

文章编号: 1001-0920(2013)02-0313-04

最优控制问题弱间断解的一个自适应算法

秦廷华, 马和平

(上海大学 理学院, 上海 200444)

摘要: 针对最优解有弱间断的最优控制问题提出一个自适应算法. 时间区间被划分为若干子区间, 使用分段多项式逼近最优控制问题的解. 在每个子区间内, 最优控制问题被拟谱方法离散, 使用的配置点是 Chebyshev-Gauss-Lobatto 点. 根据计算出的数值解提供的后验信息, 该自适应算法既能剖分产生新的子区间, 又能在子区间内增加逼近多项式的次数. 最后通过若干例子表明了所提出算法的高精度和有效性.

关键词: 最优控制问题; 谱元法; 拟谱方法; 弱间断解; 自适应

中图分类号: TP273.1

文献标志码: A

Adaptive algorithm for weakly discontinuous solutions of optimal control problems

QIN Ting-hua, MA He-ping

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China. Correspondent: QIN Ting-hua, E-mail: qintinghua@gmail.com)

Abstract: To the optimal control(OC) problems whose optimal solutions are weakly discontinuous, an adaptive algorithm is introduced. The time interval is divided into several subintervals. The piecewise polynomials are used to approximate the solutions of OC problems. In each subinterval, the considered OC problems are discretized by using the pseudospectral method and the Chebyshev-Gauss-Lobatto points are the collocation points. According to the numerical solutions, the adaptive algorithm divides the subintervals into new subintervals, and increases the degrees of the approximating polynomials in some subintervals. Finally, several examples are given to demonstrate the high accuracy and effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: optimal control problem; spectral element method; pseudospectral method; weakly discontinuous solution; adaptive

0 引言

最优控制(OC)问题具有广泛的应用背景, 其中大量问题可以归结为本文研究的 Bolza 型 OC 问题. 实际问题的最优解中往往存在弱间断点, 例如刚性非对称航天器 OC 问题^[1]、免疫反应的 OC 问题^[2]、自由飞行机器人平面运动的 OC 问题^[3]. 在 Jaddu^[1]求解的刚性非对称航天器 OC 问题中, 航天器有 3 个控制力矩和 3 个角速度, 原本光滑的最优解在对某个角速度施加了不等式约束后, 相应控制力矩会出现弱间断. Zhao 等^[2]以 OC 问题为模型研究了免疫系统对病原体的两个变种作出的反应, 其数值实验显示, 在某些初始条件和约束条件下, 用来表示免疫反应的控制函

数有弱间断. Sakawa^[3]研究了自由飞行机器人平面运动的 OC 问题, 控制函数表示平面运动的推力, 由于推力的上下界约束, 控制函数在上下界出现弱间断.

拟谱方法对于最优解光滑的 OC 问题收敛得很快^[4], 而对于不光滑的最优解, 由于存在间断点或弱间断点, 拟谱方法的表现可能变差. Gong 等^[5]研究了用拟谱方法解有间断解的 OC 问题, 设计的算法将新分点设置在数值解导数值较大的位置, 在所有子区间内增加逼近多项式的次数. 对于有弱间断解的 OC 问题, 张稳^[6]设计了一种分段的拟谱方法, 通过观察已有的数值解来设置较短的子区间包含弱间断点, 在这些较短的子区间内, 由于最优解本身不太光滑, 只能采用次数较低的逼近多项式, 而在较长的子区间内次

收稿日期: 2011-06-30; 修回日期: 2011-10-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874039); 上海市教委重点学科建设项目(J50101).

作者简介: 秦廷华(1982-), 男, 博士生, 从事微分方程最优控制问题数值解法的研究; 马和平(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事偏微分方程数值解法等研究.

数则设置得较高.

本文借鉴 Gong 等^[5]决定新分点位置的做法, 利用弱间断解的导数不连续这一特点计算相邻两个配置点上数值解导数值之差, 以此来决定新分点的位置. 由于在弱间断点附近本文算法一般会产生若干个分点, 自然形成了较短的子区间去包含弱间断点. 鉴于子区间的长短在一定程度上反映了子区间内最优解的光滑程度, 本文的自适应算法在较长的子区间内增加逼近多项式的次数, 较短的子区间内次数固定为一个小的正整数. 不难看出, 本文设计的自适应算法使用了谱元法提高精度的两种手段, 即增加单元数目和增加逼近多项式的次数.

