

文章编号: 1001-0920(2012)11-1653-10

## 一种新的覆盖粗糙模糊集模型

汤建国<sup>1,3</sup>, 余堃<sup>1</sup>, 祝峰<sup>2</sup>

(1. 电子科技大学 计算机科学与工程学院, 成都 611731; 2. 漳州师范学院 粒计算重点实验室, 福建 漳州 363000; 3. 新疆财经大学 计算机科学与工程学院, 乌鲁木齐 830012)

**摘要:** 在覆盖粗糙集与模糊集结合的研究中, 已有的覆盖粗糙模糊集模型存在两类问题: 一类是元素的上、下近似隶属度之间的差值通常过大; 另一类是元素的上、下近似隶属度与其在给定模糊集中的隶属度无关. 对此, 通过定义模糊覆盖粗糙隶属度, 将元素的最小描述与给定模糊集建立联系, 同时综合元素在给定模糊集中的隶属度, 进而建立一个新的覆盖粗糙模糊集模型. 理论比较和实验结果均表明该模型可以有效解决上述两类问题.

**关键词:** 覆盖; 粗糙集; 模糊集; 粗糙模糊集; 模糊覆盖粗糙隶属度

中图分类号: TP18

文献标志码: A

### A new type of covering-based rough fuzzy set model

TANG Jian-guo<sup>1,3</sup>, SHE Kun<sup>1</sup>, ZHU William<sup>2</sup>

(1. School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China; 2. Lab of Granular Computing, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, China; 3. School of Computer Science and Engineering, Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi 830012, China. Correspondent: ZHU William, E-mail: williamfengzhu@163.com)

**Abstract:** There are two kinds of problems in the study of covering-based rough sets combined with the fuzzy sets. That is, on the one hand, in the existing covering-based rough fuzzy set models, there is often too big difference between the lower and upper approximate memberships of an element in the universe; and on the other hand, for any element in the universe, the lower and upper approximate memberships of it have nothing to do with the membership of itself in the given fuzzy set. Therefore, by defining the concept of fuzzy covering-based rough membership, the relationships between minimal descriptions of elements contained in the universe and the given fuzzy set are built. The memberships of the element in the given fuzzy set are also considered. Then, on this basis, a new covering-based rough fuzzy set model is established. The comparative study between this model and the existing models shows that proposed model can solve the above two kinds of problems effectively.

**Key words:** covering; rough set; fuzzy set; rough fuzzy set; fuzzy covering-based rough membership

### 1 引言

粗糙集理论<sup>[1]</sup>和模糊集理论<sup>[2]</sup>都是用于解决不确定性问题的数学工具. 粗糙集通过两个确定的集合(即下近似集和上近似集)对目标集合进行逼近描述. 这一描述过程不需要任何先验知识, 完全是根据所给的数据进行分析判断, 因而已被广泛地应用于人工智能、数据挖掘以及决策分析等众多领域<sup>[3-6]</sup>. 与粗糙集不同的是, 模糊集在描述目标对象时需要借助先验知识, 如专家经验等, 具有较好的应用性. 粗糙集和模糊集之间具有很强的互补性, 因此, Dubois等<sup>[7]</sup>将两者进行了有机的结合, 提出了粗糙模糊集和模糊

粗糙集. 这一创造性的工作不仅推动了经典粗糙集与模糊集结合的相关研究, 也引发了学者对广义粗糙集与模糊集进行结合研究的兴趣<sup>[8-10]</sup>.

覆盖粗糙集<sup>[11-13]</sup>是一种重要的广义粗糙集理论, 由于覆盖是比划分更为一般的概念, 在现实世界中广泛存在, 最近几年覆盖粗糙集受到了越来越多的关注, 出现了大量有意义的研究成果<sup>[14-22]</sup>. 在覆盖粗糙集与模糊集结合研究方面, 魏莱等<sup>[23]</sup>在元素最小描述并集的基础上探讨了覆盖粗糙集与模糊集的结合, 提出了一种覆盖粗糙模糊集模型. 徐忠印等<sup>[24]</sup>在元素最小描述交集的基础上研究了两者的结合.

收稿日期: 2011-07-11; 修回日期: 2011-10-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60873077, 61170128); 福建省自然科学基金项目(2011J01374).

作者简介: 汤建国(1978—), 男, 讲师, 博士生, 从事粗糙集、粒计算等研究; 余堃(1967—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能中间件计算、智能安全、粗糙集等研究.

Hu 等<sup>[25]</sup>利用规则的置信度改进了文献[23-24]的工作,建立了一种新的覆盖粗糙模糊集模型.徐伟华等<sup>[26]</sup>利用 Hamming 和 Euclidean 距离函数,研究了覆盖广义粗糙集的模糊性问题.Feng 等<sup>[27]</sup>利用模糊集中截集与支集的概念,定义了一种覆盖粗糙模糊集.张植明等<sup>[28]</sup>将直觉模糊粗糙集与覆盖粗糙集相结合,提出了一种基于直觉模糊覆盖的直觉模糊粗糙集模型.Deng 等<sup>[29]</sup>在模糊覆盖和二元模糊逻辑算子的基础上,研究了广义模糊粗糙集,并对广义模糊粗糙集和经典模糊粗糙集进行了比较.Zhu<sup>[30]</sup>提出了一种新的覆盖模糊粗糙集,并对其性质作了深入分析和研究.Zhang 等<sup>[31]</sup>在模糊覆盖的基础上研究了变精度模糊粗糙集.这些工作都极大地促进了覆盖粗糙集与模糊集结合的研究.

本文将进一步研究覆盖粗糙模糊集模型.通过对文献[23-25]中提出的3种模型进行深入分析,发现它们在对给定模糊集进行近似描述时,没有充分考虑元素与其最小描述之间的关系,在确定一个元素的上、下近似隶属度时忽略了它在给定模糊集中的隶属度,从而不仅造成近似描述的精度较低,而且不能很好地反映实际情况.为此,本文定义了模糊覆盖粗糙隶属度,利用它将元素与其最小描述中各元素的隶属度联系起来,并体现出该元素与其最小描述之间的关系,从而得到一个可以综合反映各元素与给定模糊集之间从属关系的新模糊集.然后结合这个新模糊集与给定模糊集来建立一种新的覆盖粗糙模糊集模型.最后对这几种模型进行了理论和实验比较分析,结果表明所提出的覆盖粗糙模糊集模型较为有效地解决了其他3种模型中存在的问题.

## 2 背景知识

本节将介绍文中涉及到的一些有关粗糙集、覆盖粗糙集和模糊集的基本概念.

**定义1(粗糙集)**<sup>[1,32]</sup> 设  $U$  是一个论域,  $R$  是  $U$  上的一个等价关系,  $U/R = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  是论域  $U$  上的一个划分,  $X \subseteq U$ , 则  $X$  关于  $R$  的下近似和上近似分别为

$$\underline{R}(X) = \bigcup \{K_i | K_i \in U/R \wedge K_i \subseteq X\},$$

$$\overline{R}(X) = \bigcup \{K_i | K_i \in U/R \wedge K_i \cap X \neq \emptyset\}.$$

当  $\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$  时,称  $X$  是在  $U$  中关于  $R$  的精确集;当  $\underline{R}(X) \neq \overline{R}(X)$  时,称  $X$  是在  $U$  中关于  $R$  的粗糙集.

**定义2(粗糙隶属函数)**<sup>[32]</sup> 设  $U$  是一个论域,  $R$  是  $U$  上的一个等价关系.  $\forall x \in U, X \subseteq U$ , 定义

$$\mu_X^R(x) = |\underline{R}(x) \cap X| / |\underline{R}(x)|$$

为  $X$  关于  $R$  的粗糙隶属函数.其中:  $|\bullet|$  表示集合的基数,  $\underline{R}(x)$  表示元素  $x$  关于  $R$  的等价类.

