文章编号: 1001-0920 (2012) 12-1894-05

基于概率可信度的区间数排序方法

邱涤珊, 贺 川, 朱晓敏

(国防科学技术大学 信息系统工程重点实验室，长沙 410073)

摘 要: 针对多属性决策理论的研究需要, 提出一种基于概率可信度的区间数排序方法, 给出了区间数排序问题的形式化描述. 为明确排序规则, 定义了区间数的二元序关系. 采用概率密度函数表征区间数的特征信息, 并构建出区间数序关系的概率可信度模型. 通过建立互补判断矩阵, 将区间数排序问题转换为矩阵运算过程, 实现了不同类型区间数的比较. 实验结果表明, 所提出方法能够有效克服传统排序方法在适用范围方面的局限性, 具有排序速度快、求解质量高等优点.

关键词: 区间数；排序方法；概率可信度；特征信息；序关系

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

Ranking method research of interval numbers based on probability reliability distribution

QIU Di-shan, HE Chuan, ZHU Xiao-min

(Science and Technology on Information Systems Engineering Laboratory，National University of Defense Technology, Changsha 410073，China．Correspondent：HE Chuan，E-mail：chuanhe@nudt.edu.cn)

Abstract: On the basis of the research demands in multiple attribute decision theory, this paper proposes a method to rank interval numbers by employing probability reliability, and gives a formulation depiction of the ranking problem. Then the order relation of interval numbers is defined to establish the ranking rule. The feature information is denoted as probability consistency function, and the probability reliability model of order relation is constructed. In order to compare various interval numbers, complementary judgment matrix is introduced and the ranking problem is converted into matrix operation. Experiment results show the effectiveness and feasibility of the proposed method in contrast to the traditional approaches.

Key words: interval number；ranking method；probability reliability；feature information；order relations

1 引 言

在多属性决策过程中, 由于测量、计算、存储等带来的数据误差和所获取信息的不完整性, 使得表达行为特征的原始数据不是确定的数值, 而是一个粗糙的范围, 这种范围通常以区间数的形式表示. 实际上, 区间数在经济、军事、工程、技术等各个领域都已得到广泛应用, 特别是在不确定性问题分析方面, 区间数排序更是一个值得深入探讨的课题[1]. 目前, 国内外学者在此方面作了大量的研究. 例如 Young[2] 和 Pavel[3] 等提出了利用端点坐标或中值点作为区间数的排序依据, 该方法计算复杂度低, 应用较为灵活, 但是排序结果缺乏合理性, 误差较大. Atanu 等[4] 提出了一种基于均值和区间宽度的多级测度指标, 利用该指标可定量描述区间数的优先程度, 但该方法对中值相同的区间数无法有效分辨. Kundu 等[5]通过构建二元映射函数, 将区间数转化为实数进行对比, 计算过程较为复杂, 而且容易出现排序结果与直观判断不符的情况. 张兴芳等[6]给出了基于可信度的区间数排序方法, 该方法适用于两个区间数的比较, 但难以解决多个区间数排序的问题, 因此不便于实际应用.

针对上述研究存在的不足, 本文提出了一种基于概率可信度的区间数排序方法, 该方法可有效利用区间数的特征信息, 具有简洁、准确、可靠的优点.

2 问题的描述

定义 1 设 R 为实数域, 对于任意 $a_i^-, a_i^+ \in R$, 如果满足 $a_i^- \leqslant a_i^+$, 则称闭区间 $\tilde{a}_i = [a_i^-, a_i^+]$ 为一个

收稿日期: 2011-05-26；**修回日期:** 2011-11-21.

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(6136101)；国家高技术研究发展计划项目(2008AA7070412).

作者简介: 邱涤珊(1957−), 男, 教授, 博士生导师, 从事军事运筹学理论等研究；贺川(1985−), 男, 博士生, 从事作战建模与仿真的研究.

