

文章编号: 1001-0920(2012)10-0000-00

## 二阶有向网络的鲁棒有限时间包容控制

于 镒<sup>1,2</sup>, 伍清河<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学 自动化学院, 北京 100081; 2. 东北石油大学 电气信息工程学院, 黑龙江 大庆 163318)

**摘要:** 在考虑非线性干扰和跟随者速度不可测的情况下, 研究二阶有向网络的有限时间估计和鲁棒包容控制问题. 提出包含有估计层、控制层和跟随者层的新型分布式控制结构. 应用有限时间稳定性理论和等效输出注入的思想, 设计幂次估计器和滑模估计器, 并给出网络误差的有限时间估计. 进而采用齐次理论和滑模方法设计非光滑控制协议, 驱使跟随者在有限时间内收敛并保持在领航者所构成的动态凸包中, 且有效抑制干扰. 仿真结果验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 有限时间估计; 有限时间稳定性; 齐次理论; 滑模控制; 包容控制

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Finite time robust containment control of second order directed networks

YU Di<sup>1,2</sup> WU Qing-he<sup>1</sup>

(1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China; 2. School of Electrical Information and Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China. Correspondent: YU Di, E-mail: yudizlg@yahoo.cn)

**Abstract:** Finite time estimation and robust containment control are studied for second order directed networks considering nonlinear disturbance and unmeasurable velocities of followers. A novel distributed architecture is proposed including estimation layer, control layer and followers layer. The power estimator and sliding mode estimator are designed to achieve the accurate estimations of network errors in finite time based on finite time stability theory and equivalent output injection thought. Then nonsmooth control protocol is developed by applying homogeneity theory and sliding mode method, so as to make followers converge and remain in the dynamic convex hull formed by the leaders in finite time and suppress disturbance effectively. Simulation results verify the correctness of the theoretical analysis.

**Key words:** finite-time estimation; finite-time stability; homogeneity theory; sliding mode control; containment control

### 1 引言

近年来, 关于多智能体协调控制的研究受到广泛关注, 并且在诸多工程领域已得到了成功应用, 其中包括: 机器人编队、无线传感器网络定位和智能电网调度等. 其主要任务是设计控制协议, 并通过局部交互来实现全局行为, 但目前大部分成果均实现多智能体系统渐近协调, 即其中控制律至多实现无限时间内的渐近收敛. 相比之下, 有限时间控制具有快速性、准确性和强鲁棒性等优点<sup>[1-2]</sup>. 其研究方法主要有齐次方法和有限时间 Lyapunov 稳定性方法. 文献 [3] 奠定了齐次系统有限时间稳定的理论基础, 得出若负齐次系统渐近稳定, 则该系统有限时间稳定的重要结论;

基于 [3-4] 设计了连续非光滑协议, 实现了二阶无向网络的状态一致; 应用有限时间 Lyapunov 稳定性理论, [5-7] 设计连续非光滑协议, 实现了有限时间控制. [5] 针对一阶有向网络, 在网络拓扑具有生成树的情况下, 实现固定队形编队和动态队形编队的有限时间控制; 通过设计合适的终端滑模面, [6] 讨论了单领航者情况下多机器人系统的鲁棒有限时间跟踪问题; 结合齐次理论和滑模方法, [7] 针对具有有界不确定性的高阶系统设计有限时间控制方案, 为鲁棒有限时间控制提供了新思路. 上述成果均考虑状态完全可测情况, 但得到系统的全部状态很困难. 由此, [8] 针对具有未知干扰的非线性系统设计了等效输出注入鲁棒

收稿日期: 2011-06-01; 修回日期: 2011-12-08.

基金项目: 国家青年自然科学基金项目 (61074031).

作者简介: 于镒(1977-), 女, 博士生, 从事多智能体协调控制、非线性控制的研究; 伍清河(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事大系统控制、鲁棒控制等研究.

滑模观测器, 实现了对系统状态的有限时间重构, 为鲁棒有限时间输出反馈的研究开辟了新途径.

现有的协调控制算法经常集中在无领航者同步<sup>[9]</sup>或单领航者的协调跟踪<sup>[6]</sup>. 而具有大量潜在应用的包容控制, 存在多个领航者且限制跟随者在由领航者所构成的最小几何空间内运动. 例如: 一组异类车辆从一个目标移动到另一个目标, 此时只有部分车辆配有传感器来探测危险障碍物, 这些车辆一般被指定为领航者, 而其他车辆为跟随者. 通过探测危险障碍物的位置, 领航者能形成一个安全的移动区域. 若跟随者一直在由领导者所构成的安全区域内移动, 则该组能安全到达目的地. [10] 提出停-走策略, 驱使一组单积分器个体在固定无向网络拓扑情况下进入到由领航者所构成的凸多面体中; 而 [11-12] 基于凸性概念, 分别讨论了一阶和二阶网络无干扰情况下的包容控制问题; [13-14] 针对多拉格朗日系统和多刚体系统, 展开了静态领航和动态领航情况下的有限时间控制研究, 但要求跟随者之间的网络拓扑为无向连接.