**定义3(覆盖、覆盖近似空间)**<sup>[11,22]</sup> 设  $U$  是一个论域,  $\mathcal{C}$  是  $U$  的一个子集族.如果  $\mathcal{C}$  中的所有集合都非空,且  $\bigcup \mathcal{C} = U$ , 则称  $\mathcal{C}$  是  $U$  的一个覆盖;称  $(U, \mathcal{C})$  为覆盖近似空间.

**定义4(最小描述)**<sup>[11,22]</sup> 设  $(U, \mathcal{C})$  为一个覆盖近似空间,  $x \in U$ , 则称

$$Md(x) = \{K \in \mathcal{C} | x \in K \wedge (\forall S \in \mathcal{C} \wedge x \in S \wedge S \subseteq K \Rightarrow K = S)\}$$

为  $x$  的最小描述.

**定义5(包含度)**<sup>[26]</sup> 设  $(U, \mathcal{C})$  是一个覆盖近似空间,  $X \subseteq U, x \in U$ , 称  $D(x, X)$  为  $x$  在  $X$  中的包含度, 如果

$$D(x, X) = \frac{|\bigcup Md(x) \cap X|}{|\bigcup Md(x)|}.$$

**定义6(模糊集、模糊幂集)**<sup>[2]</sup> 设  $U$  是一个论域,  $x \in U, U$  上的一个映射  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mu_A(x)$ . 则称  $\mu_A$  确定了  $U$  上的一个模糊子集, 记为  $A$ .  $\mu_A$  称为模糊子集  $A$  的隶属函数,  $\mu_A(x)$  称为  $x$  对  $A$  的隶属度.为方便起见,通常将模糊子集简称为模糊集.称  $U$  上的模糊子集的全体为模糊幂集, 记为  $F(U)$ .

**定义7(核与支集)**<sup>[2]</sup> 设  $U$  是一个论域,  $A \in F(U)$ , 则称  $A_1 = \{x \in U | A(x) = 1\}$  为  $A$  的核,  $A_0 = \{x \in U | A(x) > 0\}$  为  $A$  的支集.

**定义8(Hamming 贴近度)**<sup>[33]</sup> 设  $U$  是一个论域,  $A, B \in F(U), D_H : F(U) \times F(U) \rightarrow [0, 1]$ , 则称

$$D_H(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |A(x_i) - B(x_i)|$$

为模糊集  $A$  与模糊集  $B$  的 Hamming 贴近度.

Hamming 贴近度是用来度量两个模糊集接近程度的数量指标,其值越大,表明两个模糊集的接近程度越高;反之,则越低.特别地,一个模糊集与其自身的接近程度最大,而一个分明集与其补集的接近程度最小.

## 3 现有的覆盖粗糙模糊集模型及其不足

下面介绍3种常见的覆盖粗糙模糊集模型,对它们进行详细分析,发现其中的问题并探究其根本原因.

**定义9(第1种覆盖粗糙模糊集模型)**<sup>[23]</sup> 设  $(U, \mathcal{C})$  是一个覆盖近似空间,  $A \in F(U)$ , 则  $A$  关于覆盖近似空间  $(U, \mathcal{C})$  的下近似隶属函数和上近似隶属函数分别为

$$\mu_{\underline{CF}(A)}(x) = \inf \{A(y) | y \in \bigcup Md(x)\},$$

$$\mu_{\overline{CF}(A)}(x) = \sup \{A(y) | y \in \bigcup Md(x)\}.$$

称  $(\underline{CF}(A), \overline{CF}(A))$  为  $A$  关于覆盖  $\mathcal{C}$  的第1种覆盖粗糙模糊集.

这种模型在确定  $x$  的上下近似隶属度时,是通过

先求出  $x$  的最小描述, 再找出这个最小描述并集中的最小和最大隶属度分别作为  $x$  的上、下近似隶属度, 从而求得关于  $A$  的一对近似模糊集.

**定义 10** (第 2 种覆盖粗糙模糊集模型)<sup>[24]</sup> 设  $(U, C)$  是一个覆盖近似空间,  $A \in F(U)$ , 则  $A$  关于覆盖近似空间  $(U, C)$  的下近似隶属函数和上近似隶属函数分别为

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{CS}(A)}(x) &= \inf\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}, \\ \mu_{\overline{CS}(A)}(x) &= \sup\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}. \end{aligned}$$

称  $(\underline{CS}(A), \overline{CS}(A))$  为  $A$  关于覆盖  $C$  的第 2 种覆盖粗糙模糊集.

与定义 9 中的模型所不同的是, 这种模型是在  $x$  的最小描述的交集中找出最小和最大的隶属度, 分别作为  $x$  的上、下近似隶属度, 从而求得关于  $A$  的一对近似模糊集.

**定义 11** (第 3 种覆盖粗糙模糊集模型)<sup>[25]</sup> 设  $(U, C)$  是一个覆盖近似空间,  $A \in F(U)$ , 则  $A$  关于覆盖近似空间  $(U, C)$  的下近似隶属函数和上近似隶属函数分别为

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{CT}(A)}(x) &= \sup_{K \in Md(x)} \{ \inf_{y \in K} \{A(y)\} \}, \\ \mu_{\overline{CT}(A)}(x) &= \inf_{K \in Md(x)} \{ \sup_{y \in K} \{A(y)\} \}. \end{aligned}$$

称  $(\underline{CT}(A), \overline{CT}(A))$  为  $A$  关于覆盖  $C$  的第 3 种覆盖粗糙模糊集.

从上面 3 种覆盖粗糙模糊集的定义可知: 对于任意一个  $x \in U$ , 在第 1 种 (第 2 种) 覆盖粗糙模糊集模型中,  $x$  的下近似隶属度是由  $x$  的最小描述并集 (交集) 中元素的最小隶属度来确定, 而与其他元素的隶属度无关;  $x$  的上近似隶属度则是由  $x$  的最小描述并集 (交集) 中元素的最大隶属度来确定, 而与其他元素的隶属度无关. 在第 3 种覆盖粗糙模糊集模型中, 通过先求出  $x$  最小描述的各集合中元素的最小隶属度, 然后将其中最大的隶属度作为  $x$  的下近似隶属度; 反之, 先求出  $x$  最小描述的各集合中元素的最大隶属度, 然后将其中最小的隶属度作为  $x$  的上近似隶属度.

由此可以发现, 在上述 3 种模型中, 一旦  $x$  的相关集合中最大和最小隶属度确定了, 则其他元素的隶属度大小将变得不再重要. 即这些元素的隶属度如果在区间 [最小隶属度, 最大隶属度] 中随意变动, 都不会影响  $x$  的上、下近似隶属度. 而这与人们对实际问题的理解是不相符的. 下面通过一个例子来说明这一点.

**例 1** 设论域  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ ,  $U$  上的一个覆盖  $C = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_6, x_7, x_8, x_9\}\}$ , 模糊集  $A$  和  $B$  分别为

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.1}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ B &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.9}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0.9}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0.9}{x_9} \right\}, \end{aligned}$$

求  $A$  和  $B$  在 3 种覆盖粗糙模糊集模型中的上、下近似模糊集.