区间数. 特别地, 当 $a_i^- = a_i^+$ 时, $\tilde{a}_i$ 退化为一个确定的实数[7].

通常情况下, 区间数排序问题可用五元组 $V = \langle I, S, R, F, C\rangle$ 进行描述, 其中: $I = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n\}$ 为序列集, $\tilde{a}_i$ 为序列中第 i 个区间数; $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 为类型集, s_i 为区间数 $\tilde{a}_i$ 的类型; $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ 为参数向量集, r_i 为表征 $\tilde{a}_i$ 特征信息的参数向量, 用 $r_i = (v_i^1, v_i^2, \cdots, v_i^{m_i})$ 表示, v_i^j 为 $\tilde{a}_i$ 的第 j 个特征信息参数, m_i 为 r_i 中元素的个数; $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 为概率密度函数集或隶属函数集, f_i 为区间数 $\tilde{a}_i$ 实际取值的概率密度函数或隶属函数; C 为排序规则, 用于明确区间数优先程度的度量方法.

值得注意的是, 不同区间数的特征信息是不尽相同的, 它们对应的参数向量可能存在较大差别. 例如, 文献 [8-10] 在描述区间数时仅使用了两个端点坐标, 因此其特征信息的参数向量可表示为 $r_i = (v_i^1, v_i^2)$. 其中 v_i^1 和 v_i^2 分别为区间数 $\tilde{a}_i$ 的左、右端点坐标, 即分别有 $v_i^1 = a_i^-$ 和 $v_i^2 = a_i^+$. 而文献 [11-12] 在描述区间数时使用了 4 个参数, 因此其特征信息的参数向量可表示为 $p_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3, v_i^4)$, v_i^1 和 v_i^4 分别为区间数 $\tilde{a}_i$ 的左、右端点坐标, v_i^2 和 v_i^3 分别为 $\tilde{a}_i$ 实际取值的均方差和期望值.

定义 2 二元序关系"$\succ$", "$\prec$", "$=$"为非空集合 Q 上的严格偏序, 若满足以下条件:

1) 自反性, $x = x, \forall x \in Q$;

2) 对称性, $x \prec y, y \succ x, \forall x, y \in Q$;

3) 传递性, $x \prec y, y \prec z$, 则 $x \prec y$, $\forall x, y, z \in Q$.

定义 3 对于任意两个区间数 $\tilde{a}_i, \tilde{a}_j$, 按照给定的序关系判断规则, 若 $\tilde{a}_i$ 优于 $\tilde{a}_j$, 则记为 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j$; 若 $\tilde{a}_i$ 劣于 $\tilde{a}_j$, 则记为 $\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j$; 若 $\tilde{a}_i$ 与 $\tilde{a}_j$ 等价, 则记为 $\tilde{a}_i = \tilde{a}_j$.

区间数的特征信息主要包括: 区间数的类型和参数向量. 根据定义 1, 对于任意区间数 $\tilde{a}_i$, 应至少明确其两个端点坐标 a_i^- 和 a_i^+ 的取值. 通常认为, $\tilde{a}_i$ 的实际取值落在由 a_i^- 和 a_i^+ 构成的区间内, 并且服从于一定的概率分布, 该分布函数的形式决定了区间数的类型.

定义 4 设 X 是区间数 $\tilde{a}_i = [a_i^-, a_i^+]$ 的实际取值, x 为闭区间 $[a_i^-, a_i^+]$ 上的任意实数. 记 $X \leqslant x$ 的概率为 $F_i(x) = \int_{a_i^-}^{x} f_i(X)\mathrm{d}X$, 则称 $F_i(x)$ 和 $f_i(x)$ 分别为区间数 $\tilde{a}_i$ 实际取值的分布函数和概率密度函数.

3 区间数的排序方法

区间数之间本身不存在任何自然的优先关系, 因此在排序前应当首先明确区间数优先关系的判断规则. 在本文中, 主要采用 3 种序关系描述区间数的优先关系.

