

文章编号: 1001-0920(2012)11-1729-06

基于最小驻留时间法估计线性切换系统的分量最终界

郭荣伟^{1,2}, 王玉振¹

(1. 山东大学 控制科学与工程学院, 济南 250061; 2. 山东轻工业学院 理学院, 济南 250353)

摘要: 研究线性切换系统的最终界问题. 首先, 通过应用最小驻留时间法和分量最终界方法得到线性切换系统的分量最终界; 然后, 基于 2-范数方法得到了估计线性切换系统最小驻留时间的新方法. 与已有方法相比, 该方法在某些情况下具有一定的优势, 减少了估计的保守性. 数值仿真结果验证了所得结论的正确性和有效性.

关键词: 线性切换系统; 最终界; 2-范数; 多重 Lyapunov 函数法; 最小驻留时间; 分量最终界法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Componentwise ultimate bound for switched linear systems by minimum dwell time method

GUO Rong-wei^{1,2}, WANG Yu-zhen¹

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Ji'nan 250061, China; 2. School of Science, Shandong Polytechnic University, Ji'nan 250353, China. Correspondent: GUO Rong-wei, E-mail: rwguo@mail.sdu.edu.cn)

Abstract: The problem of ultimate bound for the switched linear systems is studied. Firstly, the componentwise ultimate bound for the switched linear systems is obtained by using both the minimum dwell time method and the componentwise ultimate bound method. Then, a novel method which can estimate the minimum dwell time for such switched systems is proposed based on the 2-norm method. In the comparison with the previous methods, the obtained method has some advantages over those in some cases, which reduces the conservative property of the estimation. Finally, a numerical simulation results show the correctness and effectiveness of the obtained results.

Key words: switched linear systems; ultimate bound; 2-norm; multiple Lyapunov method; minimum dwell time; componentwise ultimate bound method

1 引言

现实生活中许多系统都存在切换现象, 即整个系统在几个不同的子系统之间依据环境因素的变化而表现出不同的模式. 最明显的例子是火车、汽车等机动车在其行进过程中的速度调整, 即在加速或减速中的换挡. 切换系统实质上是整个系统在一些不同子系统间进行切换, 但它并非仅仅是一些单一子系统的简单组合, 远比这复杂的多.

在过去的 20 多年中, 由于切换系统在理论和实际中具有重大价值, 该类系统被广泛地研究, 并取得了一系列的结果^[1-10], 其中共同 Lyapunov 函数法 (CLF) 和多重 Lyapunov 函数法 (MLF) 是研究切换系

统稳定性的两个重要方法. 对于一个给定的切换系统, 验证其是否具有共同 Lyapunov 函数是个公开难题, 对于某些特殊的线性系统和非线性系统, 目前得到了一些判断其是否具有共同 Lyapunov 函数的充分和充要条件. 对于多重 Lyapunov 函数法而言, 寻找使整个切换系统在任意切换路径下稳定的最小驻留时间非常困难. 对于线性切换系统, 文献 [9] 给出了估计其最小驻留时间的方法. 对于一类特殊的线性切换系统, 文献 [10] 也给出了一个估计最小驻留时间的算法. 与原来的算法^[9]相比, 该算法在某些情况下具有一定的优势. 本文应用 2-范数方法得到了估计线性切换系统最小驻留时间的新方法, 该方法包含了文献 [9-10] 中的结果.

收稿日期: 2011-05-24; 修回日期: 2011-09-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074068, 61034007, 60774009); 教育部高校博士点专项基金项目(20040422059); 山东省自然科学基金项目(2010FM013).

作者简介: 郭荣伟(1979—), 男, 副教授, 博士生, 从事切换系统和 Hamilton 系统的研究; 王玉振(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统和切换系统等研究.