**解** 由已知条件可知,  $Md(x_1) = Md(x_2) = \{\{x_1, x_2, x_3\}\}$ ,  $Md(x_3) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}\}$ ,  $Md(x_4) = Md(x_5) = \{\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}\}$ ,  $Md(x_6) = Md(x_7) = \{\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_6, x_7, x_8, x_9\}\}$ ,  $Md(x_8) = Md(x_9) = \{\{x_6, x_7, x_8, x_9\}\}$ . 则根据定义 9 可得

$$\begin{aligned} \underline{CF}(A) &= \left\{ \frac{0.1}{x_1}, \frac{0.1}{x_2}, \frac{0}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CF}(A) &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.9}{x_2}, \frac{0.9}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0.9}{x_5}, \frac{0.9}{x_6}, \frac{0.9}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0.9}{x_9} \right\}; \\ \underline{CF}(B) &= \left\{ \frac{0.1}{x_1}, \frac{0.1}{x_2}, \frac{0}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CF}(B) &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.9}{x_2}, \frac{0.9}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0.9}{x_5}, \frac{0.9}{x_6}, \frac{0.9}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0.9}{x_9} \right\}. \end{aligned}$$

根据定义 10 可得

$$\begin{aligned} \underline{CS}(A) &= \left\{ \frac{0.1}{x_1}, \frac{0.1}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CS}(A) &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.9}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0.9}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0.9}{x_9} \right\}; \\ \underline{CS}(B) &= \left\{ \frac{0.1}{x_1}, \frac{0.1}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CS}(B) &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.9}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0.9}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0.9}{x_9} \right\}. \end{aligned}$$

根据定义 11 可得

$$\begin{aligned} \underline{CT}(A) &= \left\{ \frac{0.1}{x_1}, \frac{0.1}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CT}(A) &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.9}{x_2}, \frac{0.9}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0.9}{x_5}, \frac{0.9}{x_6}, \frac{0.9}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0.9}{x_9} \right\}; \\ \underline{CT}(B) &= \left\{ \frac{0.1}{x_1}, \frac{0.1}{x_2}, \frac{0.1}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CT}(B) &= \left\{ \frac{0.9}{x_1}, \frac{0.9}{x_2}, \frac{0.9}{x_3}, \frac{0.9}{x_4}, \frac{0.9}{x_5}, \frac{0.9}{x_6}, \frac{0.9}{x_7}, \frac{0.9}{x_8}, \frac{0.9}{x_9} \right\}. \end{aligned}$$

在上面的例子中, 虽然  $A$  和  $B$  是两个有着很大差别的模糊集, 但在 3 种覆盖粗糙模糊集模型中, 它们的上、下近似模糊集却是完全相同的. 此外, 这些模型求出来的元素的上、下近似隶属度之间的差值过大, 不能对元素进行有效的近似描述. 例如对于  $x_1$  而言, 它在  $A$  和  $B$  中的隶属度均为 0.9, 一般来说其上、下近似隶属度应与 0.9 较为接近, 这样对  $x_1$  的粗糙描述才更有意义. 然而, 3 种模型得到  $x_1$  关于  $A$  和  $B$  的上、下近似隶属度区间均为  $[0.1, 0.9]$ , 用这个区间粗糙描述  $x_1$  显得过于粗糙. 再如  $x_5$ , 它在  $A$  和  $B$  中的隶属度分别为 0 和 0.9, 但 3 种模型得到  $x_5$  关于  $A$  和  $B$  的上、下近似隶属度区间均为  $[0, 0.9]$ , 这同样也过于粗糙.

综上所述, 已有的 3 种覆盖粗糙模糊集模型在对

给定模糊集进行粗糙描述时,没有充分考虑元素与其最小描述中其他元素之间的关系,以及忽视了其自身在给定模糊集中的隶属度,从而造成其上、下近似隶属度之间的差值过大.究其原因,是由于上述3种覆盖粗糙模糊集在建模时的出发点是相同的,即都是通过对元素的某个相关集合中所有元素的隶属度进行求大和求小运算,以获得该元素的上、下近似隶属度,并构建关于给定模糊集的一对近似模糊集.这将会造成一个元素的上、下近似隶属度只是由一些特殊的元素隶属度来确定,而与自身的隶属度以及元素之间的关系无关.采用这种方式建立的模型虽然显得简洁易懂,但却不能有效反映实际情况,因此,本文将从一个新的角度来研究此类模型.

#### 4 一种新的覆盖粗糙模糊集模型

该模型在建模时,充分考虑了元素与其最小描述之间的密切关系,以及它在给定模糊集中的隶属度.为了与前3种此类模型在称谓上形成对应,本文称这一新的模型为第4种覆盖粗糙模糊集模型.

##### 4.1 第4种覆盖粗糙模糊集模型

为了能在覆盖  $C$  和模糊集  $A$  中元素的隶属度之间建立一定的联系,首先定义模糊覆盖粗糙隶属度的概念.

**定义 12** (模糊覆盖粗糙隶属度) 设  $U$  是一个论域,  $C$  是论域  $U$  上的一个覆盖,  $A \in F(U)$ ,  $x \in U$ . 定义  $x$  关于  $A$  的模糊覆盖粗糙隶属度为

$$\mu_{A'}(x) = \sum_{y \in \cup Md(x)} A(y) / |\cup Md(x)|.$$

模糊覆盖粗糙隶属度一方面反映了元素与其最小描述之间的关系,另一方面也融合了给定模糊集中元素及其最小描述中各元素的隶属度.因此,它从另一个角度较为全面地反映了论域中各个元素从属于  $A$  的程度.

从模糊覆盖粗糙隶属度的定义式中可以看出,它与前面定义 5 中的包含度较为相似.通过分析会发现,当  $A$  退化为普通集合时,模糊覆盖粗糙隶属度将退化为元素包含于  $A_0$  ( $A$  的支集) 的包含度.由此,可以得到下面的命题.

**命题 1** 当  $A$  退化为普通集合时,  $\mu_{A'}(x) = D(x, A_0)$ .

**证明** 因为  $A$  是普通集合,所以  $\forall x \in U$ ,  $A(x) = 1$  或  $0$ . 根据定义 7 中支集的定义可知

$$\sum_{y \in \cup Md(x)} A(y) = \sum_{y \in (\cup Md(x)) \cap A} A(y).$$

再由定义 5 可知

$$|(\cup Md(x)) \cap A| = \sum_{y \in (\cup Md(x)) \cap A} A(y) = \sum_{y \in \cup Md(x)} A(y),$$

所以  $\mu_{A'}(x) = D(x, A_0)$ .  $\square$

进一步可以发现,当模糊覆盖粗糙隶属度中的  $A$  退化为普通集合且覆盖  $C$  退化为划分时,它将退化为定义 2 中的粗糙隶属函数.于是可以得到下面的命题.

**命题 2** 当  $A$  退化为普通集合且  $C$  退化为划分时,  $\mu_{A'}(x) = \mu_X^R(x)$ .

**证明** 由定义 4 知,当  $C$  退化为划分时,  $Md(x) = [x]_R$ , 即在论域的划分中,元素的最小描述与其等价类相等.又因为  $A$  是普通集合,根据定义 2 和命题 1 可知,  $\mu_{A'}(x) = \mu_X^R(x)$ .  $\square$

从模糊覆盖粗糙隶属度的定义可知,一个元素的模糊覆盖粗糙隶属度从某种程度上反映了它的最小描述这个整体从属于  $A$  的程度,而这也体现了该元素从属于  $A$  的一种趋势,即:若该元素的最小描述整体从属于  $A$  的程度大于它在  $A$  中的隶属度,则说明它实际从属于  $A$  的程度应该很有可能比  $A$  中所给的隶属度要大,换言之,它在给定模糊集  $A$  中的隶属度被低估了;反之,则说明它实际从属于  $A$  的程度应该很有可能比  $A$  中所给的隶属度要小,即它在给定模糊集  $A$  中的隶属度被高估了.由此,本文提出如下新的覆盖粗糙模糊集模型.

**定义 13** (第4种覆盖粗糙模糊集) 设  $U$  是一个论域,  $C$  是论域  $U$  上的一个覆盖,  $A \in F(U)$ . 定义  $A$  关于覆盖近似空间  $(U, C)$  的上、下近似隶属函数分别为

$$\mu_{\underline{CH}(A)}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{A'}(x)\},$$

$$\mu_{\overline{CH}(A)}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{A'}(x)\}.$$

称  $(\underline{CH}(A), \overline{CH}(A))$  为  $A$  关于覆盖  $C$  的第4种覆盖粗糙模糊集.