定义 5 若区间数 $\tilde{a}_i$ 和 $\tilde{a}_j$ 的实际取值分别具有概率密度函数 $f_i(x)$ 和 $f_j(x)$, 则 $\tilde{a}_j$ 和 $\tilde{a}_i$ 之间存在序关系"$\succ$", "$\prec$"的概率可信度分别为

$$P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = \iint_{y \geqslant x} f_i(x) f_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

$$P(\tilde{a}_j \prec \tilde{a}_i) = \iint_{y \leqslant x} f_i(x) f_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

根据上述定义, 对于非空区间数集合 I, $\forall \tilde{a}_i, \tilde{a}_j \in I$, 以下性质显然成立:

性质 1 $1 \geqslant P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) \geqslant 0$.

性质 2 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_i) = P(\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_i) = 0.5$.

性质 3 $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) + P(\tilde{a}_j \prec \tilde{a}_i) = 1$.

性质 4 $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = P(\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j)$.

定义 6 对于任意两个区间数 $\tilde{a}_i$ 和 $\tilde{a}_j$, 若 $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) > 0.5$, 则认为存在序关系 $\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i$; 若 $P(\tilde{a}_j \prec \tilde{a}_i) > 0.5$, 则认为存在序关系 $\tilde{a}_j \prec \tilde{a}_i$; 若 $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = 0.5$, 则认为序关系 $\tilde{a}_j = \tilde{a}_i$ 成立.

定理 1 若 $\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j, \tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i$, 则 $\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i$ 成立.

证明 若 $\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j, \tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i$ 成立, 则有 $P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j) > 0.5$, $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) > 0.5$. 根据定义 5 可知

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i) = &P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j)P(a_j \succ \tilde{a}_i) + \\ &P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k)P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i) + \\ &P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i)P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j). \end{aligned}$$

由性质 1 和性质 3 可得

$$P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i) \geqslant \frac{P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j)P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i)}{1 - P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k)} \geqslant$$
$$\frac{P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j)P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i)}{P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j)} \geqslant P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i),$$

故有 $P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i) > 0.5$, 因此序关系 $\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i$ 成立. □

上述定理说明, 基于概率可信度的区间数序关系具有传递性. 此外, 性质 2 和性质 4 表明该序关系还具有自反性和对称性, 因此为一种严格偏序.

对于任意两个区间数 $\tilde{a}_i = [a_i^-, a_i^+]$ 和 $\tilde{a}_j = [a_j^-, a_j^+]$, 不妨假设 $a_j^+ \geqslant a_i^+$, 可分 3 种情况讨论它们的序关系:

1) 当 $a_i^- \leqslant a_j^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^+$ 时, 如图 1(a) 所示, $\tilde{a}_i$ 和 $\tilde{a}_j$ 的区间范围呈相交关系, 序关系 $\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i$ 成立的概率可信度为

$$\begin{aligned} &P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = \iint_{y \geqslant x} f_i(x) f_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &\int_{a_i^-}^{a_j^-} f_i(x)\mathrm{d}x + \int_{a_j^-}^{a_i^+}\int_{x}^{a_j^+} f_i(x) f_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &1 - \int_{a_i^-}^{a_j^+} f_i(x) F_j(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3}$$

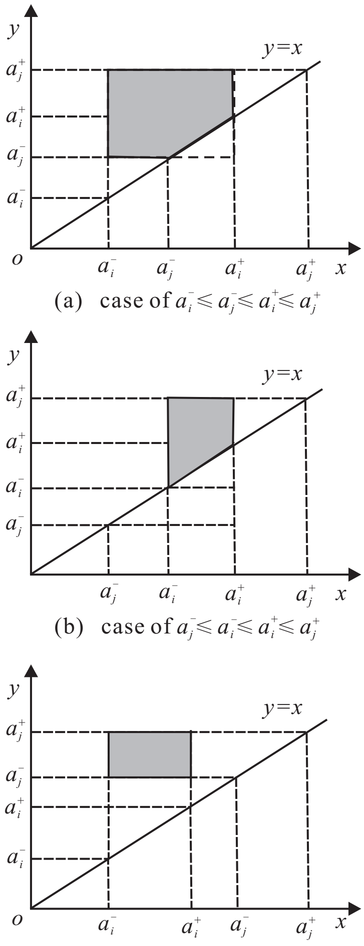
2) 当 $a_j^- \leqslant a_i^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^+$ 时, 如图 1(b) 所示, $\tilde{a}_i$