然而,在实际中,切换系统往往受到某些有界干扰的影响.在这种情况下,只要有界的干扰项不消失,即使切换系统的每个子系统都是渐近稳定的,并且整个切换系统具有共同 Lyapunov 函数,切换系统也不可能达到渐近稳定,其轨线只能收敛到某一个有界区域(最终界),通常称该切换系统达到了实际稳定^[11].关于切换系统的实际稳定,目前主要研究两个问题:一个是在任意切换路径下切换系统在什么条件下能达到实际稳定;另一个是当切换系统达到实际稳定时如何估计其最终界.关于第1个问题,目前的结果主要有共同 Lyapunov 函数法和多重 Lyapunov 函数法.关于第2个问题,目前已经得到了很多结果^[12-16],其中 Haimovich 等^[15-16]提出的分量最终界法在估计切换系统的最终界时具有很大的优势,比用 Lyapunov 函数法得到的结果更精确,大大地减少了估计的保守性.应用该方法得到的最终界也被称为切换系统的分量最终界.

需要指出的是,文献[16]只研究了切换系统在存在共同的可逆复矩阵 V (此时切换系统具有共同 Lyapunov 函数)时最终界的估计问题.事实上,切换系统不具有共同 Lyapunov 函数才是最一般的情况.当上述条件不满足时,如何估计切换系统的最终界成为目前迫切要解决的难题.另一方面,当切换系统不存在共同 Lyapunov 函数时,如何估计切换系统的最小驻留时间也是个关键问题.虽然文献[17]给出了一个算法,但是该方法得到的结果与切换路径有关,需要事先画出驻留时间的状态图,然后再估计最小驻留时间.因此,对于一般的切换系统,如何估计其最小驻留时间是研究切换系统最终界的另一个重要问题.

本文研究了线性切换系统的最终界问题.首先,利用最小驻留时间法和分量最终界法得到了线性切换系统的分量最终界;然后,基于 2-范数方法得到了估计线性切换系统最小驻留时间的新方法,与以往方法相比,该方法在某些情况下更精确,减少了估计的保守性;最后,通过数值仿真的结果验证了所得结论的正确性和有效性.

2 系统模型

考虑切换系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + E_{\sigma(t)}w(t). \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $w(t) \in \mathbf{R}^p$ 为有界扰动,即 $w(t) \preceq W$, 表示 $w_i(t) \leq W_i, i = 1, 2, \dots, p$, 而 W 为已知常向量; 映射 $\sigma(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为一个分段常值函数,称为切换路径,且 $\sigma(t) = i (i \in \mathcal{I})$ 表示第 i 个子系统起作用; A_i 为 Hurwitz 的, $i \in \mathcal{I}$. 假设切换系统(1)的每个子系统是实际稳定的,

即 $\dot{x} = A_i x + E_i w(t)$ 是实际稳定的, $i \in \mathcal{I}$.

注 1 如果 $w(t) \equiv 0$, 则切换系统(1)变为

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x. \quad (2)$$

对于任意的切换路径 $\sigma(t) = i_m \in \mathcal{I} (t \in [t_m, t_{m+1}), m = 0, 1, \dots)$, $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty}$ 称为切换时间序列且满足 $t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < +\infty$, 相应的状态为 $\{x_m\}_{m=0}^{+\infty}$, 其中 $x_m = x(t_m)$. 令 $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ 表示驻留时间, $k = 1, 2, \dots$.

本文的目的是研究切换系统(1)在其不具有共同 Lyapunov 函数时的最终界.

3 预备知识

首先引入一些记号. \mathbf{R} 和 \mathbf{C} 分别表示实数集和复数集, j 是虚数单位 ($j^2 = -1$). 如果 $x(t)$ 是一个向量函数, 则“max”表示向量 $x(t)$ 的每个分量分别求最大值. $|M|$, $\text{Re}(M)$ 和 $\text{Im}(M)$ 分别表示向量或矩阵 M 每个分量的模、实部和虚部. $M_{i,k}$ 表示矩阵 M 的第 (i, k) 个元素. 如果 $X, Y \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 则符号“ $X \preceq Y$ ”表示 $X_{i,k} \leq Y_{i,k}, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m$. 类似地, “ $X \succeq Y$ ”表示 $X_{i,k} \geq Y_{i,k}, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m$. 对于任意的 $i \neq k$, 如果 $M_{i,k} \geq 0$, 则称矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 Metzler 的. M 是 Metzler 的当且仅当对于任意的 $t \geq 0, e^{Mt} \geq 0$. 任意给定一个矩阵 $N \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 定义 $\mathcal{M}(N) \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 有

$$\mathcal{M}(N) = \begin{cases} \text{Re}X_{ij}, & i = j; \\ |X_{ij}|, & i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

注意到, 对于每个 $N \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $\mathcal{M}(N)$ 都是 Metzler 的. $\|\cdot\|$ 是指向量或矩阵的 2-范数.