下面以文献 [25] 中的案例为例,对这4种覆盖粗糙模糊集模型求得的结果进行分析比较.

**例 2** 假设有 9 个信用卡申请者组成的论域  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ , 由多个专家  $E_1, E_2, E_3$  分别对他们的受教育程度进行好、中、差 3 个级别的评价,得到了覆盖  $C = \{\text{good, average, poor}\} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_6, x_7, x_8, x_9\}\}$ . 此外,模糊集  $\text{high, middle, low}$  分别表示这 9 个申请者的收入属于高收入、中等收入、低收入的情况.其中

$$\text{high} = \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{0.8}{x_2}, \frac{0.5}{x_3}, \frac{0.3}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\},$$

$$\text{middle} = \left\{ \frac{0}{x_1}, \frac{0.2}{x_2}, \frac{0.5}{x_3}, \frac{0.7}{x_4}, \frac{1}{x_5}, \frac{1}{x_6}, \frac{0.6}{x_7}, \frac{0.3}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\},$$

$$\text{low} = \left\{ \frac{0}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{0}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0.4}{x_7}, \frac{0.7}{x_8}, \frac{1}{x_9} \right\}.$$

分别用 4 种模型求出模糊集 high, middle, low 的覆盖粗糙模糊集.

**解** 首先计算模糊集 high 的 4 种覆盖粗糙模糊集. 根据定义 9 和定义 11 分别可得

$$\begin{aligned} \underline{CF}(\text{high}) &= \left\{ \frac{0.5}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CF}(\text{high}) &= \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0.5}{x_4}, \frac{0.5}{x_5}, \frac{0.5}{x_6}, \frac{0.5}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}; \\ \underline{CS}(\text{high}) &= \left\{ \frac{0.5}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.5}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CS}(\text{high}) &= \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{0.5}{x_3}, \frac{0.5}{x_4}, \frac{0.5}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}; \\ \underline{CT}(\text{high}) &= \left\{ \frac{0.5}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.5}{x_3}, \frac{0}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CT}(\text{high}) &= \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{0.5}{x_3}, \frac{0.5}{x_4}, \frac{0.5}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}. \end{aligned}$$

根据定义 12 可得

$$\begin{aligned} \mu_{A'}(x_1) &= \mu_{A'}(x_2) = 0.77, \mu_{A'}(x_3) = 0.37, \\ \mu_{A'}(x_4) &= \mu_{A'}(x_5) = 0.16, \mu_{A'}(x_6) = \mu_{A'}(x_7) = 0.11, \\ \mu_{A'}(x_8) &= \mu_{A'}(x_9) = 0. \end{aligned}$$

从而, 根据定义 13 可得

$$\begin{aligned} \underline{CH}(\text{high}) &= \left\{ \frac{0.77}{x_1}, \frac{0.77}{x_2}, \frac{0.37}{x_3}, \frac{0.16}{x_4}, \frac{0}{x_5}, \frac{0}{x_6}, \frac{0}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}, \\ \overline{CH}(\text{high}) &= \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{0.8}{x_2}, \frac{0.5}{x_3}, \frac{0.3}{x_4}, \frac{0.16}{x_5}, \frac{0.11}{x_6}, \frac{0.11}{x_7}, \frac{0}{x_8}, \frac{0}{x_9} \right\}. \end{aligned}$$

从上述所求的 4 种覆盖粗糙模糊集结果可知,  $x_3$  拿高工资的可能性范围依次为:  $[0, 1]$ ,  $[0.5, 0.5]$ ,  $[0.5, 0.5]$ ,  $[0.37, 0.5]$ . 由所给覆盖可知,  $x_3$  既在 good 中也在 average 中, 它的最小描述并集包含  $x_1 \sim x_7$  这 7 个元素. 从 high 中元素的隶属度看, 他们拿高工资的可能性总体偏低, 又根据所求得的  $\mu_{\text{high}}'(x_3) = 0.37$ , 它小于  $x_3$  在 high 中的隶属度 0.5. 因此,  $x_3$  作为这个整体中的一员, 应具有该整体的特性, 这意味着  $x_3$  拿高工资的可能性在很大程度上比 0.5 要低, 即  $x_3$  拿高工资的可能性在 high 中被高估了. 第 4 种模型所得到的  $x_3$  的上、下近似隶属度也反映出了这一点. 其他 3 种模型则显得较为机械, 没有充分体现这一特征. 再如  $x_6$  和  $x_7$ , 虽然他们在 high 中的隶属度都为 0, 但是与他们同为一种的  $x_3$  和  $x_4$  却不为 0, 这说明他们也有拿高工资的可能性, 只是这种可能性较小而已. 在第 4 种模型中,  $x_6$  和  $x_7$  拿高工资的可能性为  $[0, 0.11]$  也反映出了这一点. 而第 2 种和第 3 种模型得到的  $x_6$  和  $x_7$  拿高工资的最大可能性为 0, 这个结果忽略了它们与其最小描述中其他元素之间的关系. 当然, 第 1 种模型得到的  $x_6$  和  $x_7$  拿高工资的可能性范围为  $[0, 0.5]$

也显得有些过大. 同理, 可以求出 middle 和 low 的 4 种覆盖粗糙模糊集, 并进行类似的比较分析.

从上面的例子可以看出, 第 4 种模型求出的覆盖粗糙模糊集相对于前 3 种模型而言, 其结果既体现了一个元素自身隶属度的重要性, 同时也考虑了一个元素与其他同类元素之间的联系, 因此, 它所反映的信息与实际情况更为接近.

## 4.2 第 4 种覆盖粗糙模糊集的性质

**定理 1** 设  $U$  是一个论域,  $C$  是论域  $U$  上的一个覆盖,  $A, B \in F(U)$ , 则第 4 种覆盖粗糙模糊集具有以下性质:

- 1)  $\underline{CH}(U) = U, \overline{CH}(U) = U$ ;
- 2)  $\underline{CH}(\emptyset) = \emptyset, \overline{CH}(\emptyset) = \emptyset$ ;
- 3)  $\underline{CH}(A) \subseteq A \subseteq \overline{CH}(A)$ ;
- 4) 若  $A \subseteq B$ , 则  $\underline{CH}(A) \subseteq \underline{CH}(B), \overline{CH}(A) \subseteq \overline{CH}(B)$ .

**证明** 1) 当模糊集  $A$  退化为普通全集  $U$  时, 可知  $x \in U$ , 有  $\mu_U(x) = 1$ . 根据定义 12 可知,  $x \in U$ , 都有  $\mu_U'(x) = 1$ . 再由定义 13 可知,  $\mu_{\underline{CH}(U)}(x) = 1$  且  $\mu_{\overline{CH}(U)}(x) = 1$ . 所以  $\underline{CH}(U) = U, \overline{CH}(U) = U$ .

2) 证明方法同上.

3) 根据定义 12 可知,  $\forall x \in U, \mu_A(x) \leq \mu_{A'}(x)$  或  $\mu_A(x) > \mu_{A'}(x)$ . 当  $\mu_A(x) \leq \mu_{A'}(x)$  时, 根据定义 13 可知,  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) = \mu_A(x)$  且  $\mu_{\overline{CH}(A)}(x) = \mu_{A'}(x)$ , 即  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_{\overline{CH}(A)}(x)$ ; 当  $\mu_A(x) > \mu_{A'}(x)$  时, 由定义 13 可知,  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) = \mu_{A'}(x)$  且  $\mu_{\overline{CH}(A)}(x) = \mu_A(x)$ , 即  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_{\overline{CH}(A)}(x)$ . 因此,  $\underline{CH}(A) \subseteq A \subseteq \overline{CH}(A)$ .