在实际应用中, 网络个体会受到模型不确定性、随机干扰等非线性摄动的影响, 而且由于有限的网络传输速度和传感器可视范围, 个体之间通常为有向通信. 因此, 在考虑非线性扰动情况下, 研究有向网络的有限时间包容控制具有重要的理论意义和实际价值, 但此方面研究至今无人问津. 本文在跟随者速度不可测的情况下, 提出了包含有估计层、控制层和跟随者层的新型分布式控制结构的基础上, 针对动态领航情况, 设计幂次估计器和滑模估计器以及非光滑控制律, 实现了二阶有向网络的有限时间鲁棒包容控制. 本文受文献 [7-8, 13] 的启发, 但与之相比有明显进展. 其中 [7] 只考虑单个系统在未知干扰作用下的渐近跟踪; [8] 在已知参考轨迹的情况下考虑单个系统的有限时间跟踪问题; 而 [13] 不但限定跟随者之间拓扑为无向连接且要求跟随者已知其期望位置.

## 2 预备知识

### 2.1 代数图论和矩阵理论基础知识

智能体网络拓扑经常用有向图  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  来描述. 其中:  $\mathcal{V} = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$  为非空有限的节点集合,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  为边集,  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$  为非负加权邻接矩阵. 若有向图  $\mathcal{G}$  的边  $\varepsilon_{ij} \in \mathcal{E}$ , 即节点  $\nu_j$  有信息传递给节点  $\nu_i$ , 则  $a_{ij} = 1, \nu_j \in \mathcal{N}_i$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 其中  $\mathcal{N}_i$  代表节点  $\nu_i$  的邻居集. 有向图  $\mathcal{G}$  所对应的 Laplacian 矩阵定义为  $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in R^{n \times n}$ . 其中:  $l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}$ . 而且  $\mathcal{L}$  的一个重要特性是所有行和均为 0, 因此  $\mathbf{1}_n$  是  $\mathcal{L}$  零特征根的一个右特征向量. 有序边序列  $(\nu_1, \nu_2), (\nu_2, \nu_3), \dots, \nu_j \in \mathcal{V}$ , 称为

有向路径. 若有向图的任意两个节点之间都存在有向路径, 则称有向图强连接.

设  $M_n(R)$  代表所有  $n \times n$  实矩阵的集合. 若矩阵  $C = [c_{ij}] \in M_n(R)$  的所有元素非负, 则称  $C$  为非负矩阵, 表示为  $C \geq 0$ . 对于矩阵  $D = [d_{ij}] \in M_n(R)$ , 若其非对角线元素非正, 并且其所有的主子式非负, 则称  $D$  为  $M$  矩阵; 若  $|d_{ii}| > \sum_{j \neq i} |d_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$ , 则称  $D$  为强对角占优矩阵; 若存在置换矩阵  $P$  将  $D$  变换为下三角矩阵, 则称  $D$  可约, 否则称不可约.

### 2.2 定义和引理

**定义 1** 设  $X$  是实向量空间  $V \subseteq R^n$  的集合. 用  $\text{Co}(X)$  表示  $X$  的凸包, 即

$$\text{Co}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in R, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

**定义 2** 令函数  $\text{sig}^\alpha(x) = |x|^\alpha \text{sign}(x)$ . 其中:  $\alpha > 0$ ,  $\text{sign}(\cdot)$  为符号函数. 令  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , 则有

$$\text{sig}^\alpha(X) = [\text{sig}^\alpha(x_1), \text{sig}^\alpha(x_2), \dots, \text{sig}^\alpha(x_n)]^T.$$

**定义 3** 设  $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$  是一个连续矢量域. 同时设  $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n, r_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 若对于  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in R^n, k \in R$ , 有

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

则称  $f(x)$  关于扩散系数  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  是  $k$  阶齐次的.

**引理 1**<sup>[11]</sup> 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in R^n, \quad (1)$$

其中  $f(x)$  关于扩散系数  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  是  $k$  阶齐次的连续矢量域, 这里  $k < 0$ . 若  $x = 0$  是系统 (1) 的渐近稳定平衡点, 则也是系统 (1) 的有限时间稳定平衡点.

