第 27 卷 第 6 期
Vol. 27 No. 6

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 6 月
Jun. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 06-0801-12

非线性系统确定采样型滤波算法综述

王小旭, 潘 泉, 黄 鹤, 高 昂

(西北工业大学 自动化学院，西安 710072)

摘 要: 确定采样型滤波包括 Unscented 卡尔曼滤波 (UKF), 中心差分卡尔曼滤波 (CDKF) 以及容积卡尔曼滤波 (CKF), 是一类基于确定解析采样近似方法的非线性次优高斯滤波算法, 具有估计精度高、实现简单等优点, 已得到国内外学者的广泛关注. 在阐述确定采样型滤波基本原理的基础上, 详细总结了近年来确定采样型滤波的研究现状, 包括各种改进算法和在不同领域的应用情况; 然后重点分析了确定采样型滤波所存在的问题; 最后展望了其未来发展趋势和研究方向.

关键词: 非线性；确定采样型滤波；最优框架；Unscented 变换；多项式插值；球面径向规则

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Overview of deterministic sampling filtering algorithms for nonlinear system

WANG Xiao-xu, *PAN Quan*, *HUANG He*, *GAO Ang*

(School of Automation，Northwestern Polytechnical University，Xi’an 710072，China. Correspondent：WANG Xiao-xu，E-mail：woyaofly1982@163.com)

Abstract: Deterministic sampling filters, including Unscented Kalman filter(UKF), central difference Kalman filter(CDKF) and cubature Kalman filter(CKF), are a class of nonlinear suboptimal Gaussian filtering algorithms based on deterministic and analytical sampling approximation, which have advantages of high precision and simple implementation, and have been received wide attention from scholars. The basic principle of deterministic sampling filter is described, and its research situation is summarized in detail, including various improved methods and applications in different areas. Then the problems of deterministic sampling filter at present are analyzed and presented. Finally, its development tendency and research orientation are prospected.

Key words: nonlinearity；deterministic sampling filter；optimal framework；Unscented transformation；polynomial interpolation；spherical-radial rule

1 引 言

非线性系统状态的最优估计在目标跟踪、导航、信号处理、工业自动控制、金融、无线通信、化学等领域具有重要的应用. 在贝叶斯框架下, 解决滤波估计问题的最优方案即是基于量测信息 $Z^k = \{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ 构造状态后验概率分布函数 $p(x_k|Z^k)$ 的完整描述. 对于线性高斯系统, 最优滤波即是 Kalman 滤波器[1-2]. 然而对于非线性系统而言, 完整精确描述 $p(x_k|Z^k)$ 需要无尽的参数及大量的运算, 这在实际应用时非常困难. 为此, 人们提出了许多次优的近似方法, 其中最著名的当属扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 及其相关改进算法[3], 如强跟踪滤波器 (STF)[4], 二阶截断 EKF 和迭代 EKF 等. 但 EKF 存在一阶线性化近似精度偏低, 需要计算雅克比矩阵以及要求非线性函数连续可微等自身无法克服的理论局限性, 尤其在系统具有强非线性和高维数时, EKF 滤波精度不佳, 数值稳定性较差.

为了克服 EKF 的缺点, 人们提出了许多具有里程碑意义的经典非线性滤波算法. Ito[5]基于高斯假设和贝叶斯公式, 首次推导了一类非线性离散系统的最优滤波框架, 但因无法求解其中的非线性状态后验分布 (均值和协方差), 该最优框架只停留在理论上而在实际中毫无操作性可言. 对此, Ito 采用数值积分近似计算最优框架中的非线性状态后验分布, 进而得到中

收稿日期: 2011-08-20；**修回日期:** 2011-11-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074179, 61075029, 61135001)；中国博士后科学基金项目(20110491692).

作者简介: 王小旭(1982−), 男, 博士后, 从事非线性估计、组合导航的研究；潘泉(1961−), 男, 教授, 博士生导师, 从事信息融合、信号处理等研究.