4) 因为  $A \subseteq B$ , 所以  $\forall x \in U, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ . 根据定义 12 可知,  $\mu_{A'}(x) \leq \mu_{B'}(x)$ . 当  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) = \mu_A(x), \mu_{\overline{CH}(A)}(x) = \mu_{A'}(x)$  时, 如果  $\mu_{\underline{CH}(B)}(x) = \mu_B(x), \mu_{\overline{CH}(B)}(x) = \mu_{B'}(x)$ , 则  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) \leq \mu_{\underline{CH}(B)}(x)$  且  $\mu_{\overline{CH}(A)}(x) \leq \mu_{\overline{CH}(B)}(x)$ ; 若  $\mu_{\underline{CH}(B)}(x) = \mu_{B'}(x), \mu_{\overline{CH}(B)}(x) = \mu_B(x)$ , 因为  $\mu_{A'}(x) \leq \mu_{B'}(x)$ , 所以  $\mu_A(x) \leq \mu_{B'}(x), \mu_{A'}(x) \leq \mu_B(x)$ , 即  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) \leq \mu_{\underline{CH}(B)}(x)$  且  $\mu_{\overline{CH}(A)}(x) \leq \mu_{\overline{CH}(B)}(x)$ . 反之亦然, 即: 当  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) = \mu_{A'}(x), \mu_{\overline{CH}(A)}(x) = \mu_A(x)$  时, 有  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) \leq \mu_{\underline{CH}(B)}(x)$  且  $\mu_{\overline{CH}(A)}(x) \leq \mu_{\overline{CH}(B)}(x)$ . 所以  $\underline{CH}(A) \subseteq \underline{CH}(B), \overline{CH}(A) \subseteq \overline{CH}(B)$ .  $\square$

## 5 第 4 种覆盖粗糙模糊集的退化

覆盖粗糙集是经典粗糙集的一种推广, 当覆盖退化为划分时, 覆盖粗糙集也随之退化为经典粗糙集. 那么覆盖粗糙模糊集在一定条件下是否也能退化为经典粗糙集呢? 下面研究这个问题.

### 5.1 第 4 种覆盖粗糙模糊集的核与支集

根据第 4 种覆盖粗糙模糊集的定义, 对于任意一个给定的模糊集, 可以求出它的一对上、下近似模糊集. 其中任一元素在其上近似模糊集中的隶属度反映了这个元素从属于该模糊集的最大可能性程度. 若该隶属度大于 0, 则说明它一定有可能属于给定的模糊集; 若等于 0, 则说明它一定没有可能属于给定的模糊集. 同理, 一个元素在其下近似模糊集中的隶属度反映了它从属于该模糊集的最小可能性程度. 若该隶属度等于 1, 则说明它一定是确定属于给定的模糊集; 若小于 1, 则说明它不一定是确定属于给定的模糊集. 元素上、下近似隶属度的这种特性与其上近似模糊集的支集和下近似模糊集的核所表现出的意义是相同的.

由核与支集的定义, 可以求得第 4 种覆盖粗糙模糊集中上、下近似模糊集的支集与核. 在定义 13 中, 不妨令  $\overline{CH}_0(A)$  表示上近似模糊集的支集,  $\underline{CH}_1(A)$  表示下近似模糊集的核. 由支集的定义可知, 支集中的所有元素在其对应模糊集中的隶属度都大于 0, 即它们都一定有可能属于给定的模糊集, 换言之, 它们可能属于给定模糊集的程度为 1. 在这里可以将“可能属于给定模糊集”作为一个模糊集的描述来理解. 相应地, 核中的所有元素在其对应模糊集中的隶属度都等于 1, 也就是说它们都一定确定属于给定的模糊集, 即它们确定属于给定模糊集的程度为 1. 在这里可以将“确定属于给定模糊集”作为一个模糊集的描述来理解. 因此,  $\overline{CH}_0(A)$  是由那些一定有可能属于给定模糊集的元素组成的集合, 而  $\underline{CH}_1(A)$  则是由那些一定是确定属于给定模糊集的元素组成的集合.

### 5.2 第 4 种覆盖粗糙模糊集退化为经典粗糙集

本节将研究第 4 种覆盖粗糙模糊集与定义 1 中的经典粗糙集之间的关系. 上一小节详细分析和阐述了第 4 种覆盖粗糙模糊集模型中上近似模糊集的支集与下近似模糊集的核的特征, 据此可提出下面的命题.

**命题 3** 设  $U$  是一个论域,  $C$  是论域  $U$  上的一个覆盖,  $A \in F(U)$ . 如果  $C$  为论域  $U$  的一个划分且  $A$  是一个普通集合, 则  $\underline{R}(A_0) = \underline{CH}_1(A)$ ,  $\overline{R}(A_0) = \overline{CH}_0(A)$ .

**证明** 1)  $\underline{R}(A_0) = \underline{CH}_1(A)$ . 因为  $C$  是论域  $U$  的划分, 所以  $\forall x \in U$ ,  $Md(x) = [x]_R$ , 其中  $[x]_R$  表示  $x$  的等价类. 因为  $A$  是普通集合, 所以  $\forall x \in A_0$ ,  $\mu_A(x) = 1$ . 若  $[x]_R \subseteq A_0$ , 则由定义 12 可知,  $\forall y \in [x]_R$ ,  $\mu_A'(y) = 1$ , 所以  $y \in \underline{CH}_1(A)$ ; 若  $[x]_R \not\subseteq A_0$ , 则由定义 1 可知,  $\exists y \in [x]_R$ , 使得  $\mu_A'(y) < 1$ , 所以  $y \notin \underline{CH}_1(A)$ . 再

由定义 1 可知, 若  $[x]_R \subseteq A_0$ , 则  $[x]_R \subseteq \underline{R}(A_0)$ . 因此,  $\underline{R}(A_0) = \underline{CH}_1(A)$ .

2)  $\overline{R}(A_0) = \overline{CH}_0(A)$ . 若  $[x]_R \cap A_0 \neq \emptyset$ , 则  $\forall y \in [x]_R$ ,  $\mu_A'(y) > 0$ , 此时,  $\forall z \in [x]_R \cap A_0$ ,  $\mu_{\overline{CH}(A)}(z) = 1$ , 所以  $z \in \overline{CH}_0(A)$ ; 而  $\forall w \in [x]_R - A_0$ , 因为  $A$  是普通集合,  $\mu_A(w) = 0$ , 故  $w \notin \overline{CH}_0(A)$ . 若  $[x]_R \cap A_0 = \emptyset$ , 则  $\forall y \in [x]_R$ ,  $\mu_A'(y) = 0$ , 此时  $y \notin \overline{CH}_0(A)$ . 再由定义 1 可知, 若  $[x]_R \cap A_0 \neq \emptyset$ , 则  $[x]_R \subseteq \overline{R}(A_0)$ . 因此,  $\overline{R}(A_0) = \overline{CH}_0(A)$ .  $\square$

**推论 1** 若  $C$  为论域  $U$  的一个划分且  $A$  是一个普通集合, 则  $\underline{CH}_1(A)$  等于  $C$  中若干个覆盖元的并.

证明可由命题 3 直接推导得出.

**推论 2** 若  $C$  为论域  $U$  的一个划分且  $A$  是一个普通集合, 则  $\overline{CH}_0(A)$  等于  $C$  中若干个覆盖元的并.

证明可由命题 3 直接推导得出.

## 6 4 种覆盖粗糙模糊集模型的比较

### 6.1 理论比较

从前面例 2 中可以发现, 第 4 种覆盖粗糙模糊集模型与第 2 种和第 3 种模型不存在隶属度大小的单调性, 它们在不同的情况下会有不同的比较结果. 因此, 这里只对第 1 种和第 4 种模型进行比较分析.