和 $\tilde{a}_j$ 的区间范围呈包含关系, 序关系 $\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i$ 成立的概率可信度为

$$P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = \iint\limits_{y\geqslant x} f_i(x)f_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_i^-}^{a_i^+} f_i(x)\mathrm{d}x\int_x^{a_j^+} f_j(y)\mathrm{d}y = 1-\int_{a_i^-}^{a_i^+} f_i(x)F_j(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

3) 当 $a_i^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^- \leqslant a_j^+$ 时, 如图1(c)所示, $\tilde{a}_i$ 和 $\tilde{a}_j$ 的区间范围呈相离关系, 序关系 $\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i$ 成立的概率可信度为

$$P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = \iint\limits_{y\geqslant x} f_i(x)f_j(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a_i^-}^{a_i^+} f_i(x)\mathrm{d}x\int_{a_j^-}^{a_j^+} f_j(x)\mathrm{d}y = 1. \tag{5}$$



(a) case of $a_i^- \leqslant a_j^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^+$

(b) case of $a_j^- \leqslant a_i^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^+$

(c) case of $a_i^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^- \leqslant a_j^+$

图 1 区间数的 3 种序关系

综上所述, 可以得出如下结论:

$$P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = \begin{cases} 1,\ a_i^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^- \leqslant a_j^+; \\ 1-B_1,\ a_j^- \leqslant a_i^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^+; \\ 1-B_2,\ a_i^- \leqslant a_j^- \leqslant a_i^+ \leqslant a_j^+. \end{cases}$$

其中

$$B_1 = \int_{a_i^-}^{a_i^+} f_i(x)F_j(x)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$B_2 = \int_{a_i^-}^{a_j^+} f_i(x)F_j(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

由性质2∼性质4, 可以得到 $P(\tilde{a}_j \prec \tilde{a}_i)$, $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)$ 和 $P(\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j)$ 的取值. 注意到 B_1 和 B_2 中存在积分项, 如果直接求解较为困难, 所以本文采用复合 Simposon 公式进行计算. 以 B_1 为例, 令 $g(x) = f_i(x) \times F_j(x)$, 将区间 $[a_i^+, a_i^-]$ 划分为 k 等份, 每份长度为 $s = (a_i^+ - a_i^-)/k$, 则 B_1 可用下式近似计算:

$$B_1 = \frac{s}{6}\sum_{i=1}^{k}\Big[g(t_i) + 2g\Big(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\Big) + g(x_{i+1})\Big]. \tag{8}$$

其中: $t_1 = a_i^-, t_{i+1} = t_i + s, i = 1, 2, \cdots, k$.

定义 7 矩阵 $R = [r_{ij}]_{n\times n}$ 为区间数序列 I 的概率可信度矩阵, 若对于任意 $r_{ij} \in R$, 满足 $r_{ij} = P(x_i \succ x_j)$.

定义 8 矩阵 $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ 为区间数序列 I 的互补判断矩阵, 若对于任意区间数 $\tilde{a}_i, \tilde{a}_j \in I$, 满足: 当 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j$ 时, $c_{ij} = 1$; 当 $\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j$ 时, $c_{ij} = -1$; 当 $\tilde{a}_i = \tilde{a}_j$ 时, $c_{ij} = 0$.

