文章编号: 1001-0920 (2012) 11-1694-05

基于直觉模糊熵的直觉语言多准则决策方法

王坚强, 王 佩
(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 针对现有直觉模糊熵方法中存在的一些问题, 提出一种新的直觉模糊熵, 并将其与现有的几种直觉模糊熵计算结果进行比较. 针对准则权重信息不完全且准则值为直觉语言数的多准则决策问题, 通过建立基于模糊熵的决策模型来求解准则的最优权系数, 并利用直觉语言加权算数平均算子 (IL-WAA) 求出方案的综合准则值, 进而由直觉语言数的记分函数确定方案的排序. 最后, 通过算例分析验证了该方法的有效性和合理性.

关键词: 多准则决策；直觉模糊熵；信息不完全；直觉语言数
中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Intuitionistic linguistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on intuitionistic fuzzy entropy

WANG Jian-qiang, *WANG Pei*
(School of Business，Central South University，Changsha 410083，China．Correspondent：WANG Jian-qiang, E-mail：jqwang@126.com)

Abstract: With respect to the limitations existed in methods for calculating entropy of intuitionistic fuzzy sets, a new entropy for intuitionistic fuzzy sets is proposed and the result of this entropy is compared with other existing entropies. For the intuitionistic linguistic fuzzy multi-criteria decision-making problem, in which the information on the weights of criteria are incomplete, a linear fuzzy programming model based on intuitionistic fuzzy entropy is constructed to obtain the criteria weights. Then, intuitionistic linguistic weighted arithmetic averaging operator is used to aggregate the intuitionistic linguistic fuzzy information corresponding to each alternative, and the alternatives are ranked by the score function. Finally, an illustrative example is given to verify the effectiveness and rationality of the developed approach.

Key words: multi-criteria decision making；intuitionistic fuzzy entropy；incomplete information；intuitionistic linguistic

1 引 言

1986 年, Atanassov[1]对 Zadeh 的模糊集进行了拓展, 提出了直觉模糊集的概念. 直觉模糊集是 Zedeh 的模糊集理论最有影响的扩展和发展, 它是在模糊集理论中“亦此亦彼”的模糊概念的基础上增加一个新的参数——非隶属函数, 进而可以描述“非此非彼”的模糊概念[2]. Atanassov[1]和 De 等[3]对直觉模糊集的基本运算规则进行了定义. 有关直觉模糊集的相关概念已有大量的研究[4-5].

直觉模糊集的一个重要概念是直觉模糊熵. 直觉模糊熵是用来刻画直觉模糊集的不确定程度和未知程度, 它最先由 Burillo 等[6]引入模糊集理论中. 后来 Szimidt 等[7]给出了直觉模糊熵的计算公式, 并考虑了犹豫度的影响. 随后很多学者对直觉模糊熵进行了研究[8-12]. 文献 [8] 探讨了区间模糊集的相似度与模糊熵的相关关系. 文献 [9] 定义了 Vague 集的一种新的模糊熵, 使计算结果更合理. 文献 [10] 利用三角函数定义了一个直觉模糊熵公式, 但未考虑犹豫度, 存在一定的缺陷. 文献 [11] 和 [12] 建立了基于直觉模糊熵的规划模型以求解最优准则权系数, 从而得到方案的综合值并进行排序.

直觉模糊集只能粗略地表示准则隶属或非隶属于某一特定模糊概念的程度, 而直觉语言集[13]作为直觉模糊集和语言评价集[14]的扩展, 能准确描述准则隶属或非隶属于语言评价集的程度, 有效克服了直觉模糊集所存在的缺陷. 直觉语言多准则问题在现实生活

收稿日期: 2011-07-12；**修回日期:** 2011-09-29.
基金项目: 国家自然科学基金项目(71271218)；国家自然科学基金创新群体项目(70921001)；教育部人文社会科学研究项目(11YJA630031).
作者简介: 王坚强(1963−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、风险管理与控制、物流管理等研究；王佩(1988−), 女, 硕士生, 从事决策理论与应用、信息系统的研究.

中大量存在, 但目前对此进行研究的文献较少.