**引理 2**<sup>[14]</sup> 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x, t), f(0, t) = 0, x \in U_0 \subset R^n, \quad (2)$$

其中  $f: U_0 \times R^+ \rightarrow R^n$  在原点  $x = 0$  的开邻域  $U_0$  内相对于  $x$  是连续的. 假设存在  $C^1$  类的正定函数  $V(x, t)$  (定义在  $\hat{V} \times R^+$ , 其中  $\hat{V} \subset U_0 \subset R^n$ ), 实数  $c > 0, 0 < \alpha < 1$ , 使得  $\dot{V}(x, t) + V^\alpha(x, t)$  在  $\hat{V}$  是负半定的. 则系统 (2) 的原点是有限时间稳定的, 而且停息时间上界为

$$T \leq \frac{V(x(t_0), t_0)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}.$$

**引理 3**<sup>[15]</sup> 令有向拓扑强连接, 所对应的 Laplacian 矩阵为  $\mathcal{L}$ , 且对角矩阵  $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$  中至少有一个  $b_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $\mathcal{L} + B$  为

非奇异的  $M$  矩阵.

### 3 问题描述

令多智能体网络由智能体  $\Sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$  组成, 其对应的有向图为  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ . 令  $F = \{1, 2, \dots, m\}$  和  $L = \{m+1, m+2, \dots, n\}$  分别代表跟随者集合和领航者集合. 本文的控制目的是设计合适的估计器和控制律驱使跟随者在有限时间内收敛并保持在领航者所构成的动态凸包中.

#### 3.1 网络动态

跟随者和领航者动态描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i, \quad \dot{v}_i = u_i + d_i, \quad i \in F; \\ \dot{x}_i &= v_i, \quad \dot{v}_i = u_i, \quad i \in L. \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $x_i \in R^p, v_i \in R^p, u_i \in R^p, i = 1, 2, \dots, n; d_i \in R^p (i \in F)$  为第  $i$  个跟随者所受的非线性干扰. 令  $x_f = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T, v_f = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T, u_f = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T, d = [d_1, d_2, \dots, d_m]^T$  分别代表跟随者的位置向量、速度向量、控制向量和所受的外部干扰向量, 其中  $\|d\|_\infty < \sigma$ . 令  $x_l = [x_{m+1}, \dots, x_n]^T, v_l = [v_{m+1}, \dots, v_n]^T, u_l = [u_{m+1}, \dots, u_n]^T$  分别代表领航者的位置向量、速度向量和控制向量. 则整个系统的位置向量、速度向量和控制向量分别为  $x = [x_f, x_l]^T, v = [v_f, v_l]^T, u = [u_f, u_l]^T$ .

#### 3.2 网络拓扑

本文令领航者之间无通信, 且领航者与跟随者之间通信是单向的, 即领航者发送信息. 因此跟随者之间的网络拓扑和领航者与跟随者之间的网络拓扑决定整个网络通信. 由此对 Laplacian 阵  $\mathcal{L}$  进行结构划分, 则有

$$\mathcal{L} \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{T} & \mathcal{T}_d \\ 0_{(n-m) \times m} & 0_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \end{bmatrix}. \quad (4)$$

其中:  $\mathcal{T} = [\mathcal{T}_{ij}] \in R^{m \times m}, \mathcal{T}_d \in R^{m \times (n-m)}$ .

#### 3.3 网络误差

定义误差函数

$$e_i^1 = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j), \quad e_i^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}(v_i - v_j), \quad i \in F,$$

则整个网络的误差动态可描述为

$$\dot{E}_1 = E_2, \quad \dot{E}_2 = \mathcal{T}(u_f + d) + \mathcal{T}_d u_l. \quad (5)$$

其中:  $E_1 = [e_1^1, e_2^1, \dots, e_m^1]^T, E_2 = [e_1^2, e_2^2, \dots, e_m^2]^T$ .

**假设 1** 跟随者之间强连接, 并且对于每个跟随者, 至少存在一个领航者与其通信.

**引理 4** 若假设 1 成立, 且  $E_1 = 0, E_2 = 0$ , 则跟随者  $\Sigma_i (i \in F)$  收敛到由领航者所构成的凸包  $\text{Co}\{\Sigma_i, i \in L\}$  中.