心差分滤波器 (CDF); 几乎同时, N∅rqaard[6]基于多项式插值技术来近似最优滤波框架中的非线性状态后验分布, 得到了分开差分滤波器 (DDF). 因基于数值积分近似的 CDF 和基于多项式插值近似的 DDF 本质上都是基于多项式函数拟合的思想来实现, 且它们的滤波递推公式本质上是完全相同的, 故 Merwe[7]统一将其称为中心差分卡尔曼滤波器 (CDKF). 另外, Julier 从"近似非线性函数的概率密度分布比近似非线性函数本身更容易"这一思路出发, 不仅提出了基于 Unscented 变换 (UT) 来逼近最优滤波框架中非线性状态后验分布的滤波方法——Unscented 卡尔曼滤波器 (UKF)[8], 而且相继给出了应用于 UT 变换的采样策略, 包括对称采样, 单形采样, 3 阶矩偏度采样和高斯分布 4 阶矩对称采样等[9]; 同时为了消除采样的非局部效应及保证协方差阵的正定性, 提出了对上述基本采样策略进行比例修正的算法框架[10-11]. 最近, Arasaratnam 等人[12]通过理论分析和仿真验证指出了 UKF 在解决高维数 ($\geqslant 20$) 非线性状态估计问题时滤波性能不佳甚至发散, 为此, 他采用球面径向规则来逼近最优框架中的状态后验分布, 进而提出了容积卡尔曼滤波 (CKF).

由于 UKF, CDKF 和 CKF 所采用的多项式插值拟合思想、球面径向规则及 UT 变换技术在本质上都是基于一组在个数、空间位置分布方式及权值方面确定的加权采样点来逼近非线性状态的后验分布, 且 3 种滤波器的采样都是依据确定的数学解析式来完成的[5,9], 从这个意义上, 它们可以统一称为确定采样型滤波器, 且核心思想可以统一归纳为[13]: 首先对状态先验分布抽取一定数量的确定性样本, 称之为 Sigma 点; 然后通过对这些 Sigma 点经非线性函数直接传递之后的结果进行加权综合, 以逼近非线性状态估计.

理论上已经证明[14-15]: 不管系统非线性程度如何, UT 变换、多项式插值及球面径向规则都能至少以二阶泰勒精度逼近任何非线性系统状态的后验均值和协方差, 由此推断, 确定采样型滤波精度高于 EKF, 特别适用于强非线性系统的状态估计问题; 同时, 确定采样型滤波器无需计算非线性函数的雅可比矩阵, 比 EKF 更容易实现, 且不要求非线性函数必须连续可微, 有效克服了 EKF 的理论局限性. 与粒子滤波 (PF) 相比, 确定采样型滤波器基于确定解析采样方式对非线性系统状态的先验分布进行抽样, PF 则基于随机 Monte Carlo 仿真对先验分布进行采样[16]; 确定采样型滤波器的采样方式是确定的, 而 PF 采样是随机的. 因此确定采样型滤波器的计算量远远小于 PF, 且不会出现 PF 因随机采样而产生的粒子退化和贫化.

鉴于上述优点, 确定采样型滤波已成为近年来非线性估计领域一个非常活跃的研究热点, 得到了国内外学者的广泛关注和研究, 并被广泛应用于不同领域[5]. 尽管如此, 仍需要特别强调的是, 当前已有文献大都集中于确定采样型滤波的应用研究, 而日渐忽略其理论方面的创新, 这并不表示确定采样型估计理论已经成熟, 恰恰相反, 其仍然有很多理论问题有待进一步探讨和研究. 为此, 本文在阐述确定采样型滤波基本原理的基础上, 详细总结了近年来确定采样型滤波的研究现状, 包括各种改进算法和在不同领域的应用情况, 重点分析了确定采样型滤波所存在的问题, 展望了其未来发展趋势和研究重点.

2 确定采样型滤波基本原理

由于高斯分布可以由其前两阶矩 (均值和方差) 完全表述, Ito[5]基于贝叶斯估计理论和高斯假设推导了非线性最优高斯滤波器的统一框架, 在这个统一框架中, 滤波器的量测更新过程与线性 Kalman 滤波完全相同 (因为状态高斯分布下, 基于贝叶斯估计的滤波更新过程与系统模型无关), 所不同的是在线性 Kalman 滤波中状态预测、输出预测、预测协方差及互协方差可以通过线性传递精确地得到其解析解; 在非线性高斯滤波器中, 求解预测及预测协方差需要计算状态经非线性函数传播后的后验分布, 而函数的非线性会导致解析计算状态后验分布难于实现. 为此, 可以采用数值近似方法, 如 UT 变换、多项式插值及球面径向规则等来近似计算非线性状态后验分布, 从而推导出相应的非线性次优高斯滤波器——UKF, CDKF 和 CKF.

2.1 非线性最优高斯滤波统一框架

考虑如下非线性离散系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k, \\ z_k = h_k(x_k) + v_k. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_k \in \boldsymbol{R}^n$ 和 $z_k \in \boldsymbol{R}^m$ 分别为系统状态向量和量测向量; w_k 和 v_k 为相互独立的系统噪声和量测噪声, 且 $w_k \sim N(0, Q_k)$, $v_k \sim N(0, R_k)$; 初始状态 $x_0 \sim N(0, P_0)$ 与 w_k 和 v_k 互不相关.