为了研究的需要, 引入以下 3 个引理.

引理 1^[10] 如果 $\|e^{A_i t}\| \leq 1 (i \in \mathcal{I}, t \geq 0)$, 且等号成立当且仅当 $t = 0$, 则切换系统(2)在任意切换路径下渐近稳定.

引理 2^[15] 考虑实连续系统

$$\dot{x} = A(t)x(t) + v(t). \quad (4)$$

其中: $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}, v(t) \in \mathbf{R}^n$, 且满足: 只要 $x(0) \succeq 0$, 则有 $x(t) \succeq 0, t \geq 0$. 设 $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 Metzler 的, 且满足 $B - A(t) \succeq 0, t \geq 0$. 定义辅助系统

$$\dot{y} = By(t) + v(t), \quad (5)$$

只要 $y(0) \succeq x(0) \succeq 0$, 则有 $y(t) \succeq x(t), t \geq 0$.

引理 3^[15] 考虑实连续系统

$$\dot{x} = Ax(t) + v(t). \quad (6)$$

其中: $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 Metzler 的, $|v(t)| \in \mathbf{R}^n \preceq W, t \geq 0, W$ 是有界的常向量. 定义辅助系统

$$\dot{y} = Ay(t) + W, \quad (7)$$

只要 $y(0) \succeq x(0)$, 则有 $y(t) \succeq x(t), t \geq 0$.

4 主要结果

通过应用最小驻留时间法和分量最终界法, 可得到如下的结果.

定理 1 对于切换系统 (1), 如果存在一族可逆矩阵 $P_i \in \mathbf{C}^{n \times n}, i \in \mathcal{I}$, 满足

$$A_i = P_i^{-1} A_i P_i, \bar{A}_i = \mathcal{M}(A_i), \quad (8)$$

$$Z = \max_{w: |w| \leq W} |P_i^{-1} E_i w(t)|. \quad (9)$$

其中: $\mathcal{M}(\cdot)$ 见式 (3), A_i 为矩阵 A_i 的 Jordan 标准型, 且 \bar{A}_i 是 Hurwitz 的, $i \in \mathcal{I}$. 则切换系统 (1) 在驻留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径下是实际稳定的, 且最终界为

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq C\}. \quad (10)$$

其中: $C = \max_{i \in \mathcal{I}} \{-|P_i| \bar{A}_i^{-1} Z\}$, τ_0 为切换系统 (2) 的最小驻留时间.

证明 作变换 $x = P_i z$, 则切换系统 (1) 第 i 个子系统在新坐标系下表示为

$$\dot{z} = A_i z + P_i^{-1} E_i w(t), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (11)$$

因为 $z(t)$ 可能有复分量, 所以 $z(t)$ 可表示为 $z(t) = e^{\theta(t)j} \rho(t)$, 其中 $\rho(t) = |z(t)|$, 且 $\theta(t)$ 表示为

$$\theta(t) = \text{diag}(\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t)), \quad (12)$$

$$\theta_k(t) = \arg\{z_k(t)\}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

将其代入式 (11) 中, 有

$$\begin{aligned} \dot{z} &= j e^{\theta(t)j} \dot{\theta}(t) \rho(t) + e^{\theta(t)j} \dot{\rho}(t) = \\ &A_i e^{\theta(t)j} \theta(t) + P_i^{-1} E_i w(t). \end{aligned} \quad (14)$$

将式 (14) 两边同时左乘以 $e^{-\theta(t)j}$, 得到

$$\begin{aligned} j \dot{\theta}(t) \rho(t) + \dot{\rho}(t) &= \\ e^{-\theta(t)j} A_i e^{\theta(t)j} \rho(t) + e^{-\theta(t)j} P_i^{-1} E_i w(t). \end{aligned} \quad (15)$$