本文针对现有模糊熵存在的缺陷, 定义了基于三角函数的直觉模糊熵, 并对方案的模糊熵建立了规划模型以求解最优准则权系数, 最后利用记分函数对方案进行了排序. 该方法为准则权重信息不完全且准则值为直觉语言数的多准则决策问题提供了新的思路.

2 预备知识

定义 1[1]　设 X 为给定论域, 称直觉模糊集为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\},$$

记作 IFS(X). 其中: $\mu_A(x):X\to[0,1]$, $\nu_A(x):X\to[0,1]$ 分别表示 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度, 且满足条件 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1, x\in X$. 此外, 称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 为 X 属于 A 的犹豫度. 为方便起见, 将直觉模糊数简记为 $(\mu_A(x),\nu_A(x))$.

直觉模糊集 A 的补集可表示为 A^C, 即

$$A^C=\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle|x\in X\}.$$

定义 2[14]　设 $H=\{h_0,h_1,\cdots,h_{2t}\}$ 为一组自然语言评价等级, 并且 H 具有以下性质:

1) 有序性. 当 $i>j$ 时, 有 $h_i>h_j$.

2) 可逆性. 存在一个逆算子, 当 $i+j=2t$ 时, 有 $h_i=\mathrm{neg}(h_j)$.

3) 极值运算. 当 $i>j$ 时, 极大值 $\max(h_i,h_j)=h_i$, 极小值 $\min(h_i,h_j)=h_j$.

定义 3[13]　设 $h_{\theta(x)}\in H$, X 为给定论域, 则 $A=\{\langle x,[h_{\theta(x)},(\mu_A(x),\nu_A(x))]\rangle|x\in X\}$ 为直觉语言集, $\mu_A(x):X\to[0,1]$, $\nu_A(x):X\to[0,1]$ 分别表示 x 隶属于和非隶属于语言评价值 $h_{\theta(x)}$ 的程度, 且 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1, x\in X$. X 中元素 x 属于 $h_{\theta(x)}$ 的犹豫程度用 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 表示. 此外, 当语言评价集只有单个语言值时, 直觉语言集将退化为直觉模糊集; 当 $\mu_A(x)=1,\nu_A(x)=0$ 时, 直觉语言集将退化为语言评价集.

在 X 中, x 属于语言评价值 $h_{\theta(x)}$ 的隶属度和非隶属所组成的有序对 $\langle h_{\theta(x)},\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$ 称为直觉语言数.

设两个直觉语言数 $\alpha=\langle h_{\theta(\alpha)},\mu(\alpha),\nu(\alpha)\rangle$, $\beta=\langle h_{\theta(\beta)},\mu(\beta),\nu(\beta)\rangle$, 则有[13]:

1) $$\alpha+\beta=\Big\langle h_{\theta(\alpha)+\theta(\beta)},\ \frac{\theta(\alpha)\mu(\alpha)+\theta(\beta)\mu(\beta)}{\theta(\alpha)+\theta(\beta)},\ \frac{\theta(\alpha)\nu(\alpha)+\theta(\beta)\nu(\beta)}{\theta(\alpha)+\theta(\beta)}\Big\rangle;$$

2) $\lambda\alpha=\langle h_{\lambda\theta(\alpha)},\mu(\alpha),\nu(\alpha)\rangle$, $\lambda\geqslant 0$.

定义 4[13]　设 $\alpha=\langle h_{\theta(\alpha)},\mu(\alpha),\nu(\alpha)\rangle$ 为直觉语言数, 称 $E(\alpha)=h_{\theta(\alpha)}\cdot(\mu(\alpha)+1-\nu(\alpha))/2$ 为 α 的折衷期望值, 称 $S(\alpha)=I(E(\alpha))\cdot(\mu(\alpha)\text{-}\nu(\alpha))$ 为 α 的记分函数. 其中 $I(h_x)=x$ 表示取下标函数.

设两个直觉语言数 $\alpha=\langle h_{\theta(\alpha)},\mu(\alpha),\nu(\alpha)\rangle$, $\beta=\langle h_{\theta(\beta)},\mu(\beta),\nu(\beta)\rangle$, 则存在如下关系:

1) 若 $S(\alpha)>S(\beta)$, 则 $\alpha>\beta$;

2) 若 $S(\alpha)<S(\beta)$, 则 $\alpha<\beta$.