推论 1 任意区间数序列的互补判断矩阵 C 均为反对称矩阵, 即满足 $C = -C^{\mathrm{T}}$.

证明 若 $c_{ij} = -1$, 则 $\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j$ 成立, 即满足 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) < 0.5$. 由定理3和定理4可知

$$P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) = P(\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j) = 1 - P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) > 0.5.$$

故 $c_{ji} = 1$ 成立, 即有 $c_{ji} = -c_{ij}$ 成立. 同理可证, 当 $c_{ij} = 1$ 或 0 时, 均有 $c_{ij} = -c_{ij}$ 成立, 故推论1得证. □

定义 9 I 为区间数序列, 对于任意 $a_i \in I$, 记集合 $I_i^+ = \{\tilde{a}_j | P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) > 0.5, \forall \tilde{a}_j \in I\}$, $I_i^- = \{\tilde{a}_j | P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) < 0.5, \forall \tilde{a}_j \in I\}$, $I_i^0 = \{\tilde{a}_j | P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) = 0.5, \forall \tilde{a}_j \in I\}$, 分别为 $\tilde{a}_i$ 在 I 上的正偏序集、负偏序集和等价集, 记它们的元素个数分别为 ρ_i^+, ρ_i^- 和 ρ_i^0, 计算方法如下:

$$\rho_i^+ = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\phi^+(c_{ij}), \tag{9}$$

$$\rho_i^- = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\phi^-(c_{ij}), \tag{10}$$

$$\rho_i^0 = n - \rho_i^+ - \rho_i^-, \tag{11}$$

其中

$$\phi^+(c_{ij}) = \begin{cases} 1,\ c_{ij} > 0; \\ 0,\ c_{ij} < 0; \end{cases} \tag{12}$$

$$\phi^-(c_{ij}) = \begin{cases} 0,\ c_{ij} > 0; \\ -1,\ c_{ij} < 0. \end{cases} \tag{13}$$

定义 10 I 为区间数序列, 区间数 a_i 在 I 上的

相对优先程度用 $\lambda_i = \rho_i^+ - \rho_i^-$ 表示.

推论 2　矩阵 $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ 为区间数序列 I 的互补判断矩阵, 对于任意区间数 $a_i \in I$, 其相对优先程度可用 $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ 表示.

证明　根据定义 9, 可以得到

$$\lambda_i = \rho_i^+ - \rho_i^- = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\phi^+(c_{ij}) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\phi^-(c_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}.$$

由此可知, 推论 2 成立. □

推论 3　I 为区间数序列, 对于任意区间数 $\tilde{a}_i$, $\tilde{a}_j \in I$, 概率可信度 $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) \geqslant 0.5$ 的充要条件是 $\lambda_j \geqslant \lambda_i$ 成立.

证明　充分性显然成立, 下面只证明其必要性.

若存在 $\lambda_j \geqslant \lambda_i$, 使得 $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) \geqslant 0.5$ 不成立, 则必然有 $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i) < 0.5$ 成立. 对于任意 $\tilde{a}_k, \tilde{a}_l \in I$, 若 $P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_i) > 0.5$, $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_l) > 0.5$ 成立, 则由定理 1 可知, 必有 $P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j) > 0.5$, $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_l) > 0.5$ 成立. 由此可知, $\rho_j^- > \rho_i^-$, $\rho_j^+ < \rho_i^+$ 成立, 故 $\lambda_i = \rho_i^+ - \rho_i^- > \rho_j^+ - \rho_j^- = \lambda_j$ 成立, 这与 $\lambda_j \geqslant \lambda_i$ 矛盾, 故原命题得证. □

推论 4　若 $\lambda_i \geqslant \lambda_j \geqslant \lambda_k$, 则 $\lambda_i \geqslant \lambda_k$ 成立.