然后取实部, 得到系统

$$\dot{\rho}(t) = N_i(t) \rho(t) + \gamma_i(t). \quad (16)$$

其中

$$N_i(t) = \text{Re}\{e^{-\theta(t)j} A_i e^{\theta(t)j}\}, \quad (17)$$

$$\gamma_i(t) = \text{Re}\{e^{-\theta(t)j} P_i^{-1} E_i w(t)\}, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (18)$$

由式 (12) 和 (13), 得到

$$[N_i(t)]_{l,k} = \begin{cases} \text{Re}\{[A_i]_{l,k}\}, & l = k; \\ \text{Re}\{e^{-j(\theta_l(t) - \theta_k(t))} [A_i]_{l,k}\}, & l \neq k. \end{cases}$$

所以 $N_i(t) \leq \mathcal{M}(A_i)$. 由于 $\mathcal{M}(A_i) \leq \bar{A}_i$, 很容易得到 $N_i(t) \leq \bar{A}_i$. 显然 $|\gamma_i(t)| \leq Z$.

定义两个辅助系统

$$\dot{y}(t) = \bar{A}_i y(t) + \gamma_i(t), \quad (19)$$

$$\dot{Y}(t) = \bar{A}_i Y(t) + Z. \quad (20)$$

对于系统 (16) 和 (19), 由引理 2 可得 $\rho(t) \leq y(t)$. 对于系统 (19) 和 (20), 根据引理 3, 只要 $Y(0) \succeq y(0)$, 则有

$Y(t) \succeq y(t)$. 因此

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} |P_i^{-1} x(t)| &= \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = -\bar{A}_i^{-1} Z. \end{aligned} \quad (21)$$

所以, 切换系统 (1) 第 i 个子系统的最终界为

$$\Omega_i = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq |P_i| \bar{A}_i^{-1} Z\}.$$

另一方面, 对于驻留时间满足 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 切换系统 (2) 是渐近稳定的. 又注意到切换系统 (1) 的每个子系统是实际稳定的, 即 $\dot{x} = A_i x + E_i w(t)$ 是实际稳定的, $i \in \mathcal{I}$. 因此, 对于驻留时间满足 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 切换系统 (1) 是实际稳定的, 且其最终界为

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq C\}. \quad \square$$

注 2 如果 $P_i \equiv P$, 根据文献 [16] 中的结果可知 $A_i (i \in \mathcal{I})$ 具有共同 Lyapunov 函数, 则每个子系统的驻留时间 τ 可任意小, 且 $\Omega_i \equiv \Omega$. 即文献 [16] 中的结果只是定理 1 的特殊情况.

注 3 从定理 1 的证明可知, 如何估计使得切换系统 (2) 在任意切换路径下渐近稳定的最小驻留时间 τ_0 是非常重要的.

下面将给出如何估计切换系统 (2) 的最小驻留时间 τ_0 的结果.

定理 2 对于切换系统 (2), 如果存在一族 Lyapunov 函数 $V_i(x) = x^T P_i x$, 其中 $P_i > 0$, 且 $V_i(x)$ 是其第 i 个子系统的 Lyapunov 函数, $i \in \mathcal{I}$, 则切换系统 (2) 在驻留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径下渐近稳定. 其中

$$\tau_0 = \max_{i \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{\ln \mu_i}{\lambda_i} \right\}, \quad (22)$$

$$\mu_i = \frac{b_i}{a_i}, \quad \lambda_i = \frac{c_i}{b_i}, \quad (23)$$

$$a_i = \lambda_{\min}(P_i), \quad b_i = \lambda_{\max}(P_i), \quad c_i = \lambda_{\min}(Q_i), \quad (24)$$

$$Q_i = -(A_i^T P_i + P_i A_i), \quad i \in \mathcal{I}, \quad (25)$$

$\lambda_{\min}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 分别为矩阵 (\cdot) 特征值的最小值和最大值.