1 问题描述

假设 M_x , M_u , M_e 和 M_h 是已知的正整数. 考虑如下 Bolza 型最优控制问题 (问题 B):

$$\begin{aligned} \min J[\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)] = & \\ & \int_a^b F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt + E(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = & \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq & \mathbf{0}, \mathbf{e}(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

其中: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{M_x}(t))$ 表示有 M_x 个在 $[a, b]$ 区间上连续可微的状态函数; $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{M_u}(t))$ 表示有 M_u 个在 $[a, b]$ 区间上连续的控制函数; 函数 $F: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}$, $E: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_x} \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathbf{f}: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}^{M_x}$, $\mathbf{e}: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_x} \rightarrow \mathbf{R}^{M_e}$ 和 $\mathbf{h}: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}^{M_h}$ 是已知的且连续可微; $\mathbf{0}$ 为相应维数的零向量; a 和 b 分别为起始和终止时间.

为了应用谱元法, 记 $I = (a, b)$, 将区间 I 分割为 K 个子区间 $I_k = (t_{k-1}, t_k)$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$, $\bar{I} = \bigcup_{k=1}^K \bar{I}_k$. 设 $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_K)$ 是正整数组成的向量, 对应于 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 的数值解分别记为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\mathbf{N}}(t) &= (x_1^{\mathbf{N}}(t), x_2^{\mathbf{N}}(t), \dots, x_{M_x}^{\mathbf{N}}(t)), \\ \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(t) &= (u_1^{\mathbf{N}}(t), u_2^{\mathbf{N}}(t), \dots, u_{M_u}^{\mathbf{N}}(t)). \end{aligned}$$

在每个闭区间 $\bar{I}_k = [t_{k-1}, t_k]$ 内, 离散问题将会使用 $N_k + 1$ 个 CGL (Chebyshev-Gauss-Lobatto) 点 $\{t_0^{N_k}, t_1^{N_k}, \dots, t_{N_k}^{N_k}\}$ 作为配置点, 其中

$$\begin{aligned} t_n^{N_k} &= t_{k-1} + (t_k - t_{k-1})(1 - \cos(n\pi/N_k))/2, \\ n &= 0, 1, \dots, N_k. \end{aligned}$$

设 M 是任意给定的正整数, 令 $\mathbf{P}_M(\bar{I}_k)$ 表示 \bar{I}_k 上次数不超过 M 的代数多项式全体, $C(\bar{I})$ 表示区间 \bar{I} 上的连续函数空间. 定义分段多项式空间 $V_{\mathbf{N}}^K = \{y \in C(\bar{I}) : y|_{\bar{I}_k} \in \mathbf{P}_{N_k}(\bar{I}_k), k = 1, 2, \dots, K\}$. 给出本文计算中用到的离散问题 $B^{\mathbf{N}}$: 找到 $x_i^{\mathbf{N}}(t) \in V_{\mathbf{N}}^K (i = 1, 2,$

$\dots, M_x)$ 和 $u_j^{\mathbf{N}}(t) \in V_{\mathbf{N}}^K (j = 1, 2, \dots, M_u)$, 使得

$$\begin{aligned} \min J^{\mathbf{N}}(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(\cdot), \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(\cdot)) = & \\ & E(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(a), \mathbf{x}^{\mathbf{N}}(b)) + \\ & \sum_{k=1}^K \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \sum_{n=0}^{N_k} F(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(t_n^{N_k}), \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(t_n^{N_k})) w_n^{N_k}. \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(t_n^{N_k}), \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(t_n^{N_k})) - \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{N}}(t_n^{N_k})\|_{\infty} \leq & \delta, \\ n = 1, 2, \dots, (N_k - 1), k = 1, 2, \dots, K; & \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(t_{k-1}), \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(t_{k-1})) - \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{N}}(t_{k-1}^+)\|_{\infty} \leq & \delta, \\ k = 1, 2, \dots, K; & \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(t_k), \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(t_k)) - \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{N}}(t_k^-)\|_{\infty} \leq & \delta, \\ k = 1, 2, \dots, K; & \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(t_n^{N_k}), \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(t_n^{N_k})) \leq \delta \cdot \mathbf{1}, n = 0, 1, \dots, N_k, & \\ k = 1, 2, \dots, K; & \\ \|\mathbf{e}(\mathbf{x}^{\mathbf{N}}(a), \mathbf{x}^{\mathbf{N}}(b))\|_{\infty} \leq & \delta. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^{\sum_{k=1}^K (N_k + 1)}, \\ \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{N}}(t_{k-1}^+) &= \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^+} \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{N}}(t), \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{N}}(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{N}}(t), \end{aligned}$$

$\|\xi\|_{\infty}$ 表示向量 ξ 的最大模, $\delta > 0$ 是为了确保 $B^{\mathbf{N}}$ 的可行性而加入的常数^[5], $\{w_0^{N_k}, w_1^{N_k}, \dots, w_{N_k}^{N_k}\}$ 是为了在闭区间 $\bar{I}_k = [t_{k-1}, t_k]$ 内计算积分而使用的 Clenshaw-Curtis 求积公式^[7]的积分权.