**命题 4** 设  $C$  是论域  $U$  上的一个覆盖,  $A \in F(U)$ , 则  $\underline{CF}(A) \subseteq \underline{CH}(A) \subseteq A \subseteq \overline{CH}(A) \subseteq \overline{CF}(A)$ .

**证明**  $\forall x \in U$ , 令  $m = \inf\{A(y) | y \in Md(x)\}$ ,  $M = \sup\{A(y) | y \in Md(x)\}$ . 则  $\mu_{\underline{CF}(A)}(x) = m$ ,  $\mu_{\overline{CF}(A)}(x) = M$ . 由定义 12 可知,  $m \leq \mu_A'(x) \leq M$ . 又因为  $m \leq \mu_A(x) \leq M$ , 如果  $\mu_A'(x) \leq \mu_A(x)$ , 则由定义 13 可知,  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) = \mu_A'(x) \geq m$ ,  $\mu_{\overline{CH}(A)}(x) = \mu_A(x) \leq M$ , 从而有  $\underline{CF}(A) \subseteq \underline{CH}(A) \subseteq A$ ; 如果  $\mu_A'(x) \geq \mu_A(x)$ , 则根据定义 13 可知,  $\mu_{\underline{CH}(A)}(x) = \mu_A(x) \geq m$ ,  $\mu_{\overline{CH}(A)}(x) = \mu_A'(x) \leq M$ , 从而有  $A \subseteq \overline{CH}(A) \subseteq \overline{CF}(A)$ . 综上所述, 可得  $\underline{CF}(A) \subseteq \underline{CH}(A) \subseteq A \subseteq \overline{CH}(A) \subseteq \overline{CF}(A)$ .  $\square$

Hu 等<sup>[25]</sup> 对前 3 种模型做了比较, 得到  $\underline{CF}(A) \subseteq \underline{CT}(A) \subseteq \underline{CS}(A) \subseteq A \subseteq \overline{CS}(A) \subseteq \overline{CT}(A) \subseteq \overline{CF}(A)$ . 但在讨论这 3 种模型的等价问题时, Hu 等<sup>[25]</sup> 提出了下述定理:

**定理 2<sup>[25]</sup>** 设  $(U, C)$  为覆盖近似空间, 前 3 种覆盖粗糙模糊集模型等价当且仅当覆盖  $C$  是一元的.

定理 2 中提到的一元覆盖是指:  $\forall x \in U$ ,  $|Md(x)| = 1$ , 即论域中任一元素的最小描述只含有一个集合.

下面通过例子来说明这个定理是不正确的.

**例 3** 设论域  $U = \{a, b, c, d\}$ ,  $C = \{\{a, b, c\}$ ,

$\{b, c, d\}$  是  $U$  上的一个覆盖, 模糊集

$$A = \left\{ \frac{0.6}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.3}{d} \right\},$$

则根据前 3 种模型求得的覆盖粗糙模糊集分别如下:

$$\underline{CF}(A) = \left\{ \frac{0.1}{a}, \frac{0.1}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.1}{d} \right\},$$

$$\overline{CF}(A) = \left\{ \frac{0.9}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.9}{c}, \frac{0.9}{d} \right\};$$

$$\underline{CS}(A) = \left\{ \frac{0.1}{a}, \frac{0.1}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.1}{d} \right\},$$

$$\overline{CS}(A) = \left\{ \frac{0.9}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.9}{c}, \frac{0.9}{d} \right\};$$

$$\underline{CT}(A) = \left\{ \frac{0.1}{a}, \frac{0.1}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.1}{d} \right\},$$

$$\overline{CT}(A) = \left\{ \frac{0.9}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.9}{c}, \frac{0.9}{d} \right\}.$$

由此可见, 虽然  $Md(b) = Md(c) = 2$ , 即  $C$  不是一元的覆盖, 但 3 种模型得到的下近似模糊集和上近似模糊集分别都相等. 这表明, 定理 2 的结论是不正确的. 为此, 给出下面的定理:

**定理 3** 设  $C$  是论域  $U$  上的一个覆盖,  $A \in F(U)$ . 则前 3 种覆盖粗糙模糊集模型等价当且仅当  $\forall x \in U, \inf\{A(y)|y \in \cup Md(x)\} = \inf\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}$  且  $\sup\{A(y)|y \in \cup Md(x)\} = \sup\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}$ .

**证明** 充分性. 因为前 3 种模型是等价的, 即  $\underline{CF}(A) = \underline{CT}(A) = \underline{CS}(A), \overline{CF}(A) = \overline{CT}(A) = \overline{CS}(A)$ , 所以根据定义 9~定义 11 可知,  $\inf\{A(y)|y \in \cup Md(x)\} = \inf\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}$ , 且  $\sup\{A(y)|y \in \cup Md(x)\} = \sup\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}$ .

必要性. 由文献 [25] 中的定理 1 可知,  $\underline{CF}(A) \subseteq \underline{CT}(A) \subseteq \underline{CS}(A) \subseteq A \subseteq \overline{CS}(A) \subseteq \overline{CT}(A) \subseteq \overline{CF}(A)$ . 因为  $\inf\{A(y)|y \in \cup Md(x)\} = \inf\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}$ , 由定义 9~定义 11 可知,  $\underline{CF}(A) = \underline{CT}(A) = \underline{CS}(A)$ . 同理, 因为  $\sup\{A(y)|y \in \cup Md(x)\} = \sup\{A(y)|y \in \cap Md(x)\}$ , 所以  $\overline{CF}(A) = \overline{CT}(A) = \overline{CS}(A)$ .  $\square$

### 6.2 统计实验结果分析比较

由于第 4 种覆盖粗糙模糊集模型与第 2 种和第 3 种模型在理论上无法直接进行单调性的比较, 本节将利用 UCI 中的 Adult, Mammographic Masses 和 Iris 三个数据库来对这 4 种模型进行统计结果分析比较.

#### 1) Adult 数据库.

Adult 数据库共有 32 561 条数据记录. 根据数据表中的年龄 (见表 1)、学历 (见表 2) 和性别 3 个属性得到 48 个覆盖元; 然后根据学历、资本利得、资本损失以及周工作时数 4 个属性估算出每个人的月平均收入, 其中小时薪水可参见表 3; 进而给定一个隶属度函数, 即

$$\mu_A(x) = x \text{ 的个人月收入} / 4167.$$

其中:  $x$  表示数据表中任一对象, 其月收入由其月 (4 周) 工作小时数乘以相应的小时薪水, 再加上月平均资本收入所得组成; 分母 4 167 为年收入为 5 万美元的最低月收入数;  $A$  表示“年薪不少于 5 万美元”的模糊集.

表 1 年龄段分布表

年龄/岁	年龄段			
	少年	青年	中年	老年
最小值	15	21	36	54
最大值	22	38	55	100

表 2 教育等级表

受教育年数	受教育等级					
	一级	二级	三级	四级	五级	六级
最少	0	3	7	9	13	14
最大	4	7	10	12	14	16

表 3 小时薪水表

受教育年数	$\geq 16$	15	14	13	11-12	$\leq 10$
小时薪水/美元	13	11	10	8.5	7	6

利用 4 种覆盖粗糙模糊集模型分别求得它们关于  $A$  的上、下近似模糊集; 进而采用 Hamming 贴近度计算每个模型的上、下近似模糊集与  $A$  之间的贴近度, 并对这些贴近度进行比较分析.