证明 因为 $V_i(x)$ 是切换系统 (2) 第 i 个子系统的 Lyapunov 函数, $i \in \mathcal{I}$, 所以容易得到

$$a_i \|x\|^2 \leq V_i(x) \leq b_i \|x\|^2, \quad (26)$$

$$\dot{V}_i(x)|_{(i)} = \frac{\partial^T V_i(x)}{\partial x} A_i x \leq -x^T Q_i x \leq -\lambda_i V_i(x). \quad (27)$$

假设切换系统 (2) 第 i 个子系统在 $[t_{k-1}, t_k)$ 上起作用, 由不等式 (27), 容易得到

$$\ln V_i(x_k) - \ln V_i(x_{k-1}) \leq -\lambda_i \tau_k,$$

整理得

$$V_i(x_k) \leq e^{-\lambda_i \tau_k} V_i(x_{k-1}). \quad (28)$$

由不等式 (26) 和 (28), 可得

$$\|x_k\|^2 \leq \frac{V_i(x_k)}{a_i} \leq \frac{e^{-\lambda_i \tau_k}}{a_i} V_i(x_{k-1}) \leq e^{-\lambda_i \tau_k} \mu_i \|x_{k-1}\|^2.$$

如果选择驻留时间 τ_k 使得 $e^{-\lambda_i \tau_k} \mu_i \leq 1$, 即 $\tau_k \geq (\ln \mu_i) / \lambda_i$, 则 $\|x_k\|^2 \leq \|x_{k-1}\|^2$, 从而序列 $\{\|x_k\|^2\}$ 单调递减且有下界 0, 于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^2$ 存在. 然后, 在切换时间序列 $\{t_k\}$ 中选出满足 $\tau_{k'} \geq \tau_1$ 的子序列 $\{t_{k'}\}$ (其中 $\tau_1 > \tau_0$), 使得 $\|x_{k'}\|^2 \leq l \|x_{k'-1}\|^2, 0 < l < 1$, 从而 $\lim_{k' \rightarrow \infty} \|x_{k'}\|^2 = \lim_{k' \rightarrow \infty} l^{k'} \|x_0\|^2 = 0$. 因此, 可知切换系统 (2) 在驻留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径下渐近稳定. \square

注 4 从定理 2 的证明可以看出, 找到使得序列 $\{\|x_k\|^2\}$ 单调递减的驻留时间是估计切换系统 (2) 最小驻留时间的关键.

对于一些特殊的线性切换系统, 例如 2-范数 $\|x(t)\| = \|e^{A_i t}\|$ 比较容易计算的系统, 有如下结果.

推论 1 对于切换系统 (2), 假设存在一族非奇异矩阵 $M_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, i \in \mathcal{I}$, 且满足

$$B_i = M_i A_i M_i^{-1}.$$

1) 如果 $B_i = \text{diag}(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)})$, 其中特征值 $\lambda_k^{(i)} < 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则最小驻留时间为

$$\tau_0 = \max_{i \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{\ln L_i}{\lambda_i} \right\}. \quad (29)$$

其中: $\lambda_i = \min_{k=1}^n |\lambda_k^{(i)}|$, 而

$$L_i = \|M_i\| \|M_i^{-1}\|, i \in \mathcal{I}. \quad (30)$$

2) 如果 $B_i = \text{diag}(J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \dots, J_s^{(i)}), i \in \mathcal{I}$, 其中

$$J_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_k^{(i)} & -\beta_k^{(i)} \\ \beta_k^{(i)} & \alpha_k^{(i)} \end{bmatrix}, \text{ 或 } J_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)}, \quad (31)$$

$$\alpha_k^{(i)} < 0, \beta_k^{(i)} \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \dots, s,$$

则最小驻留时间为

$$\tau_0 = \max_{i \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{\ln L_i}{\alpha_i} \right\}. \quad (32)$$

其中: $\alpha_i = \min_{k=1}^s |\alpha_k^{(i)}|, L_i$ 见式 (30).