证明　由推论 3, 若 $\lambda_i \geqslant \lambda_j \geqslant \lambda_k$ 成立, 则必有 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) > 0.5$, $P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k) > 0.5$ 成立. 根据定义 6 和定理 1, 有 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k$ 或 $\tilde{a}_i = \tilde{a}_k$ 成立, 故 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) > 0.5$ 成立, 推论 4 得证. □

推论 4 实际上给出了具体的区间数排序方法, 即通过对区间数互补判断矩阵的运算得到排序结果. 该方法将区间数排序问题转换成矩阵运算过程, 因此更有利于计算机编程实现.

4　算例分析

为了验证基于概率可信度排序方法的可行性, 这里采用文献 [13-15] 中使用的数据, 区间数序列 I 共包含 5 个区间数, 分别为

$$\tilde{a}_1 = [0.1890,\ 0.1976],\ \tilde{a}_2 = [0.2022,\ 0.2154],$$
$$\tilde{a}_3 = [0.2021,\ 0.2112],\ \tilde{a}_4 = [0.1865,\ 0.1964],$$
$$\tilde{a}_5 = [0.1888,\ 0.1983].$$

考虑各区间数的实际取值为具有均匀分布的概率密度函数, 按照本文提出的方法, 首先构建区间数序列 I 的概率可信度矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.6784 & 0.4737 \\ 1 & 0.5 & 0.6628 & 1 & 1 \\ 1 & 0.3372 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.3216 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3071 \\ 0.5263 & 0 & 0 & 0.6929 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

由此, 可以得到 I 的互补判断矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据推论 2, 各区间数的优先程度分别为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -4$, $\lambda_5 = 0$. 根据推论 4, 区间数序列 I 的排序结果为 $\tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_3 \succ \tilde{a}_5 \succ \tilde{a}_1 \succ \tilde{a}_4$.

以上排序结果与文献 [13-15] 的完全一致, 这表明基于概率可信度的排序方法是可行的. 现保持这 5 个区间数的端点坐标不变, 改变部分特征信息如表 1 所示.

表 1　5 个区间数的特征信息

I	类型和参数向量					
	s_i	m_i	v_i^1	v_i^2	v_i^3	v_i^4
$\tilde{a}_1$	1	2	0.1890	0.1976	–	–
$\tilde{a}_2$	2	4	0.2022	0.2031	0.2076	0.2154
$\tilde{a}_3$	3	4	0.2021	0.2084	0.0015	0.2112
$\tilde{a}_4$	4	3	0.1865	0.1921	0.1964	–
$\tilde{a}_5$	3	4	0.1888	0.1930	0.0016	0.1983

若仍采用文献 [13-15]中的方法, 排序结果不会发生改变, 现使用基于概率可信度的排序方法, I 的概率可信度矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.8461 & 0.5329 \\ 1 & 0.5 & 0.3767 & 1 & 1 \\ 1 & 0.6233 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.1539 & 0 & 0 & 0.5 & 0.1514 \\ 0.4671 & 0 & 0 & 0.8486 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

I 的互补判断矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

各区间数的优先程度分别为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = -4$, $\lambda_5 = -2$. 区间数序列 I 的排序结果为 $\tilde{a}_3 \succ \tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_1 \succ \tilde{a}_5 \succ \tilde{a}_4$.

分析计算结果可以发现, 虽然各区间数的端点坐标并没有发生改变, 但排序结果却出现了明显的变化. 基于概率可信度的排序方法能够对区间数特征信息保持足够的灵敏性, 使得排序结果更加准确、可靠.

5　结　论

本文在考虑区间数实际取值可能具有任意分布函数的情况下, 提出了一种基于概率可信度的排序方法. 该方法通过定义区间数的严格偏序关系, 实现了任意类型区间数的比较, 从而克服了传统排序方法在适用范围上的局限性. 同时, 对复合 Simposon 公式的

应用有助于实现区间数排序的程序化, 这对于求解大规模区间数排序问题具有十分重要的意义. 通过算例分析表明, 本文方法能够有效利用给定的区间数特征信息, 排序结果客观合理, 计算过程简单且易于编程实现, 是一种行之有效的区间数排序方法.