定义 5[13]　设 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉语言数, 而

$$\mathrm{IL-WAA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^n w_j\alpha_j \tag{1}$$

为直觉语言数的算术加权平均算子 (IL − WAA). 其中 w_j 是 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重, 且满足 $w_j\in[0,1]$ 和 $\sum_{j=1}^n w_j=1$.

定理 1　设 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉语言数, 则由定义 5 得到的结果仍为直觉语言数, 且

$$\mathrm{IL-WAA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\Big\langle\sum_{j=1}^n w_jh_{\theta(\alpha_j)},\ \frac{\sum_{j=1}^n w_j\theta(\alpha_j)\mu_{\alpha_j}}{\sum_{j=1}^n w_j\theta(\alpha_j)},\ \frac{\sum_{j=1}^n w_j\theta(\alpha_j)\nu_{\alpha_j}}{\sum_{j=1}^n w_j\theta(\alpha_j)}\Big\rangle.$$

其中 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量, 且 $w_j\in[0,1]$ 和 $\sum_{j=1}^n w_j=1$.

3 现有直觉模糊熵存在的问题

定义 6[7]　称函数 $E:\mathrm{IFS}(X)\to[0,1]$ 为直觉模糊熵, 如果它满足下列准则:

1) $E(A)=0$, 当且仅当 A 是经典集;

2) $E(A)=1$, 当且仅当 $\forall x\in X$, 有 $\mu_A(x)=\nu_A(x)$;

3) $E(A)=E(A^C)$, $\forall x\in\mathrm{IFS}(X)$;

4) 当 $\mu_A(x)\leqslant\nu_A(x)$ 时, 若 $\mu_B(x)\leqslant\mu_A(x)$, 或当 $\mu_A(x)\geqslant\nu_A(x)$ 时, 有 $\mu_B(x)\geqslant\mu_A(x)$ 且 $\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$, 则都有 $E(B)\leqslant E(A)$.

Burillo 等[6]定义直觉模糊熵为

$$E^1(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(1-\mu_A(x)-\nu_A(x))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\pi_A(x). \tag{2}$$

例 1　设直觉模糊集 $A_1=(0.4,0.4)$, 按式 (2) 的计算方法有 $E^1(A_1)=0.2$. 此结果不合理, 这与定义 6 中的准则 2) 相违背.

Zeng 等[8]定义直觉模糊熵为

$$E^2(A)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x)-\nu_A(x)|. \tag{3}$$

例 2 设直觉模糊集 $A_1=(0.5,0.4)$, $A_2=(0.2,0.1)$, 按式 (3) 的计算方法有 $E^2(A_1)=0.9$, $E^2(A_2)=0.9$, 即 A_1 的模糊性等于 A_2 的模糊性. 此结果不合理, 因为当隶属度与非隶属的偏差相等时, 犹豫度越大, 直觉模糊集的模糊性越大. 因此, A_1 的模糊性应小于 A_2 的模糊性.

范平等[9]定义直觉模糊熵为

$$E^3(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_A(x)+1-|\mu_A^2(x)-\nu_A^2(x)|}{\pi_A(x)+1+|\mu_A^2(x)-\nu_A^2(x)|}. \tag{4}$$

例 3 设直觉模糊集 $A_1=(0.3,0.6)$, $A_2=(0.2,0.6)$, 按式 (4) 的计算方法有 $E^3(A_1)=0.548$, $E^3(A_2)=0.579$, 即 A_1 的模糊性小于 A_2 的模糊性. 此结果不合理, 因为直觉模糊集的隶属度与非隶属越接近, 该直觉模糊集的模糊程度越高. 显然, A_1 的模糊性应大于 A_2 的模糊性.