**证明** 由假设 1 可得, 跟随者之间的网络

拓扑所对应的 Laplacian 矩阵  $\mathcal{T}_F$  为不可约的  $M$ -矩阵, 且非负矩阵  $-\mathcal{T}_d$  的每个行和  $b_i > 0, i \in F$ . 令  $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ , 则由引理 3 可知  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_F + B$  为强对角占优的  $M$ -矩阵, 所以其逆阵  $\mathcal{T}^{-1} = [T_{ij}] \in R^{m \times m}$  存在且正定, 则  $-\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}_d$  为非负矩阵. 由  $[\mathcal{T} \quad \mathcal{T}_d]1_m = 0_n$  可知,  $-\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}_d$  的每个行和等于 1. 令  $x_d = -\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}_d x_l, v_d = -\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}_d v_l$ , 则有  $x_d = [x_{d1}, x_{d2}, \dots, x_{dm}]^T, v_d = [v_{d1}, v_{d2}, \dots, v_{dm}]^T$ . 其中:  $x_{di} \in R, v_{di} \in R (i \in F)$  为每个跟随者的期望位置和期望速度, 即领航者位置和速度的凸加权平均. 令  $\tilde{x}_f = x_f - x_d, \tilde{v}_f = v_f - v_d$ , 则有

$$E_1 = \mathcal{T}x_f + \mathcal{T}_d x_l = \mathcal{T}\tilde{x}_f, \quad E_2 = \mathcal{T}v_f + \mathcal{T}_d v_l = \mathcal{T}\tilde{v}_f.$$

由矩阵  $\mathcal{T}$  的非奇异性可得, 当  $E_1 = 0$  和  $E_2 = 0$  时, 有  $x_f = x_d$  和  $v_f = v_d$ , 即跟随者  $\Sigma_i (i \in F)$  的运动轨迹收敛到由领导者所构成的凸包  $\text{Co}\{\Sigma_i, i \in L\}$  中.  $\square$

## 4 主要结果

假定领航者的位置和速度已知, 跟随者位置可测而其速度不可测, 且每个跟随者都配有估计器. 假定领航者时变的控制输入未知且有界, 即  $\sup |u_i| \leq \mu, i \in L$ . 整个系统控制结构可分为 3 层, 分别为: 估计层、控制层和跟随者层, 如图 1 所示.

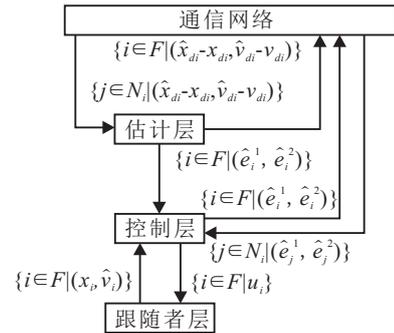


图 1 系统分布式控制结构图

在估计层中, 首先构建幂次估计器, 实现对跟随者期望位置和期望速度的有限时间估计, 即  $\hat{x}_{di} = x_{di}, \hat{v}_{di} = v_{di}, i \in F$ , 并根据此估值和可测位置信息, 采用等效输出注入的思想设计滑模估计器, 并给出网络误差的精确估计. 在控制层中, 基于上述精确估值, 设计分布式非光滑控制协议, 以保证系统在有限时间内到达滑模面, 最后在滑模面上实现有限时间包容控制.

#### 4.1 有限时间估计

首先提出如下幂次估计器:

$$\dot{\hat{x}}_{di} = \hat{v}_{di} - \beta \sum_{j=1}^m T_{ij} \text{sig} \left[ \sum_{k=1}^n a_{jk} (\hat{x}_{dj} - \hat{x}_{dk}) \right]^\gamma, \quad (6a)$$

$$\dot{\hat{v}}_{di} = -\beta \sum_{j=1}^m T_{ij} \text{sign} \left[ \sum_{k=1}^n a_{jk} (\hat{v}_{dj} - \hat{v}_{dk}) \right]. \quad (6b)$$

其中:  $\beta > 0$ ;  $0 < \gamma < 1$ ;  $i \in F$ ;  $\hat{x}_{di}$  和  $\hat{v}_{di}$  分别代表第  $i$  个跟随者对期望位置和期望速度的估计, 且  $\hat{x}_{di} = x_i$ ,  $\hat{v}_{di} = v_i$ ,  $i \in L$ .

**定理 1** 考虑由动态 (3) 所描述的有向网络, 若假设 1 成立, 且  $\beta > \mu \|\Gamma_d\|_\infty$ , 则估计器 (6) 可保证在有限时间内实现  $\hat{x}_{di} = x_{di}$ ,  $\hat{v}_{di} = v_{di}$ ,  $i \in F$ .