3) 如果 $B_i = \text{diag}(J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \dots, J_s^{(i)}), i \in \mathcal{I}$, 其中

$$J_l^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_l^{(i)} & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_l^{(i)} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_l^{(i)} \end{bmatrix}_{n_k^{(i)} \times n_k^{(i)}}, \quad (33)$$

$\lambda_l^{(i)} < 0, n_k^{(i)}$ 表示特征值 $\lambda_l^{(i)}$ 的重数, $l = 1, 2, \dots, s$. 则最小驻留时间为 τ_0 , 且 τ_0 满足如下不等式组:

$$L_i e^{\lambda_l^{(i)} \tau_0} \sqrt{F_i(\tau_0, n_k^{(i)})} \leq 1. \quad (34)$$

其中: L_i 见式 (30), 而

$$F_i(\tau_0, n_k) = n_k^{(i)} + \sum_{n=1}^{n_k^{(i)}-1} \frac{(n_k^{(i)} - n) \tau_0^{2n}}{(n!)^2}, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (35)$$

证明 对于情况 1) 和情况 2), 切换系统 (2) 的 2-范数很容易计算, 即 $\|x(t)\| = \|e^{A_i t}\| \leq L_i e^{c_i t}$, 其中 $L_i > 0, c_i < 0, i \in \mathcal{I}$, 因此, 当每个子系统的驻留时间满足 $\tau \geq \tau_0$ 时, $\|x(t)\| = \|e^{A_i \tau}\| \leq 1$. 根据引理 1, 上述结论成立.

对于情况 3), 易得 $\|e^{A_i t}\| \leq L_i \|e^{B_i t}\|, i \in \mathcal{I}$, 而

$$\|e^{B_i t}\| = \|\text{diag}(e^{J_1^{(i)} t}, e^{J_2^{(i)} t}, \dots, e^{J_s^{(i)} t})\|,$$

$$\|e^{J_l^{(i)} t}\| = e^{\lambda_l^{(i)} t} \|C_l^{(i)}(t)\|,$$

其中

$$C_l^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k^{(i)}-1}}{(n_k^{(i)}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k^{(i)}-2}}{(n_k^{(i)}-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n_k^{(i)} \times n_k^{(i)}}.$$

又因为 $[C_l^{(i)}(t)]^T [C_l^{(i)}(t)] \geq 0$, 所以有

$$[C_l^{(i)}(t)]^T [C_l^{(i)}(t)] \leq$$

$$\text{Trac}([C_l^{(i)}(t)]^T [C_l^{(i)}(t)]) I = F_i(t, n_k^{(i)}) I.$$

其中: $\text{Trac}(\cdot)$ 为矩阵 (\cdot) 的迹, I 为 $n_k^{(i)} \times n_k^{(i)}$ 阶单位矩阵. 容易得到

$$\|C_l^{(i)}(t)\| \leq \sqrt{F_i(t, n_k^{(i)})},$$

进而

$$\|e^{J_l^{(i)} t}\| \leq e^{\lambda_l^{(i)} t} \sqrt{F_i(t, n_k^{(i)})}, l = 1, 2, \dots, s, i \in \mathcal{I}.$$

从上述过程易知, 如果 τ_0 满足不等式组 (34), 则切换系统 (2) 在驻留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径下是渐近稳定的. \square

5 数值例子

下面通过具体例子来验证本文结果的正确性和有效性.

考虑切换系统

$$\dot{x} = A_i x + E_i w(t), i \in \mathcal{I} = \{1, 2\}. \quad (36)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & 3 \\ -50 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w(t) \preceq W = (0.01 \quad 0.02)^T.$$

当 $w(t) \equiv 0$ 时, 系统 (36) 中不存在有界噪声干扰. 文献 [17] 指出, 系统 (36) 不存在共同 Lyapunov 函数, 并给出了相应的最小驻留时间 $\tau_0 = 5.06239$.

下面应用本文的方法求解系统 (36) 在未受干扰时的最小驻留时间. 事实上, 存在两个非奇异实矩阵 $M_i, i = 1, 2$, 分别满足 $M_i A_i M_i^{-1} = B_i, i = 1, 2$. 其中

$$M_1 = \begin{bmatrix} 4.0833 & 0.0204 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1.75 & \frac{\sqrt{599.75}}{2} \\ -\frac{\sqrt{599.75}}{2} & -1.75 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & -1 \end{bmatrix},$$

因此, $\|e^{A_1 t}\| \leq \|M_1\| \|M_1^{-1}\| e^{-1.75t} = 4.0834 e^{-1.75t}$, $\|e^{A_2 t}\| \leq \|M_2\| \|M_2^{-1}\| e^{-t} = \sqrt{5} e^{-t}$. 根据推论 1, 得到 $\tau_1 = 0.8040, \tau_2 = 1.6094$, 于是最小驻留时间 $\tau'_0 = \max\{\tau_1, \tau_2\} = 1.6094$. 很显然 $\tau'_0 < \tau_0$.