比较结果见图 1 和图 2. 其中: 图 1 反映了 4 种模型关于  $A$  的上、下近似模糊集与  $A$  之间的贴近度比较结果, 可以看出第 4 种模型关于  $A$  的上、下近似模糊集与  $A$  之间的贴近度均大于其他 3 种模型, 分别为 0.7522 和 0.9790; 图 2 反映了 4 种模型关于  $A$  的上、下近似模糊集与  $A$  的贴近度平均值的比较结果, 可以看出第 4 种模型关于  $A$  的上、下近似模糊集

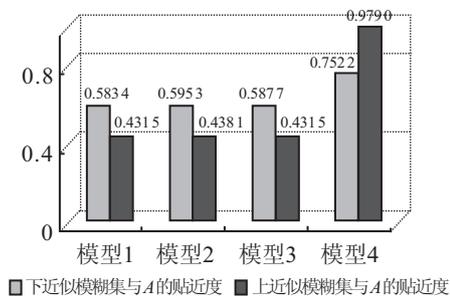


图 1 各模型上、下近似模糊集与  $A$  的贴近度比较

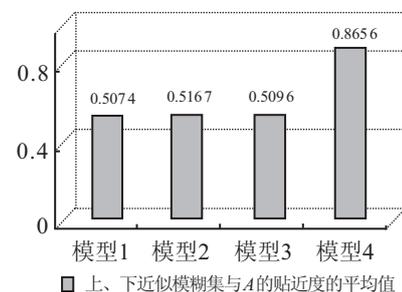


图 2 各模型上、下近似模糊集与  $A$  的平均贴近度比较

与  $A$  之间的平均贴近度最大, 为 0.865 6. 由此可见, 第 4 种覆盖粗糙模糊集与  $A$  的接近程度最高.

2) Mammographic Masses 数据库.

Mammographic Masses 数据库中有 961 条数据记录, 将其中 131 条含有缺省值的数据记录去除, 用剩下的 830 条记录进行实验.

按照表 4 中 Age 属性的年龄段的设置以及数据库中 Shape 属性的不同取值, 将所有数据记录分配到 20 个覆盖元中. 依据表 4 中的年龄分段以及 Shape, Margin 和 Density 中各属性值对数据进行分类, 再分别求出各类数据中决策属性值为 1 的记录个数, 并统计它们在各类中所占的比例. 在此基础上, 给属性 Age, Shape, Margin, Density 设定权重值分别为 0.4, 0.3, 0.2 和 0.1. 从而得到一个反映所有数据对象决策属性值为 1 的可能性的模糊集  $B$ , 即

$$B(x) = 0.4 \text{Age}(x) + 0.3 \text{Shape}(x) + 0.2 \text{Margin}(x) + 0.1, \text{Density}(x).$$

表 4 年龄段分布表

年龄/岁	年龄段				苍老
	青年	中年	中老年	老年	
最小值	18	30	45	60	75
最大值	35	50	65	80	100

利用 4 种覆盖粗糙模糊集模型分别求得它们关于  $B$  的上、下近似模糊集; 进而采用 Hamming 贴近度计算每个模型的上、下近似模糊集与  $B$  之间的贴近度, 并对这些贴近度进行比较分析, 具体结果如图 3 和图 4 所示.

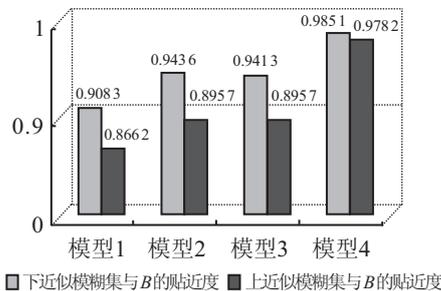


图 3 各模型上、下近似模糊集与  $B$  的贴近度比较

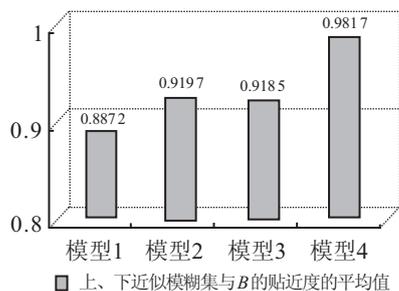


图 4 各模型上、下近似模糊集与  $B$  的平均贴近度比较

从图 3 和图 4 中可以看出, 利用第 4 种模型求的关于  $B$  的上、下近似模糊集与  $B$  的贴近度均高于其

他 3 种模型, 并且第 4 种模型的上、下近似平均贴近度也高于其他 3 种模型的平均贴近度.

3) Iris 数据库.

Iris 数据库中共有 150 条数据记录. 将数据库中的 Sepal-length 属性和 Petal-length 属性按照表 5 和表 6 中的设定, 得到 10 个覆盖元(理论上 12 个, 实际只有 10 个). 然后根据表 5~表 8 中所设定的属性值的区间对所有数据进行分类, 统计出各类数据中决策属性为 Iris-setosa 的记录个数以及其在对应类中所占的比例. 在此基础上, 给属性 Sepal-length, Sepal-width, Petal-length 和 Petal-width 设定权重值分别为 0.2, 0.2, 0.5 和 0.1. 从而得到一个反映所有数据对象为 Iris-setosa 的可能性大小的模糊集  $C$ , 即

$$C(x) = 0.2 \text{Sepal-length}(x) + 0.3 \text{Sepal-width}(x) + 0.2 \text{Petal-length}(x) + 0.1 \text{Petal-width}(x).$$

表 5 Sepal-length 区间表

	Sepal-length			
	区间 1	区间 2	区间 3	区间 4
最小值	4	4.5	5.5	6.5
最大值	5	6	7	8

表 6 Petal-length 区间表

	Petal-length		
	区间 1	区间 2	区间 3
最小值	1	3	5
最大值	3.5	6	7

表 7 Sepal-width 区间表

	Sepal-width	
	区间 1	区间 2
最小值	2	3
最大值	3.5	4.5

表 8 Petal-width 区间表

	Petal-width	
	区间 1	区间 2
最小值	0	1.25
最大值	1.75	2.5

根据 4 种模型的定义分别得到它们关于  $C$  的上、下近似模糊集. 采用 Hamming 贴近度计算每个模型的上、下近似模糊集与  $C$  之间的贴近度, 对这些贴近度进行比较分析, 所得结果如图 5 和图 6 所示. 从图 5 和图 6 可以看出, 利用第 4 种模型求的关于  $C$  的上、下近似模糊集与  $C$  的贴近度均高于其他 3 种模型, 并且第 4 种模型的上、下近似平均贴近度也高于其他 3 种模型的平均贴近度.

上述 3 组实验结果均表明, 第 4 种覆盖粗糙模糊集模型所得出的关于给定模糊集的上、下近似模糊

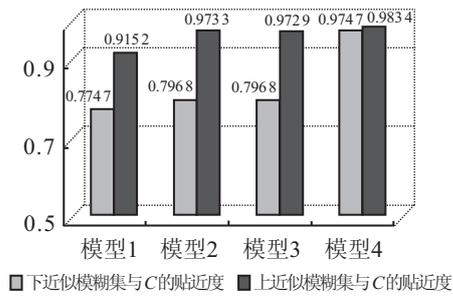


图 5 各模型上、下近似模糊集与 C 的贴程度比较

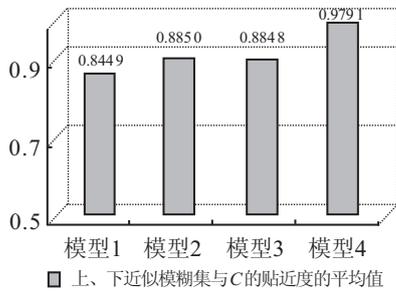


图 6 各模型上、下近似模糊集与 C 的平均贴程度比较

集, 相对于前 3 种同类模型得到的上、下近似模糊集而言, 与给定模糊集之间具有更高的 Hamming 贴程度. 同样的情况也出现在它们与给定模糊集的平均贴程度的比较结果中.