定理 1 考虑非线性离散随机系统 (1), 令量测 $Z^k = \{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$. 假设后验密度函数

$$p(x_{k+1}|Z^k) = N(x_{k+1}; \hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}), \tag{2}$$

$$p(z_{k+1}|Z^k) = N(z_{k+1}; \hat{z}_{k+1|k}, P^z_{k+1|k}) \tag{3}$$

服从高斯分布. 其中状态一步预测及协方差为

$$\hat{x}_{k+1|k} = \mathrm{E}[x_{k+1}|Z^k] = \mathrm{E}[f_k(x_k)|Z^k], \tag{4}$$

$$P_{k+1|k} = \mathrm{E}[\widetilde{x}_{k+1|k}\widetilde{x}^{\mathrm{T}}_{k+1|k}|Z^k] = \mathrm{E}[\varLambda_k \varLambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k] + Q_k, \tag{5}$$

输出预测及协方差、互协方差为

$$\hat{z}_{k+1|k} = \mathrm{E}[z_{k+1}|Z^k] = \mathrm{E}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k], \tag{6}$$

$$P^z_{k+1|k} = \mathrm{E}[\widetilde{z}_{k+1|k}\widetilde{z}^{\mathrm{T}}_{k+1|k}|Z^k] = \mathrm{E}[\Theta_{k+1}\Theta^{\mathrm{T}}_{k+1}|Z^k] + R_{k+1}, \tag{7}$$

$$P^{xz}_{k+1|k} = \mathrm{E}[\widetilde{x}_{k+1|k}\widetilde{z}^{\mathrm{T}}_{k+1|k}|Z^k] = \mathrm{E}[\widetilde{x}_{k+1|k}\Theta^{\mathrm{T}}_{k+1}|Z^k]. \tag{8}$$

这里 $\Lambda_k = f_k(x_k) - \hat{x}_{k+1|k}$, $\Theta_{k+1} = h_{k+1}(x_{k+1}) - \hat{z}_{k+1|k}$. 因此, 基于贝叶斯公式和最小方差估计准则, 非线性离散系统 (1) 的最优高斯滤波器为

$$p(x_{k+1}|Z^{k+1}) = \frac{p(x_{k+1}, z_{k+1}|Z^k)}{p(z_{k+1}|Z^k)} = N(\hat{x}_{k+1}, P_{k+1}). \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(z_{k+1} - \hat{z}_{k+1|k}), \\ K_{k+1} = P^{xz}_{k+1|k}(P^z_{k+1|k})^{-1}, \\ P_{k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1}P^z_{k+1|k}K^{\mathrm{T}}_{k+1}, \end{cases} \tag{10}$$

式中 K_{k+1} 是滤波增益矩阵.

上述结果的证明参见文献 [8].

定理 1 在假设状态及输出一步预测概率密度服从高斯分布下给出了一种非线性系统的最优高斯滤波框架. 不难看出, 更新方程 (10) 与线性 Kalman 滤波完全相同, 而状态预测及协方差中 $\mathrm{E}[f_k(x_k)|Z^k]$ 和 $\mathrm{E}[\Lambda_k\Lambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k]$ 表示状态估计先验分布 ($\hat{x}_k$ 和 P_k) 经线性状态函数 $f_k(\cdot)$ 传递之后的后验均值和协方差; 同理, 输出预测及协方差中 $\mathrm{E}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]$, $\mathrm{E}[\Theta_{k+1}\Theta^{\mathrm{T}}_{k+1}|Z^k]$ 和 $\mathrm{E}[\widetilde{x}_{k+1|k}\Theta^{\mathrm{T}}_{k+1}|Z^k]$ 表示状态预测先验分布 ($\hat{x}_{k+1|k}$ 和 $P_{k+1|k}$) 经非线性量测函数 $h_{k+1}(\cdot)$ 传递之后的后验均值、自协方差和互协方差. 对于线性系统, 它们可以通过线性传递精确已知, 所得的滤波器即为 Kalman 滤波; 对于非线性系统而言, 解析求解它们是根本无法实现的, 只能通过一些数值算法近似计算, 如一阶线性化, UT 变换, 多项式插值拟合及球面径向规则等, 得到的滤波器即为 EKF, UKF, CDKF 及 CKF 等非线性次优高斯滤波.