注 5 应用本文的方法估计切换系统 (2) 的最小驻留时间比应用文献 [17] 中的方法得到的结果更精确, 在一定程度上减少了估计的保守性.

下面应用定理 1 估计系统 (36) 的最终界. 事实上, 存在两个非奇异矩阵 $P_i \in \mathbf{C}^{2 \times 2}, i = 1, 2$, 且分别满足 $P_i A_i P_i^{-1} = \Lambda_i, i = 1, 2$. 其中

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & -0.005 - 0.2449i \\ -0.0833 + 4.0816i & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -2.2361 & 2.2361i \\ -i & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -1.75 + 12.2499i & 0 \\ 0 & -1.75 + 12.2499i \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -1 + 4.4721i & 0 \\ 0 & -1 + 4.4721i \end{bmatrix}.$$

从而

$$\bar{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} -1.75 & 0 \\ 0 & -1.75 \end{bmatrix}, \bar{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Z = \max_{i=1}^2 |P_i^{-1} E_i w(t)| = (0.778 \quad 3.1375)^T.$$

根据定理 1 的结果, 易得

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_1| \leq 0.8837, |x_2| \leq 3.6078\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_1| \leq 8.7554, |x_2| \leq 3.9155\}.$$

因此, 切换系统 (36) 的最终界为

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 =$$

$$\{x \in \mathbf{R}^n : |x_1| \leq 8.7554, |x_2| \leq 3.9155\}.$$

最后进行数值仿真. 选择初值 $[x_1(0), x_2(0)] =$

[4, 8], 切换路径为

$$\sigma(t) = \begin{cases} 2, & t \in [t_{2m}, t_{2m+1}), \text{ 且} \\ & t_{2m+1} - t_{2m} = 1.6094 + 0.1 * \text{rand}; \\ 1, & t \in [t_{2m+1}, t_{2m+2}), \text{ 且} \\ & t_{2m+2} - t_{2m+1} = 1.6094 + 0.1 * \text{rand}. \end{cases}$$

其中: $m = 0, 1, 2, \dots$; $\text{rand} \in (0, 1)$ 是一个随机数. 仿真结果如图 1 所示, 其中矩形表示应用定理 1 得到的切换系统 (36) 的最终界. 从图 1 可以看出, 在上述切换路径下, 切换系统 (36) 的轨线很快收敛到其最终界. 仿真结果表明, 定理 1 在估计切换系统 (1) 的最终界时非常有效.

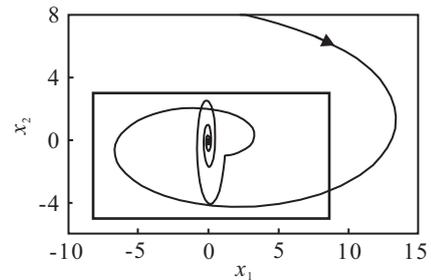


图 1 切换系统的状态响应和最终界

6 结 论

本文研究了线性切换系统的最终界问题. 首先, 通过应用最小驻留时间法和分量最终界方法得到了线性切换系统的分量最终界. 与以往结果相比, 本文的结果更一般, 应用范围更广. 然后, 基于 2-范数方法, 得到了估计线性切换系统最小驻留时间的新方法. 与以往方法相比, 该方法更一般, 并且在某些情况下得到的最小驻留时间较小, 在一定程度上减少了估计的保守性. 最后, 通过数值仿真例子验证了所得结果的正确性和有效性.