**证明** 定义估计误差为:  $\varepsilon_{1i} = \hat{x}_{di} - x_{di}$ ,  $\varepsilon_{2i} = \hat{v}_{di} - v_{di}$ ,  $i \in F$ . 则估计误差向量  $\varepsilon_1 = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1m}]^T$ ,  $\varepsilon_2 = [\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2m}]^T$ . 针对式 (6b), 选取 Lyapunov 函数  $V_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_2^T \mathcal{T}^T \mathcal{T} \varepsilon_2$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \varepsilon_2^T \mathcal{T}^T \mathcal{T} (-\beta \mathcal{T}^{-1} \text{sign}(\mathcal{T} \varepsilon_2) - \dot{v}_d) = \\ & (\mathcal{T} \varepsilon_2)^T (-\beta \text{sign}(\mathcal{T} \varepsilon_2) - \mathcal{T} \dot{v}_d) \leq \\ & -(\beta - \mu \|\mathcal{T}_d\|_\infty) \|\mathcal{T} \varepsilon_2\|_2 = \\ & -\sqrt{2}(\beta - \mu \|\mathcal{T}_d\|_\infty) V_1^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

其中: 不等式部分采用 Hölder 不等式  $|x^T y| \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$ , 以及矩阵范数性质  $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$  和  $\|A\|_1 \geq \|A\|_2$ . 令

$$T_1 = \frac{\sqrt{2V_1(0)}}{(\beta - \mu \|\mathcal{T}_d\|_\infty)},$$

则当  $t > T_1$  时, 实现跟随者期望速度的精确估计, 可用  $\hat{v}_{di}$  替代  $v_{di}$ ,  $i \in F$ .

针对式 (6a), 选取 Lyapunov 函数  $V_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_1^T \varepsilon_1$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \varepsilon_1^T (-\beta \mathcal{T}^{-1} \text{sig}(\mathcal{T} \varepsilon_1)^\gamma) \leq \\ & -\beta \lambda_{\min}[(\mathcal{T} \mathcal{T}^T)^{-1}] \sum_{i=1}^m |(\mathcal{T} \varepsilon_1)_i|^{\gamma+1} \leq \\ & -\beta \lambda_{\min}[(\mathcal{T} \mathcal{T}^T)^{-1}] (\varepsilon_1^T \mathcal{T}^T \mathcal{T} \varepsilon_1)^{\frac{\gamma+1}{2}} \leq \\ & -2^{\frac{\gamma+1}{2}} \beta \lambda_{\min}[(\mathcal{T} \mathcal{T}^T)^{-1}] [\lambda_{\min}(\mathcal{T}^T \mathcal{T})]^{\frac{\gamma+1}{2}} V_2^{\frac{\gamma+1}{2}}. \end{aligned}$$

其中:  $\mathcal{T}^T \mathcal{T}$  和  $\mathcal{T} \mathcal{T}^T$  均为正定对称阵,  $\lambda_{\min}[\cdot]$  为矩阵最小特征根,  $(\mathcal{T} \varepsilon_1)_i$  为矢量  $\mathcal{T} \varepsilon_1$  的第  $i$  个分量. 令

$$k_1 = 2^{\frac{\gamma+1}{2}} \beta \lambda_{\min}[(\mathcal{T} \mathcal{T}^T)^{-1}] [\lambda_{\min}(\mathcal{T}^T \mathcal{T})]^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

则由引理 2 可得, 在停息时间

$$T_2 = T_1 + \frac{2V_2(T_1)^{\frac{1-\gamma}{2}}}{k_1(1-\gamma)}$$

内,  $\hat{x}_{di} \rightarrow x_{di}$ ,  $i \in F$ . 当  $t > T_2$  时, 实现对跟随者期望位置的精确估计, 可用  $\hat{x}_{di}$  替代  $x_{di}$ ,  $i \in F$ .  $\square$

然后基于此估值和可测的位置信息, 设计等效输出注入滑模估计器. 定义网络误差  $e_i^1$  和  $e_i^2$  的估值, 即

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^1 &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j) = \sum_{j=1}^m \mathcal{T}_{ij}(x_j - \hat{x}_{dj}), \\ \hat{e}_i^2 &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(\hat{v}_i - \hat{v}_j) = \sum_{j=1}^m \mathcal{T}_{ij}(\hat{v}_j - \hat{v}_{dj}). \end{aligned}$$

令  $\hat{E}_1 = [\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \dots, \hat{e}_m^1]$  和  $\hat{E}_2 = [\hat{e}_1^2, \hat{e}_2^2, \dots, \hat{e}_m^2]$  代表

网络误差  $E_1$  和  $E_2$  的估计矢量.

