (\bar{g}_1(\bar{z}_3), \bar{g}_2(\bar{z}_4), \dots, \bar{g}_{n-2}(\bar{z}_n), 0, \dots, 0)^T. \end{aligned}$$

考虑到 $0 < \varepsilon < 1$, 利用假设 1 和式 (34) 可得

$$\begin{aligned} |\bar{f}_i(\tilde{z}_{i+2})| &= \left| \frac{f_i(\tilde{x}_{i+2})}{\varepsilon^{i-1}} \right| \leq b\varepsilon^2 \sum_{j=i+2}^n |z_j|, \\ |\bar{g}_i(\tilde{z}_{i+2})| &= \left| \frac{g_i(\tilde{x}_{i+2})}{\varepsilon^{i-1}} \right| \leq b\varepsilon^2 \sum_{j=i+2}^n |z_j|. \end{aligned} \quad (39)$$

由定理 1 可知, 系统 (35) 是依概率全局渐近稳定的. 结合式 (34), 系统 (10) 也是依概率全局渐近稳定的.

5 仿真例子

考虑如下上三角随机非线性系统:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt + x_3 \ln(1 + \cos^2 x_3) dt + x_3 \sin^2 x_3 d\omega, \\ dx_2 &= x_3 dt, \quad dx_3 = u dt, \quad y = x_1. \end{aligned} \quad (40)$$

显然该系统满足假设 1. 引入坐标变换

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2/\varepsilon, \quad z_3 = x_3/\varepsilon^2, \quad v = u/\varepsilon^3, \quad (41)$$

其中 $0 < \varepsilon < 1$ 是待定参数. 则系统 (40) 转化为

$$\begin{aligned} dz_1 &= \varepsilon z_2 dt + \varepsilon^2 z_3 \ln(1 + \cos^2(\varepsilon^2 z_3)) dt + \\ &\quad \varepsilon^2 z_3 \sin^2(\varepsilon^2 z_3) d\omega, \\ dz_2 &= \varepsilon z_3 dt, \quad dz_3 = \varepsilon v dt, \quad y = z_1. \end{aligned} \quad (42)$$

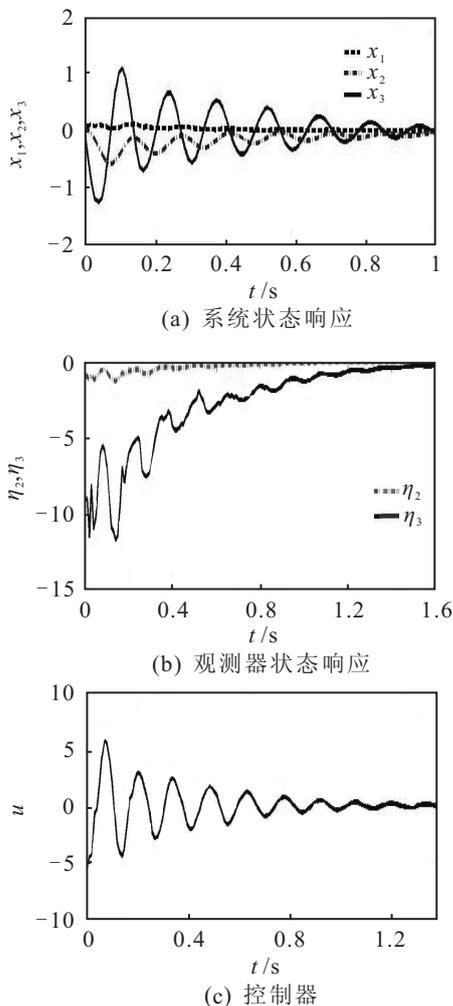


图1 闭环系统 (40)~(43) 的响应曲线

根据前面的设计过程, 可求得控制器和观测器为

$$v(z_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3) = -121(32z_1 + 13\hat{z}_2 + \hat{z}_3),$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 &= -3.1\hat{z}_2, \quad \hat{z}_2 = \eta_2 + 3.1z_1, \\ \dot{\eta}_3 &= -5.4\hat{z}_3, \quad \hat{z}_3 = \eta_3 + 5.4\hat{z}_2. \end{aligned} \quad (43)$$

在仿真实验中, 选取 $\varepsilon = 0.2$, 初值 $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = 0.08$, $x_3(0) = 0.05$, $\eta_2(0) = -1$, $\eta_3(0) = -9.1$. 图 1 给出了闭环系统 (40)~(43) 的响应曲线, 并且验证了控制方案的有效性.

6 结 论

本文利用低增益齐次占优技术, 研究了一类上三角随机非线性系统的输出反馈控制问题. 所设计的控制器保证了闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的. 未来的工作就是研究上三角系统随机非线性系统的有限时间镇定问题.

参考文献(References)

- [1] Mazenc F, Vivalda J C. Global asymptotic output feedback stabilization of feedforward systems[J]. European J of Control, 2002, 8(6): 519-530.
- [2] Qian C J, Li J. Global output feed-back stabilization of upper-triangular nonlinear systems using a homogeneous domination approach[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2006, 16(9): 441-463.
- [3] 李武全, 井元伟, 张嗣瀛. 一类上三角随机非线性系统的状态反馈镇定[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1543-1546. (Li W Q, Jing Y W, Zhang S Y. State-feedback stabilization of a class of upper-triangular stochastic nonlinear systems[J]. Control and Decision 2010, 25(10): 1543-1546.)
- [4] Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P V. Constructive nonlinear control[M]. New York: Springer, 1997.
- [5] Krstic M, Deng H. Stabilization of uncertain nonlinear systems[M]. New York: Springer, 1998.
- [6] Pan Z G, Basar T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion[J]. SIAM J on Control and Optimization, 1999, 37(3): 957-995.
- [7] Wu Z J, Xie X J, Zhang S Y. Adaptive backstepping controller design using stochastic small-gain theorem[J]. Automatica, 2007, 43(4): 608-620.
- [8] Wu Z J, Yang J, Shi P. Adaptive tracking for stochastic nonlinear systems with markovian switching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(9): 2135-2141.
- [9] Li W Q, Xie X J. Inverse optimal stabilization for stochastic nonlinear systems whose linearizations are not stabilizable[J]. Automatica, 2009, 45(2): 498-503.
- [10] Li W Q, Jing Y W, Zhang S Y. Output-feedback stabilization for stochastic nonlinear systems whose linearizations are not stabilizable[J]. Automatica, 2010, 46(4): 752-760.

(下转第1504页)