参考文献(References)

- [1] Branicky M. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.
- [2] Cheng D, Lin Y, Wang Y. Controllability of switched bilinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(4): 511-515.
- [3] Cheng D, Guo L, Lin Y, et al. Stabilization of switched linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 661-666.
- [4] Dafouz J, Riedinger P, Iung C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1883-1887.
- [5] Liberzon D, Morese A. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control System Maganize, 1999, 19(5): 59-70.

- [6] Liberzon D, Tempo R. Common Lyapunov functions and gradient algorithms[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 990-994.
- [7] Lin H, Antsaklis P. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(1): 1-15.
- [8] 程代展, 郭宇骞. 切换系统进展[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 954-959.
(Cheng D Z, Guo Y Q. Survy of switched system[J]. J of Control Theorem & Applications, 2005, 22(6): 954-959.)
- [9] Ni W, Cheng D, Hu X. Minimum dwell time for stability and stabilization of switched linear systems[C]. Proc of the 7th World Conf on Intelligent Control and Automation. Chongqing, 2008: 4109-4115.
- [10] Guo R, Wang Y. Stability analysis for a class of switched linear systems[J]. Asian J of Control, 2012, 14(3): 817-826.
- [11] Sontag E, Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property[J]. Systems & Control Letters, 1995, 24(5): 351-359.
- [12] Zhang L, Lu Y, Chen Y, et al. Robust uniformly ultimate boundedness control for uncertain switched linear systems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(7): 1709-1714.
- [13] Zhang X, Zhao J. An algorithm of ultimate boundedness for a class of switched linear systems[J]. Int J of Control, 2002, 75(16): 399-1405.
- [14] Xu X, Zhai G. Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(11): 1897-1903.
- [15] Haimovich H, Seron M. Componentwise ultimate bound computation for switched linear systems[C]. The 28th Chinese Control Conf. Shanghai, 2009: 16-18.
- [16] Haimovich H, Seron M. Componentwise ultimate bound and invariant set computation for switched linear systems[J]. Automatica, 2010, 46(11): 1897-1901.
- [17] Xiang Z, Xiang W. Stability analysis of switched nonlinear systems based on dynamical dwell time approach[C]. IEEE Int Conf on Networking, Sensing and Control. Sanya, 2008: 1758-1763.

(上接第1728页)

- [8] 韩峰, 杨万海, 袁晓光. 基于模糊集合的证据理论信息融合方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(3): 449-452.
(Han F, Yang W H, Yuan X G. Evidence theory information fusion method based on fuzzy set[J]. Control and Decision, 2010, 25(3): 449-452.)
- [9] 柳毅, 高晓光, 卢广山, 等. 基于加权证据组合的多传感器目标识别[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(12): 1475-1561.
(Liu Y, Gao X G, Lu G S, et al. Multisensor target recognition based on the weighted evidence combination[J]. Systems Engineering and Electronics, 2003, 25(12): 1475-1561.)
- [10] Lefevre E, Colot O, Vannoorenberghe P. Belief functions combination and conflict management[J]. Information Fusion, 2002, 3(3): 149-162.
- [11] De S K, Biswas R, Roy A R. Some operations on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(3): 477-484.
- [12] 王伟平, 吴祈宗. 关于 Vague 集理论中记分函数的分析[J]. 北京理工大学学报, 2008, 28(4): 372-376.
(Wang W P, Wu Q Z. Analysis on the score function in Vague set theory[J]. Trans of Beijing Institute of Technology, 2008, 28(4): 372-376.)

下 期 要 目

- 基于一种混合学习策略的移动机器人路径规划方法 郜园园, 等
- 基于谱聚类欠取样的不均衡数据 SVM 分类算法 陶新民, 等
- 基于感染球策略的传感器网络移动代理路由算法 刘 遼, 等
- 基于灰关联分析的 KFCM-LSSVM 蒸发过程软测量 钱晓山, 阳春华
- 基于新邻域结构的 Memetic 算法求解流水车间调度问题 徐建有, 顾树生
- 求解 TSP 的人工萤火虫群优化算法 周永权, 黄正新
- 信息共享受限条件下的供应链网络系统牛鞭效应控制策略 李 翀, 刘思峰
- 传感器网络中陷阱空洞的分布式检测及修复 王力立, 吴晓蓓