Ye[10]定义直觉模糊熵为

$$E^4(A)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[\sin\frac{1+\mu_A(x)-\nu_A(x)}{4}\pi+\sin\frac{1-\mu_A(x)+\nu_A(x)}{4}\pi\Big]. \tag{5}$$

例 4 设直觉模糊集 $A_1=(0.5,0.1)$, $A_2=(0.6,0.2)$, 按式 (5) 的计算方法有 $E^4(A_1)=0.833$, $E^4(A_2)=0.833$, 即 A_1 的模糊性等于 A_2 的模糊性. 此结果不合理, 因为当直觉模糊集的隶属度与非隶属的偏差相等时, 该直觉模糊集的犹豫度越大, 其模糊程度越高. 显然, A_1 的模糊性应大于 A_2 的模糊性.

4 一种新的直觉模糊熵

定义 7 对于任意的直觉模糊集 $A\in \mathrm{IFS}(X)$, 称其直觉模糊熵为

$$E^5(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cot\Big(\frac{1}{4}\pi+\frac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{4(1+\pi_A(x))}\pi\Big). \tag{6}$$

定理 2 $E^5(A)$ 满足熵的 4 条准则.

证明 因为 $0\leqslant\mu_A(x),\nu_A(x),\pi_A(x)\leqslant 1$, 所以有不等式 $0\leqslant|\mu_A(x)-\nu_A(x)|\leqslant 1$ 成立, 从而有 $0\leqslant\dfrac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{4(1+\pi_A(x))}\pi\leqslant\dfrac{1}{4}\pi$, 因此 $0\leqslant E^5(A)\leqslant 1$.

以下是 4 条准则的证明.

1) 若 $E^5(A)=0$, 则

$$\frac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{4(1+\pi_A(x))}\pi=\frac{1}{4}\pi,$$

可得 $|\mu_A(x)-\nu_A(x)|=1+\pi_A(x)$, 即 $\pi_A(x)=0$, $\mu_A(x)=1,\nu_A(x)=0$ 或 $\pi_A(x)=0$, $\mu_A(x)=0,\nu_A(x)=1$. 可知 A 为经典集. 若 A 为经典集, 则显然有 $E^5(A)=0$.

2) 若 $E^5(A)=1$, 则

$$\frac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{4(1+\pi_A(x))}\pi=0,$$

可得 $|\mu_A(x)-\nu_A(x)|=0$, 即 $\mu_A(x)=\nu_A(x)$; 若 $\mu_A(x)=\nu_A(x)$, 则显然有 $E^5(A)=1$.

3) 准则 3) 显然.

4) 正切函数在 $\Big[\dfrac{1}{4}\pi,\dfrac{1}{2}\pi\Big]$ 区间上单调递减, 要证 $E^5(B)\leqslant E^5(A)$ 成立, 只需证明不等式

$$\frac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{4(1+\pi_A(x))}\leqslant\frac{|\mu_B(x)-\nu_B(x)|}{4(1+\pi_B(x))}$$

成立. 根据已知条件, 有 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$, 即可证明

$$\frac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{2-\mu_A(x)-\nu_A(x)}\leqslant\frac{|\mu_B(x)-\nu_B(x)|}{2-\mu_A(x)-\nu_A(x)}$$

成立.

当 $\mu_A(x)\leqslant\nu_A(x)$ 时, 根据已知条件, 有 $\mu_B(x)\leqslant\mu_A(x)$ 且 $\nu_A(x)\leqslant\nu_B(x)$, 则只需证明

$$\frac{\nu_A(x)-\mu_A(x)}{2-\mu_A(x)-\nu_A(x)}\leqslant\frac{\nu_B(x)-\mu_B(x)}{2-\mu_A(x)-\nu_A(x)}$$

成立, 即证

$$\mu_A(x)(1-\nu_B(x))+\nu_A(x)(\mu_B(x)-1)+\nu_B(x)-\mu_B(x)\geqslant 0$$

成立. 由 $\nu_A(x)\leqslant\nu_B(x)$ 且 $\mu_B(x)-1\leqslant 0$, 有不等式 $\nu_A(x)(\mu_B(x)-1)\geqslant\nu_B(x)(\mu_B(x)-1)$ 成立. 又根据已知条件 $\mu_B(x)\leqslant\mu_A(x)$ 且 $1-\nu_B(x)\geqslant 0$, 得到 $\mu_A(x)(1-\nu_B(x))\geqslant\mu_B(x)(1-\nu_B(x))$ 成立. 整理可得 $\mu_A(x)(1-\nu_B(x))+\nu_A(x)(\mu_B(x)-1)+\nu_B(x)-\mu_B(x)\geqslant 0$, 因此 $E^5(B)\leqslant E^5(A)$.