2 自适应算法步骤

自适应算法步骤如下.

Step 1: 初始化. 选定正整数 $N_{\text{initial}}, N_{\text{min}}, N_{\text{max}}$ (满足 $N_{\text{min}} < N_{\text{max}}$), θ (满足 $0 < \theta \leq 1$), ε 和 δ 是大于零的常数. 设置 $K = 1$ 和初始网格点 $\{t_0, t_K\}$, 其中 $t_0 = a$, $t_K = b$. 设置 $\mathbf{N} = (N_1)$, 其中 $N_1 = N_{\text{initial}}$.

Step 2: 初次求解问题. 设置 $\mathbf{x}^{\mathbf{N}}$ 和 $\mathbf{u}^{\mathbf{N}}$ 的初始猜测为零, 求解离散问题 $B^{\mathbf{N}}$, 用 J_{new} 记录得到的目标值.

Step 3: 计算局部指示量并判断是否进行加密. 在每个子区间 $(t_{k-1}, t_k) (k = 1, 2, \dots, K)$ 内计算

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_n^k = & \\ & \left| \left(\frac{d}{dt} \mathbf{u}^{\mathbf{N}} \Big|_{t=t_n^{N_k}} \right) - \left(\frac{d}{dt} \mathbf{u}^{\mathbf{N}} \Big|_{t=t_{n-1}^{N_k}} \right) \right| (t_n^{N_k} - t_{n-1}^{N_k}), \\ n &= 2, 3, \dots, (N_k - 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1^k = & \\ & \left| \left(\frac{d}{dt} \mathbf{u}^{\mathbf{N}} \Big|_{t=t_1^{N_k}} \right) - \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^+} \frac{d}{dt} \mathbf{u}^{\mathbf{N}} \Big|_{t=t_1^{N_k}} \right| (t_1^{N_k} - t_{k-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{N_k}^k = & \\ & \left| \lim_{t \rightarrow t_k^-} \frac{d}{dt} \mathbf{u}^{\mathbf{N}} - \left(\frac{d}{dt} \mathbf{u}^{\mathbf{N}} \Big|_{t=t_{N_k}^{N_k}} \right) \right| (t_k - t_{N_k}^{N_k}); \end{aligned}$$

$$A = \left(\sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{N_k} d_n^k \right) / \left(\sum_{k=1}^K N_k \right).$$

在每个子区间 (t_{k-1}, t_k) 内, 对于某个 $n \in \{1, 2, \dots, N_k\}$, 如果向量不等式 $d_n^k > A$ 中的 M_u 个不等式中至少有一个成立, 则在 $t = (t_n^{N_k} + t_{n-1}^{N_k})/2$ 处设置一个新内分点.

Step 4: 形成加密后的离散问题 B^N . 放弃全部旧的内分点, 统计设置的新内分点, 得到新的 K 和新的网格点 $\{t_0, t_1, \dots, t_K\}$, 设置 $N = (N_1, N_2, \dots, N_K)$, 其中 $N_1 = N_2 = \dots = N_K = N_{\min}$.

Step 5: 规定各个子区间内增加多项式次数的方式. 对于 $k = 1, 2, \dots, K$, 如果 $t_k - t_{k-1} > \theta(b - a)/K$, 则设置 $m_k = 2$, 否则设置 $m_k = 1$.

Step 6: 为加密后的离散问题 B^N 设置初始猜测. 设置 x^N 和 u^N 在 $t_0 = a$ 和 $t_K = b$ 的初始猜测为旧的数值解在该点上的值. 设置 x^N 和 u^N 在新内分点 $t = (t_n^{N_k} + t_{n-1}^{N_k})/2$ 上的初始猜测为旧的数值解在 $t_n^{N_k}$ 和 $t_{n-1}^{N_k}$ 上两个值的算术平均值. 对于任意 $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, 设置 x^N 和 u^N 在每个子区间 (t_{k-1}, t_k) 内的初始猜测为它们在该子区间左右端点上初始猜测的线性插值.