## 7 结 论

本文通过深入分析已有 3 种覆盖粗糙模糊集模型所存在的问题, 提出了模糊覆盖粗糙隶属度, 并在此基础上建立了一种新的覆盖粗糙模糊集模型. 该模型在建模时, 充分考虑了元素与其最小描述之间的关系, 以及其在给定模糊集中的隶属度. 因此, 它在对给定模糊集进行粗糙描述时, 比其他 3 种此类模型表现得更为全面. 统计实验结果表明, 由该模型求得的关于给定模糊集 A 的上、下近似模糊集与 A 之间的贴程度均大于其他 3 种模型. 此外, 利用模糊集支集与核的特点, 本文研究了第 4 种覆盖粗糙模糊集模型的退化问题. 最后, 从理论和统计实验两个方面, 对 4 种模型进行了比较分析, 所得结果表明, 第 4 种覆盖粗糙模糊集与给定模糊集的贴程度均高于其他 3 种同类模型; 同时, 本文还发现并纠正了 Hu 等<sup>[25]</sup>提出的关于前 3 种模型等价的定理中的错误.

## 参考文献(References)

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.  
 [2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, (8): 338-353.  
 [3] 刘清, 黄兆华, 刘少辉, 等. 带 Rough 算子的决策规则及数据挖掘中的软计算[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(7): 33-37.

(Liu Q, Huang Z H, Liu S H, et al. Decision rules with rough operator and soft computing of data mining[J]. J of Computer Research and Development, 1999, 36(7): 33-37.)  
 [4] 王珏, 王任, 苗夺谦, 等. 基于 Rough Set 理论的“数据浓缩”[J]. 计算机学报, 1998, 21(5): 393-400.  
 (Wang J, Wang R, Miao D Q, et al. Data enriching based on rough set theory[J]. Chinese J of Computers, 1998, 21(5): 393-400.)  
 [5] Chen D G, Wang C Z, Hu Q H. A new approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems with covering rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(17): 3500-3518.  
 [6] Qian Y H, Liang J Y, Pedrycz W, et al. Positive approximation: An accelerator for attribute reduction in rough set theory[J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(9/10): 597-618.  
 [7] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. Int J of General Systems, 1990, 17(2/3): 191-209.  
 [8] 李凡, 刘启和, 杨国纬. 变精度模糊粗糙集的一种定义[J]. 控制与决策, 2008, 23(11): 1206-1210.  
 (Li F, Liu Q H, Yang G W. Definition of variable precision fuzzy rough sets[J]. Control and Decision, 2008, 23(11): 1206-1210.)  
 [9] 徐小来, 雷英杰, 谭巧英. 基于直觉模糊三角模的直觉模糊粗糙集[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 900-904.  
 (Xu X L, Lei Y J, Tan Q Y. Intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy triangle norm[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 900-904.)  
 [10] 路艳丽, 雷英杰, 华继学. 基于直觉模糊粗糙集的属性约简[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 335-341.  
 (Lu Y L, Lei Y J, Hua J X. Attribute reduction based on intuitionistic fuzzy rough set[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 335-341.)  
 [11] Bonikowski Z, Bryniarski E, Wybraniec-Skardowska U. Extensions and intensions in the rough set theory[J]. Information sciences, 1998, 107(1/2/3/4): 149-167.  
 [12] 祝峰, 何华灿. 粗集的公理化[J]. 计算机学报, 2000, 23(3): 330-333.  
 (Zhu W, He H C. The axiomatization of the rough set[J]. Chinese J of Computers, 2000, 23(3): 330-333.)  
 [13] Zhu W, Wang F Y. A new type of covering rough set[C]. The 3rd Int IEEE Conf on Intelligent Systems. London: IEEE Inc, 2006: 444-449.  
 [14] Zhu W. Generalized rough sets based on relations[J]. Information Sciences, 2007, 177(22): 4997-5011.  
 [15] Zhu W, Wang F Y. On three types of covering rough sets[J]. IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering, 2007, 19(8): 1131-1144.

- [16] Qing K Y, Gao Y, Pei Z. On covering rough sets[C]. The 2nd Int Conf on Rough Sets and Knowledge Technology. Toronto: Springer Verlag, 2007: 34-41.
- [17] Zhu W, Wang F Y. Topological properties in covering-based rough sets[C]. The 4th Int Conf on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Haikou: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2007: 289-293.
- [18] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 210-225.
- [19] Wang S P, Zhu P Y, Zhu W. Structure of covering-based rough sets[J]. Int J of Mathematical and Computer Sciences, 2010, 6(3): 147-150.
- [20] Wang S P, Zhu W, Zhu P Y. Poset approaches to covering-based rough sets[C]. Rough Set and Knowledge Technology. Beijing, 2010: 25-29.
- [21] Yang T, Li Q G. Reduction about approximation spaces of covering generalized rough sets[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2010, 51(3): 335-345.
- [22] Zhu W, Wang F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 152: 217-230.
- [23] 魏莱, 苗夺谦, 徐菲菲, 等. 基于覆盖的粗糙模糊集模型研究[J]. 计算机研究与发展, 2006, 43(10): 1719-1723.  
(Wei L, Miao D Q, Xu F F, et al. Research on a covering rough fuzzy set model[J]. J of Computer Research and Development, 2006, 43(10): 1719-1723.)
- [24] 徐忠印, 廖家奇. 基于覆盖的模糊粗糙集模型[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(3): 141-144.  
(Xu Z Y, Liao J Q. On the covering fuzzy rough sets model[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(3): 141-144.)
- [25] Hu J, Wang G Y, Zhang Q H. Covering based generalized rough fuzzy set model[J]. J of Software, 2010, 21(5): 968-977.
- [26] 徐伟华, 张文修. 覆盖广义粗糙集的模糊性[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(6): 115-121.  
(Xu W H, Zhang W X. Fuzziness of covering generalized rough sets[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(6): 115-121.)
- [27] Feng T, Mi J S, Wu W Z. Covering-based generalized rough fuzzy sets[C]. The 1st Int Conf on Rough Sets and Knowledge Technology. Chongqing: Springer Verlag, 2006: 208-215.
- [28] 张植明, 白云超, 田景峰. 基于覆盖的直觉模糊粗糙集[J]. 控制与决策, 2010, 25(9): 1369-1373.  
(Zhang Z M, Bai Y C, Tian J F. Intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy coverings[J]. Control and Decision, 2010, 25(9): 1369-1373.)
- [29] Deng T Q, Chen Y M, Xu W L, et al. A novel approach to fuzzy rough sets based on a fuzzy covering[J]. Information Sciences, 2007, 177(11): 2308-2326.
- [30] Zhu W. A class of covering-based fuzzy rough sets[C]. The 4th Int Conf on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Haikou: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2007: 7-11.
- [31] Zhang A Q, Ha M H, Fan Y J. Variable precision fuzzy rough set model based on fuzzy covering[C]. The 3rd Int Conf on Innovative Computing Information and Control. Dalian: Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer Society, 2008: 399-403.
- [32] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991: 1-79.
- [33] 李安贵, 张志宏, 孟艳, 等. 模糊数学及其应用[M]. 第2版. 北京: 冶金工业出版社, 2005: 1-48.  
(Li A G, Zhang Z H, Meng Y, et al. The fuzzy mathematics and its applications[M]. The 2nd ed. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2005: 1-48.)

(上接第1652页)

- [8] 王安国. 现代天文导航及其关键技术[J]. 电子学报, 2007, 35(12): 2347-2353.  
(Wang A G. Modern celestial navigation and the key techniques[J]. Chinese J of Electronics, 2007, 35(12): 2347-2353.)
- [9] 房建成. 天文导航原理及应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006: 1-9.  
(Fang J C. Theory and application of celestial navigation[M]. Beijing: Beihang University Press, 2006: 1-9.)
- [10] 柳明, 刘雨, 苏宝库. 改进的UKF在惯导平台误差模型辨识中的应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 129-136.  
(Liu M, Liu Y, Su B K. Application of improved UKF in error model identification of inertial navigation platform[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 129-136.)
- [11] Crassidis J L, Landis M F. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation[C]. AIAA Guidance Navigation and Control Conf. Austin, 2003: 11-14.