当 $\mu_A(x)\geqslant\nu_A(x)$ 时, 根据已知条件, 有 $\mu_B(x)\geqslant\mu_A(x),\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$, 则只需证明

$$\frac{\mu_A(x)-\nu_A(x)}{2-\mu_A(x)-\nu_A(x)}\leqslant\frac{\mu_B(x)-\nu_B(x)}{2-\mu_A(x)-\nu_A(x)}$$

成立, 即证

$$\mu_A(x)(1-\nu_B(x))+\nu_A(x)(1-\mu_B(x))+\mu_B(x)-\nu_B(x)\geqslant 0$$

成立. 由 $\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$ 且 $\mu_B(x)-1\leqslant 0$, 有 $\nu_B(x)\times(\mu_B(x)-1)\geqslant\nu_A(x)(\mu_B(x)-1)$, 又根据已知条件 $\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$ 且 $\mu_B(x)-1\leqslant 0$, 所以有 $\mu_B(x)(1-\nu_B(x))\geqslant\mu_A(x)(1-\nu_B(x))$ 成立. 化简可得

$$\mu_A(x)(1-\nu_B(x))+\nu_A(x)(\mu_B(x)-1)+\nu_B(x)-\mu_B(x)\geqslant 0,$$

因此 $E^5(B)\leqslant E^5(A)$. □

本文提出的计算公式比式 (2) ∼ (5) 更为合理, 其主要表现如下:

1) 式 (6) 中的运算考虑了隶属度、非隶属度的影响, 能克服式 (2) 中运算存在的不合理情形. 针对例 1,

利用式 (6) 中的运算可得 $E^5(A_1)=1$, 这个结果是合理的.

2) 式 (3) 中未考虑犹豫度对模糊熵的影响, 这是不合理的. 针对例 2, 利用式 (6) 中的运算可得 $E^5(A_1)=0.867$, $E^5(A_2)=0.912$, 这个结果是合理的. 因为当隶属度与非隶属的偏差相等时, 犹豫度越大, 直觉模糊集的模糊性越大.

3) 针对例 3, 利用式 (6) 中的运算可得 $E^5(A_1)=0.623$, $E^5(A_2)=0.577$, A_1 的模糊性大于 A_2 的模糊性, 此结果合理. 因为直觉模糊集的隶属度与非隶属越接近, 该直觉模糊集的模糊程度越高.

4) 针对例 4, 利用式 (6) 中的运算可得 $E^5(A_1)=0.628$, $E^5(A_2)=0.577$, 这个结果是合理的. 因为当隶属度与非隶属的偏差相等时, 犹豫度越大, 直觉模糊集的模糊性越大.

5 基于直觉模糊熵的直觉语言决策方法

对于某个直觉模糊多准则决策问题, 设有 n 个方案 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, m 个决策准则 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$, 其对应权重向量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$, $w_j\in[0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{m}w_j=1$, W 信息不完全, 且 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}\in\delta$. 方案 x_i 在准则 c_j 下的值为直觉语言数, 表示为 $x_{ij}=\langle h_{\theta(x_{ij})},\mu(x_{ij}),\nu(x_{ij})\rangle$, 其中 $\mu(x_{ij})$ 和 $\nu(x_{ij})$ 分别表示方案 x_i 在准则 c_j 下隶属于和非隶属于语言评价值 $h_{\theta(x_{ij})}$ 的程度. 设决策者是风险中立的, 试确定方案的排序.

上述问题的决策步骤如下.

Step 1 规范化处理.