Step 7: 求解加密后的离散问题 B^N 并判断是否停止程序. 设置 $J_{\text{old}} = J_{\text{new}}$, 解离散问题 B^N , 用 J_{new} 记录得到的目标值. 若 $|J_{\text{new}} - J_{\text{old}}|/|J_{\text{old}}| \leq \varepsilon$, 则停止程序; 若 $\max\{N_1, N_2, \dots, N_K\} \geq N_{\max}$, 则转至 Step 3. 设置 $N_k = m_k N_k, k = 1, 2, \dots, K$. 利用上一次解 B^N 得到的结果作为下一次解 B^N 时的初始猜测, 重复 Step 7.

3 数值例子

利用上节设计的自适应算法进行数值实验. 使用 SNOPT^[8] 解离散问题 B^N , 在 Matlab 6.5 软件环境下进行编程, 并在同一台 PC 机上计算.

例 1 用本文算法解文献 [9] 中的例 2, 计算中选定 $N_{\text{initial}} = 32, N_{\min} = 4, N_{\max} = 8, \theta = 0.6, \varepsilon = 2 \times 10^{-10}, \delta = 10^{-16}$.

表 1 列出了本文算法历次解问题 B^N 的结果, 其中 J^N 是本文算法得到的最优目标值, 解析解对应的目标值^[9]为 $J_a = 4/0.36$. 文献 [9] 中的 TABLE I 列出了该方法在 51 个点时得到最小误差 $|J^N - J_a| = 4.0 \times 10^{-8}$. 表 1 显示, 本文算法第 4 次解 B^N 时, 用 45 个配置点已经得到更小的误差, 最终得到的控制函数如图 1 所示. 图 1 中: “□”表示数值解在 $\{t_0, t_1, \dots, t_K\}$ 上的值, “*”表示精确解在配置点的值, “o”表示数值解在配置点的值. 图 2 是表 1 的数值解对应的网格点 $\{t_0, t_1, \dots, t_K\}$. 不难看出, 算法将大量内分点设置在

弱间断点 $t = 0.12$ 和 $t = 0.88$ 附近.

表 1 本文算法解例 1 的结果

L	子区间数 K	配置点数 $K + \sum_{k=1}^K N_k$	目标值误差 $ J^N - J_a $
1	1	33	4.609×10^{-3}
2	9	45	9.561×10^{-4}
3	9	49	9.619×10^{-4}
4	9	45	2.995×10^{-9}
5	9	57	1.411×10^{-9}

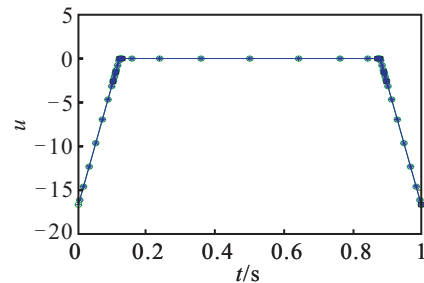


图 1 本文算法解例 1 得到的控制函数

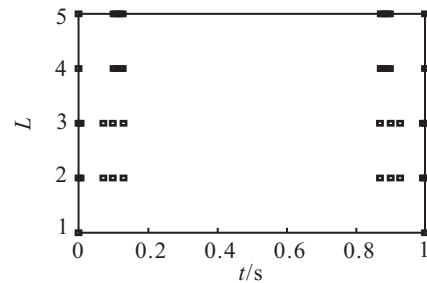


图 2 表 1 中第 L 次解 B^N 时采用的网格点 $\{t_0, t_1, \dots, t_K\}$

例 2 解如下航天器最优控制问题^[1]:

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^{100} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt;$$

$$\dot{\omega}_1 = -(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + u_1/I_1,$$

$$\dot{\omega}_2 = -(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 + u_2/I_2,$$

$$\dot{\omega}_3 = -(I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 + u_3/I_3,$$

$$\omega_1(t) - (5 \times 10^{-6}t^2 - 5 \times 10^{-4}t + 0.016) \leq 0,$$

$$\omega_1(0) = 0.01 \text{ rad/s}, \omega_2(0) = 0.005 \text{ rad/s},$$

$$\omega_3(0) = 0.001 \text{ rad/s},$$

$$\omega_1(100) = \omega_2(100) = \omega_3(100) = 0.$$

其中

$$I_1 = 86.24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_2 = 85.07 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_3 = 113.59 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