参考文献(References)

[1] Wang G J, Li X P. The applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 98(3): 331-335.

[2] Young R C. The algebra of many-valued quantities[J]. Annals of Mathematics, 1931, 31(2): 260-290.

[3] Pavel S. Numerical methods for interval and fuzzy number comparison based on the probabilistic approach and Dempster-Shafer theory[J]. Information Sciences, 2007, 77(21): 4645-4661.

[4] Atanu S, Tapan K P. On comparing interval number[J]. European J of Operational Research, 2000, 127(1): 28-43.

[5] Kundu S. Min-transitivity of fuzzy left ness relationship and its application to decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 8(6): 357-367.

[6] 张兴芳, 张兴伟. 区间数的排序及其在系统决策中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 112-115.
(Zhang X F, Zhang X W. The ranking of interval number and its application to decision of systems[J]. System Engineering-Theory & Practice, 1999, 19(7): 112-115.)

[7] Levin V I. Comparison of interval numbers and optimization of interval-parameter systems[J]. Automation and Remote Control, 2004, 65(4): 625-633.

[8] Wang G J, Li X P. The applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 98(3): 331-335.

[9] Li Z F. Fuzzy job-shop scheduling based on ranking level $(\lambda, 1)$ interval-valued fuzzy numbers[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(4): 510-522.

[10] Oliveira C, Antunes C H. An interactive method of tackling uncertainty in interval multiple objective linear programming[J]. J of Mathematical Sciences, 2009, 161(6): 854-866.

[11] Liu P D. A weighted aggregation operators multi-attribute group decision-making method based on interval-valued trapezoidal fuzzy numbers[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(1): 1053-1060.

[12] Chen S J, Chen S M. Fuzzy risk analysis based on measures of similarity between interval-valued fuzzy numbers[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 55(8): 1670-1685.

[13] 李志林. 区间数的一种排序方法[J]. 海南大学学报, 2003, 21(1): 4-7.
(Li Z L. A ranking aapproach for interval numbers[J]. Natural Science J of Hainan University, 2003, 21(1): 4-7.)

[14] Bryson N. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems[J]. European J of Operational Research, 1996, 96(2): 379-386.

[15] 张全, 樊治平, 潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法[J]. 控制与决策, 1999, 14(6): 703-711.
(Zhang Q, Fan Z P, Pan D H. A ranking approach with possibilities for multiple attribute decision making problems with internals[J]. Contron and Decision, 1999, 14(6): 703-711.)

(上接第1893页)

[5] Ames A D, Sinnet R W, Wendel E D B. Three-dimensional kneed bipedal walking: A hybrid geometric approach[C]. The 12th Int Hybrid Systems Conf on Computation and Control. San Francisco, 2009: 16-30.

[6] 刘振泽, 田彦涛, 张佩杰, 等. 无动力双足步行机器人控制策略与算法[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 113-121.
(Liu Z Z, Tian Y T, Zhang P J, et al. Control strategies and algorithms for passive compass-like biped robot[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(2): 113-121.)

[7] Ames A D, Gregg R D, Spong M W. A geometric approach to three-dimensional hipped bipedal robotic walking[C]. The 46th IEEE Conf on Decision and Control. Piscataway, 2007: 5348-5355.

[8] Piiroinen P T, Dankowicz H J, Nordmark A B. Breaking symmetries and constraints: Transitions from 2D to 3D in passive walkers[J]. Multibody System Dynamics, 2003, 10(2): 147-176.

[9] Grizzle J W, Westervelt E R. Hybrid zero dynamics of planar biped walkers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(1): 42-56.

[10] Westervelt E R, Drizzle J W, Chevallereau C, et al. Feedbacl control of dynamic bipedal robot locomotion[M]. London: CRC Press, 2007.