对于多准则决策问题, 最常见的准则类型有效益型和成本型. 对于效益型准则无需处理, 而对于成本型准则需要采用如下公式进行转化:

$$H_{\theta(x_{ij})}=\mathrm{neg}(h_{\theta(x_{ij})})=h_{2t-\theta(x_{ij})}. \tag{7}$$

为方便起见, 经转化处理后, 方案 x_i 在准则 c_j 下的值仍记为 $h_{\theta(x_{ij})}$.

Step 2 建立规划模型, 求解准则权重.

方案 x_i 在准则 c_j 下的值组成直觉模糊集合, 其模糊熵越小, 表明决策信息量越多, 即方案越优. 因此建立如下模型:

$$E(x_i)=\sum_{j=1}^{m}w_j\cot\Big(\frac{1}{4}\pi+\frac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{4(1+\pi_A(x))}\pi\Big),$$
$$\text{s.t. } (w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}\in\delta. \tag{8}$$

由于各方案是公平竞争的, 每一个方案的模糊熵应来自于同一组准则权系数, 必须对所有方案进行综合, 可得

$$\min\ E(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}w_j\cot\Big(\frac{1}{4}\pi+\frac{|\mu_A(x)-\nu_A(x)|}{4(1+\pi_A(x))}\pi\Big),$$
$$\text{s.t. } (w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}\in\delta.$$

求解线性规划模型, 得到最优解.

Step 3 集结方案准则值.

利用 IL − WAA 算子对方案 x_i 的准则值进行集结, 其结果仍为直觉语言数 z_i.

Step 4 对方案进行排序.

计算并比较各准则综合值的记分函数值的大小, 并对方案进行排序.

6 实例分析

决策者要对不同类型汽车的性能进行评价. 选取 5 个准则: 刹车效果、操作的简便程度、耗油量、舒适性和动力质量, 分别记为 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_5\}$. 决策者给出准则权系数的不完全确定信息为: $0.10\leqslant w_1\leqslant0.15$, $0.10\leqslant w_2\leqslant0.30$, $0.05\leqslant w_3\leqslant0.20$, $0.08\leqslant w_4\leqslant0.18$, $0.10\leqslant w_5\leqslant0.30$. 现有 5 种不同类型的汽车 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_5\}$, 各类型汽车的准则信息如表 1 所示. 试对 5 种汽车性能进行排序.

表 1 方案的准则值

X	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	$\langle h_2,0.7,0.3\rangle$	$\langle h_4,1,0\rangle$	$\langle h_1,0.6,0.4\rangle$	$\langle h_4,0.9,0.1\rangle$	$\langle h_5,0.8,0.2\rangle$
x_2	$\langle h_3,0.7,0.3\rangle$	$\langle h_5,0.6,0.3\rangle$	$\langle h_5,0.7,0.1\rangle$	$\langle h_3,0.8,0.1\rangle$	$\langle h_3,0.5,0.5\rangle$
x_3	$\langle h_4,0.6,0.2\rangle$	$\langle h_1,0.9,0\rangle$	$\langle h_3,0.5,0.5\rangle$	$\langle h_2,0.6,0.3\rangle$	$\langle h_4,0.9,0\rangle$
x_4	$\langle h_4,0.7,0.2\rangle$	$\langle h_5,0.8,0.2\rangle$	$\langle h_6,0.9,0.1\rangle$	$\langle h_2,0.5,0.5\rangle$	$\langle h_4,0.7,0.3\rangle$
x_5	$\langle h_2,0.8,0.2\rangle$	$\langle h_4,0.9,0.1\rangle$	$\langle h_5,1,0\rangle$	$\langle h_3,0.5,0.5\rangle$	$\langle h_5,0.6,0.3\rangle$

Step 1 规范化处理.

耗油量为成本型准则, 根据式 (7) 对其进行处理, 得 $H_{\theta(x_{13})}=h_2$, $H_{\theta(x_{23})}=h_5$, $H_{\theta(x_{33})}=h_3$, $H_{\theta(x_{43})}=h_4$, $H_{\theta(x_{53})}=h_2$.

为方便起见, 经转化处理后, 方案 x_i 在准则 c_j 下的值仍记为 $h_{\theta(x_{ij})}$.

Step 2 建立模型, 求解准则权重.

利用式 (6) 计算决策矩阵中各方案准则值的直觉模糊熵, 如表 2 所示.