设计等效输出注入滑模估计器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_i^1 &= \hat{e}_i^2 + \lambda_1 \text{sign}(e_i^1 - \hat{e}_i^1), \\ \dot{\hat{e}}_i^2 &= \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j + \chi \lambda_2 \text{sign}((\lambda_1 \text{sign}(e_i^1 - \hat{e}_i^1))_{\text{eq}}). \end{aligned} \quad (7)$$

其中:  $(\lambda_1 \text{sign}(e_i^1 - \hat{e}_i^1))_{\text{eq}}$  可经过低通滤波器得到<sup>[7]</sup>, 当  $\hat{e}_i^1 \neq e_i^1$  时,  $\chi = 0$ ; 反之,  $\chi = 1$ ,  $i \in F$ .

**定理 2** 考虑由动态 (3) 所描述的有向网络, 若跟随者速度不可测, 存在估计器增益  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  使得等效输出注入滑模估计器 (7) 在有限时间内实现对网络误差  $E_1$  和  $E_2$  的精确估计.

**证明** 令  $\tilde{E}_1 = E_1 - \hat{E}_1$ ,  $\tilde{E}_2 = E_2 - \hat{E}_2$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{E}}_1 &= \tilde{E}_2 - \lambda_1 \text{sign}(\tilde{E}_1), \\ \dot{\tilde{E}}_2 &= \Gamma d + \Gamma_d u - \chi \lambda_2 \text{sign}((\lambda_1 \text{sign}(\tilde{E}_1))_{\text{eq}}). \end{aligned}$$

令  $V_1 = \frac{1}{2} \tilde{E}_1^T \tilde{E}_1$ , 当  $\lambda_1 > \|\tilde{E}_2\| + \tau_1$  ( $\tau_1 > 0$ ) 时, 经过

$$T_3 = t_0 + \frac{\|\tilde{E}_1(t_0)\|}{\tau_1},$$

$\tilde{E}_1$  收敛到滑模面  $\tilde{E}_1 = 0$ , 即  $E_1 = \hat{E}_1$ . 同样令  $V_2 = \frac{1}{2} \tilde{E}_2^T \tilde{E}_2$ , 当  $\lambda_2 > \|\Gamma d + \Gamma_d u\| + \tau_2$  ( $\tau_2 > 0$ ) 时, 经过

$$T_4 = \frac{\|\tilde{E}_2(T_3)\|}{\tau_2} + T_3,$$

$\tilde{E}_2$  收敛到滑模面  $\tilde{E}_2 = 0$ , 即  $E_2 = \hat{E}_2$ .  $\square$

## 4.2 有限时间包容控制

在此基础上, 提出下列分布式控制律:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i,\text{ideal}}^i + u_{i,\text{disc}}^i, \\ u_{i,\text{ideal}}^i &= -\sum_{j=1}^m T_{ij} \{\text{sig}(\hat{e}_j^1)^{\alpha_1} + \text{sig}(\hat{e}_j^2)^{\alpha_2}\}, \\ u_{i,\text{disc}}^i &= -\rho \sum_{j=1}^m T_{ij} \text{sign}(s_j), \\ s_i &= \hat{e}_i^2 + e_{i,\text{aux}}^i, \\ \dot{e}_{i,\text{aux}}^i &= -\sum_{j=1}^m T_{ij} u_{j,\text{ideal}}^j. \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $u_{i,\text{ideal}}^i$  为无摄动时的理想控制律,  $u_{i,\text{disc}}^i$  为克服摄动的不连续控制律,  $e_{i,\text{aux}}^i$  为引入的辅助变量, 且  $i \in F$ .

**定理 3** 考虑由动态 (3) 所描述的有向网络, 若假设 1 成立, 对跟随者采用估计器 (6) 和 (7) 以及控制协议 (8), 则在有限时间内实现包容控制. 其中参数  $\rho \geq \sigma \|\mathcal{T}\| + \delta + \mu \|\mathcal{T}_d\|$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1}$ .

**证明** 将领航者的作用与外界非线性干扰一同看成外部摄动. 首先, 针对系统无摄动情况下的有限时间稳定性进行证明; 然后, 基于滑模思想<sup>[7]</sup> 设计不连续控制律来克服摄动的影响, 从而使得系统在

有限时间内到达滑模面, 并且在滑模面上实现有限时间包容控制. 令  $u_{\text{ideal}} = [u_{\text{ideal}}^1, u_{\text{ideal}}^2, \dots, u_{\text{ideal}}^m]^T$ ,  $s = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$ ,  $u_{\text{disc}} = [u_{\text{disc}}^1, u_{\text{disc}}^2, \dots, u_{\text{disc}}^m]^T$ ,  $E_{\text{aux}} = [e_{\text{aux}}^1, e_{\text{aux}}^2, \dots, e_{\text{aux}}^m]^T$ . 当  $T > \max(T_2, T_4)$  时, 有