计算中选定 $N_{\text{initial}} = 32, N_{\min} = 4, N_{\max} = 8, \theta = 0.6, \varepsilon = 2 \times 10^{-6}$ 和 $\delta = 10^{-16}$. 表 2 列出了本文算法的计算结果, 其中列出的目标值与 Jaddu^[1] 计算出的目标值 0.005 309 02 大致相同. 图 3 中: “□”表示数

值解在 $\{t_0, t_1, \dots, t_K\}$ 上的值; “*”、“o”和“+”表示数值解在配置点上的值. 图4是表2的数值解对应的网格点 $\{t_0, t_1, \dots, t_K\}$. 从图3和图4可以看出, 本文算法将内分点设置在控制函数明显变化的位置附近.

表2 本文算法解例2的结果

L	子区间数 K	配置点数 $K + \sum_{k=1}^K N_k$	目标值 J^N
1	1	33	0.005 307 943 220 408 989
2	14	70	0.005 308 661 656 280 864
3	14	86	0.005 308 443 556 312 941
4	28	140	0.005 308 455 036 376 677
5	28	176	0.005 308 449 391 651 05

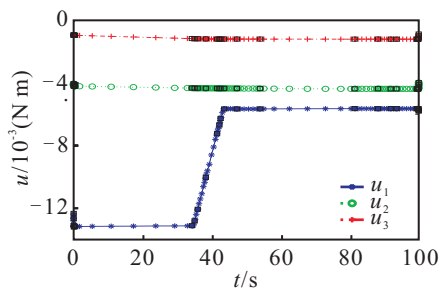


图3 本文算法解例2得到的控制函数

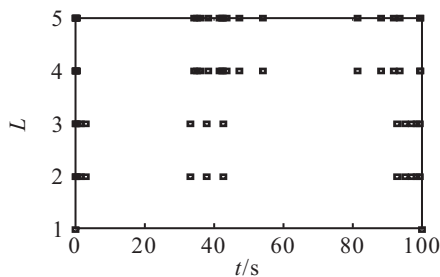


图4 表2中第 L 次解 B^N 时采用的网格点 $\{t_0, t_1, \dots, t_K\}$

4 结论

对于最优解存在弱间断的OC问题, 本文用分段多项式作为数值解, 在每个子区间内CGL点作为配置点, 将OC问题转化为一个非线性规划问题. 本文的自适应算法在数值解导数明显改变的子区间内加密产生新的子区间, 使得子区间的长短在一定程度上反映了最优解在子区间内的光滑程度, 为自适应调整逼近多项式次数带来了便利. 该算法在较长的子区间内增加逼近多项式的次数, 有利于逼近最优解中较为

光滑的部分. 由于较短的子区间内最优解可能不够光滑, 多项式逼近效果难以改善, 算法不调整那里的多项式次数. 最后, 通过将两个数值例子的结果与已有文献进行比较, 验证了所提出的算法确实可以将分点设置在弱间断点附近, 数值解具有较高的精度.

参考文献(References)

- [1] Jaddu H. Direct solution of nonlinear optimal control problems using quasilinearization and Chebyshev polynomials[J]. J of the Franklin Institute, 2002, 339(4/5): 479-498.
- [2] Zhao X P, Yang R T, Zhang M J, et al. A computational approach for understanding immune response to multiple epitopes based on optimal control formulation[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2010, 15(12): 4209-4218.
- [3] Sakawa Y. Trajectory planning of a free-flying robot by using the optimal control[J]. Optimal Control Applications and Methods, 1999, 20(5): 235-248.
- [4] Gong Q, Kang W, Ross I M. A pseudospectral method for the optimal control of constrained feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(7): 1115-1129.
- [5] Gong Q, Fahroo F, Ross I M. Spectral algorithm for pseudospectral methods in optimal control[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2008, 31(3): 460-471.
- [6] 张稳. 非光滑最优控制问题的一种数值解法[J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(2): 207-220.
(Zhang W. A numerical method for solving nonsmooth optimal control problems[J]. Applied Mathematics J of Chinese Universities, 2009, 24(2): 207-220.)
- [7] Gong Q, Ross I M, Fahroo F. Costate computation by a Chebyshev pseudospectral method[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2010, 33(2): 623-628.
- [8] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization[J]. SIAM Review, 2005, 47(1): 99-131.
- [9] Jain S, Tsiotras P. Multiresolution-based direct trajectory optimization[C]. Proc of the 46th IEEE Conf on Decision and Control. New Orleans: LA, 2007: 5991-5996.