表 2　方案准则值的模糊熵

X	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	0.51	0	0.727	0.158	0.325
x_2	0.51	0.643	0.141	0.294	1
x_3	0.577	0.144	1	0.643	0.144
x_4	0.457	0.325	0.158	1	0.51
x_5	0.325	0.158	0	1	0.643

于是可建立如下模型:

$$\min\ E(x) = 1.72w_1 + 2.861w_2 + 2.508w_3 + 2.45w_4 + 2.126w_5;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 0.10 \leqslant w_1 \leqslant 0.15,\\ 0.10 \leqslant w_2 \leqslant 0.30,\\ 0.05 \leqslant w_3 \leqslant 0.20,\\ 0.08 \leqslant w_4 \leqslant 0.18,\\ 0.10 \leqslant w_5 \leqslant 0.30,\\ \sum\limits_{j=1}^{5} w_j = 1. \end{cases}$$

对模型进行求解, 最优准则权重系数为 $W = (0.15, 0.17, 0.20, 0.18, 0.30)$.

Step 3　集结方案准则值.

利用式 (1) 集成方案的准则值, 得到方案的综合直觉语言模糊值 z_i 为

$z_1 = \langle h_{1.79}, 0.708, 0.232\rangle$; $z_2 = \langle h_{3.81}, 0.837, 0.122\rangle$;

$z_3 = \langle h_{3.46}, 0.827, 0.132\rangle$; $z_4 = \langle h_{2.06}, 0.649, 0.309\rangle$;

$z_5 = \langle h_{2.62}, 0.675, 0.276\rangle$.

Step 4　计算 z_i 的记分函数值为

$s(z_1) = 0.629,\ s(z_2) = 2.336,\ s(z_3) = 2.038,$

$s(z_4) = 0.469,\ s(z_5) = 0.731.$

排序结果为 $x_2 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4$. 因此 x_2 类型的汽车性能最佳.

7　结　论

针对直觉模糊熵计算方法存在的缺陷, 本文提出了一种基于余切函数的直觉模糊熵. 通过与已有的直觉模糊熵进行分析比较, 表明了本文所提出的直觉模糊熵更为合理. 最后, 利用本文方法解决了准则权重不完全、准则值为直觉语言数的多准则决策问题, 丰富和发展了直觉语言模糊集理论. 该方法可应用于供应商选择、工厂选址等实际决策问题.

参考文献(References)

[1] Atanassov K. Intutionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] 王坚强. 模糊多准则决策方法综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 601-606.
(Wang J Q. Overview on fuzzy multi-criteria decision-making approach[J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 601-606.)

[3] De S K, Biswas R, Roy A R. Some operations on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(3): 477-484.

[4] Chen S M, Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on Vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.

[5] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.

[6] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 2001, 118(3): 305-316.

[7] Szmidt E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2001, 118(3): 467-477.

[8] Zeng W Y, Li H Y. Relationship between similarity measure and entropy of interval valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(11): 1477-1484.

[9] 范平, 梁家荣, 李天志. Vague 集的新模糊熵[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(13): 179-181.
(Fan P, Liang J R, Li T Z. New fuzzy entropy of Vague sets[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(13): 179-181.)

[10] Jun Ye. Two effective measures of intuitionistic fuzzy entropy[J]. Computing, 2010, 87(1/2): 55-62.

[11] Lin Lin, Yuan Xue-hai, Xia Zun-quan. Multicriteria fuzzy decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[J]. J of Computer and System Sciences, 2007, 73(1): 84-88.

[12] Wu Jian-zhang, Zhang Qiang. Multicriteria decision making method based on intuitionistic fuzzy weighted entropy[J]. Experts Systems with Applications, 2011, 38(1): 916-922.

[13] 王坚强, 李寒波. 基于区间直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1571-1574.
(Wang J Q, Li H B. Multi-criteria decision-making method based on aggregation operators for intuitionstic linguistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571-1574.)

[14] Delgado M, Verdegay J L, Vila M A. Linguistic decision making models[J]. Int J of Intelligent Systems, 1992, 7(5): 479-492.