$$\begin{aligned} u_f &= u_{\text{ideal}} + u_{\text{disc}}, \\ u_{\text{ideal}} &= -\mathcal{T}^{-1}[\text{sig}(E_1)^{\alpha_1} + \text{sig}(E_2)^{\alpha_2}], \\ u_{\text{disc}} &= -\rho\mathcal{T}^{-1}\text{sign}(s), \\ s &= E_2 + E_{\text{aux}}, \\ \dot{E}_{\text{aux}} &= -\mathcal{T}u_{\text{ideal}}. \end{aligned} \quad (9)$$

考虑无摄动情况下, 令  $u_f = u_{\text{ideal}}$ . 此时有

$$\dot{E}_1 = E_2, \quad \dot{E}_2 = -\text{sig}(E_1)^{\alpha_1} - \text{sig}(E_2)^{\alpha_2}. \quad (10)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V_3 = \sum_{i=1}^m \left[ \left( \frac{1}{1+\alpha_1} |e_i^1|^{1+\alpha_1} \right) + \frac{1}{2} (e_i^2)^2 \right]$$

, 可得  $\dot{V}_3 = -\sum_{i=1}^m |e_i^2|^{\alpha_2+1} \leq 0$ , 应用 Lasalle 不变集原理可得  $E_1 \rightarrow 0$ ,  $E_2 \rightarrow 0$ , 则误差系统(10)全局渐近稳定. 且由文献[1]可知式(10)关于扩散系数  $(r_1 1_m^T, r_2 1_m^T)$  为  $k = \alpha_2 - 1 < 0$  阶齐次的. 其中:  $r_1 = \frac{1}{1+\alpha_1}$ ,  $r_2 = 1$ . 同样由引理1可得, 网络误差动态(10)是有限时间稳定的. 则由引理4可得, 跟随者在有限时间内收敛并保持在领航者的凸包中.

为了克服干扰的影响且实现有限时间控制, 需在控制律中引入具有辅助变量的不连续项. 定义滑模变量  $s = E_2 + E_{\text{aux}}$ , 则  $\dot{s} = \dot{E}_2 + \dot{E}_{\text{aux}}$ . 选取 Lyapunov 函数  $V_4 = \frac{1}{2}s^T s$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= s^T (\mathcal{T}(u_f + d) + \mathcal{T}_d u_l - \mathcal{T}u_{\text{ideal}}) \leq \\ & -\delta \|s\| = -\sqrt{2}\delta V_4^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由引理2可得, 在有限时间内可使得  $s \rightarrow 0$ . 在滑模面上, 等价控制为  $u_{\text{disc}}^{\text{eq}} = -d - \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}_d u_l$ , 将  $u_f = u_{\text{ideal}} + u_{\text{disc}}^{\text{eq}}$  代入式(5), 可得到在滑模面上的等价闭环误差动态为式(10). 由前面的证明可以得出, 若对跟随者采用估计器(6)和(7)以及控制协议(8), 则在有限时间内实现包容控制.  $\square$

**注1** 控制协议(8)是受到文献[8]的启发, 但文献[8]研究具有有界不确定性的单个系统的有限时间轨迹跟踪, 而本文研究具有任意扰动的有向网络的分布式包容控制, 而且其中只有部分跟随者已知领航者的状态.

## 5 仿真实验

本节考虑由8个智能体所构成的有向网络, 如图2所示. 其中:  $l_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为领航者,  $f_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为跟随者. 在二维空间内考虑该网络的协调

控制, 其中:  $x_i \in R^2$ ,  $v_i \in R^2$ ,  $u_i \in R^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 令非线性干扰为  $d_i = [0, 0.01 \sin t]^T$ ,  $i \in F$ .

令估计器(6)和(7)中参数选为  $\gamma = 0.6$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = 15$ , 控制协议(8)中的参数选为  $\alpha_1 = 0.6$ ,  $\alpha_2 = 0.75$ ,  $\rho = 0.04$ . 图3和图4分别给出了采用估计器(6)的跟随者对期望位置和期望速度的估计误差的2-范数. 仿真结果表明, 每个跟随者均能在4s内和12s内分别获得期望速度和期望位置的精确估计. 图5给出了采用估计器(6), (7)和控制协议(8)所得到的智能体的运动轨迹, 其中方块和圆点分别代表领航者和跟随者. 由25s和50s的快照可知, 在大约25s后跟随者全部收敛并保持在由领航者所构成的动态凸包中.

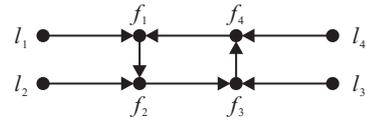


图2 有向网络拓扑图

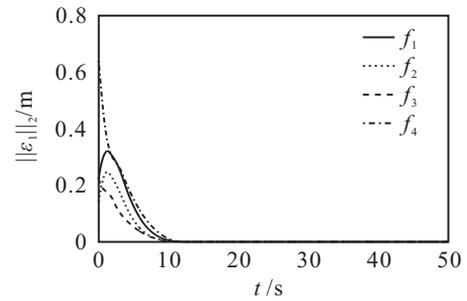


图3 期望位置估计误差的2-范数

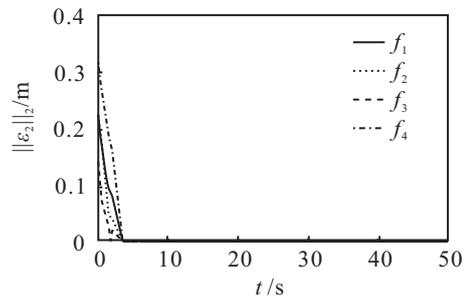


图4 期望速度估计误差的2-范数

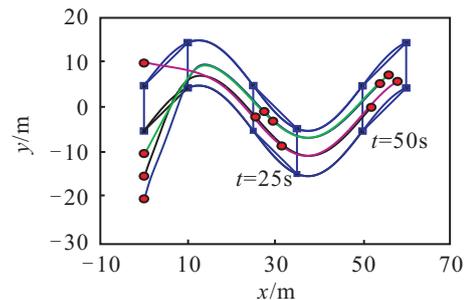


图5 智能体的运动轨迹

## 6 结论

针对具有非线性干扰的二阶有向网络, 提出了有限时间鲁棒包容控制的新型分布式控制结构, 将向

题解耦成有限时间估计和有限时间包容控制两部分;通过设计幂次估计器,实现对跟随者期望位置和期望速度的有限时间估计;继而在跟随者速度不可测情况下,根据上述估值和可测的位置信息设计等效输出注入滑模估计器,并给出网络误差的精确估值.然后基于此精确估值,结合齐次理论和滑模控制思想设计具有辅助变量的滑模面,并提出非光滑控制协议,驱使跟随者在有限时间内收敛并保持在领航者所构成的动态凸包中.最后,仿真结果验证了理论方案的可行性和正确性.

### 参考文献(References)

- [1] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [2] Venkataraman S T, Gulati S. Terminal slider control of nonlinear systems[C]. *Proc of IEEE Int Conf of Advanced Robotics*. Pisa: IEEE Press, 1990: 2513-2514.
- [3] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-Time stability of homogeneous systems[C]. *Proc of American Control Conf*. New Mexico: IEEE Press, 1997: 2513-2514.
- [4] Wang X, Hong Y G. Finite-time consensus for multi-Agent networks with second order agent dynamics[C]. *Proc of 17th World Congress of the Int Federation of Automatic Control*. Seoul: IEEE Press, 2008: 15185-15190.
- [5] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605-2611.
- [6] Khoo S, Xie L H, Man Z H. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems[J]. *IEEE Trans on Mechatronics*, 2009, 14(2): 219-228.
- [7] Defoort M, Floquet T, Kokosy A. A novel higher order sliding mode control scheme[J]. *Systems and Control Letters*, 2009, 58(2): 102-108.
- [8] John M Daly, David W L Wang. Output feedback sliding mode control in the presence of unknown disturbances[J]. *Systems and Control Letters*, 2009, 58(2): 188-193.
- [9] Abhijit D, Frank L L. Distributed adaptive control for synchronization of unknown nonlinear networked systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2014-2021.
- [10] Ji M, Ferrari-Trecate G, Egerstedt M. Containment control in mobile networks[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1972-1975.
- [11] Cao Y C, Ren W. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph[C]. *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. Shanghai: IEEE Press, 2009: 3014-3019.
- [12] Cao Y C, Stuart D, Ren W. Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: Algorithms and experiments[J]. *IEEE Trans on Control System Technology*, to be published.
- [13] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time containment control for multiple lagrangian systems[C]. *Proc of American Control Conf*. Baltimore: IEEE Press, 2010: 2885-2890.
- [14] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2092-2099.
- [15] Qu Z H. Cooperative control of dynamical systems: applications to autonomous vehicles[M]. New York: Springer-Verlag, 2009: 167-171.