2.2 Unscented 卡尔曼滤波器 (UKF)

应用 UT 变换来逼近非线性系统最优高斯滤波框架中的后验均值和协方差, 即可得到 UKF. 具体算法流程如下:

1) UT 变换及采样策略. 所谓 UT 变换即是根据一定的采样策略, 首先对状态先验分布抽取一系列的采样点 $\xi_i^{\mathrm{UKF}}(i = 0, 1, \cdots, L)$, 称其为 Sigma 点, L 为采样点个数, 对应于 ξ_i^{UKF} 的权值为 W_i^m 和 W_i^c, 它们分别为求一阶和二阶统计特性时的权系数; 然后计算 ξ_i^{UKF} 经非线性函数传播后的结果 γ_i^{UKF}; 最后加权求和 γ_i^{UKF} 来近似计算非线性状态后验分布.

在 UT 变换算法中, 最重要的是确定 Sigma 点的采样策略, 即确定 Sigma 点的个数、位置以及相应的权值. 目前已有的 Sigma 采样策略包括对称采样, 单形采样, 3 阶矩偏度采样, 高斯分布 4 阶矩对称采样以及对上述基本采样策略进行比例修正的算法框架. 不同的采样策略区别在于 Sigma 点的个数、位置以及相应的权值.

2) 预测方程. 按照第 1) 步所选择的 Sigma 点采样策略, 对 k 时刻状态估计 $\hat{x}_k$ 和 P_k 抽取一定数目的 Sigma 点 $\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}(i = 0, 1, \cdots, L)$. 以 UT 变换中常用的对称采样策略为例, $\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}$ 可以按下面方式获得:

$$\begin{cases} \xi_{0,k}^{\mathrm{UKF}} = \hat{x}_k, \\ \xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}} = \hat{x}_k + (\sqrt{(n+\kappa)P_k}\,)_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, n. \\ \xi_{i+n,k}^{\mathrm{UKF}} = \hat{x}_k - (\sqrt{(n+\kappa)P_k}\,)_i, \end{cases} \tag{11}$$

显然, 对称采样下 $L = 2n$, 且对应于 $\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}$ 的权值为

$$W_i^m = W_i^c = \begin{cases} \kappa/(n+\kappa), \ i = 0; \\ 1/2(n+\kappa), \ i \neq 0. \end{cases} \tag{12}$$

其中: κ 为比例系数, 用于调节 $\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}$ 与 $\hat{x}_k$ 之间的距离, 仅影响二阶之后的高阶矩带来的偏差; $(\sqrt{(n+\kappa)P_k})_i$ 为 $(n+\kappa)P_k$ 的平方根矩阵的第 i 列. 对于高斯分布, κ 的选取满足 $n + \kappa = 3$ 时可使近似误差控制在 4 阶矩[17]. 当然 $\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}$ 也可由其他采样策略获得, 具体参见文献 [9].

$\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}$ 通过非线性状态函数 $f_k(\cdot)$ 传播为 $\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}$, 则有

$$\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}} = f_k(\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}), \ i = 0, 1, \cdots, L; \tag{13}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[f_k(x_k)|Z^k] \approx \sum_{i=0}^{L} W_i^m \gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}} = \sum_{i=0}^{L} W_i^m f_k(\xi_{i,k}^{\mathrm{UKF}}); \tag{14}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[\Lambda_k\Lambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k] \approx \sum_{i=0}^{L} W_i^c(\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}} - \mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[f_k(x_k)|Z^k])^2. \tag{15}$$

其中 $a^2 = aa^{\mathrm{T}}$. 将式 (13) ∼ (15) 代入 (4) 和 (5), 即可计算出 $k+1$ 时刻状态一步预测 $\hat{x}_{k+1|k}$ 和协方差 $P_{k+1|k}$.

然后, 对 $\hat{x}_{k+1|k}$ 和 $P_{k+1|k}$ 按照第 1) 步所选择的采样策略抽取 Sigma 点 $\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}$, 如果采用式 (11) 所示的对称采样, 则有

$$\begin{cases} \xi_{0,k+1|k}^{\mathrm{UKF}} = \hat{x}_{k+1|k}, \\ \xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}} = \hat{x}_{k+1|k} + (\sqrt{(n+\kappa)P_{k+1|k}}\,)_i, \\ \xi_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{UKF}} = \hat{x}_{k+1|k} - (\sqrt{(n+\kappa)P_{k+1|k}}\,)_i, \end{cases} \tag{16}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$. 对应 $\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}$ 的权值与式 (12) 相同, 其通过非线性量测函数 $h_{k+1}(\cdot)$ 传播为 $\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}$, 因此有

$$\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}=h_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}),\ \ i=0,1,\cdots,L; \tag{17}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]\approx \sum_{i=0}^{L}W_i^m\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}=\sum_{i=0}^{L}W_i^m h_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}); \tag{18}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[\varTheta_{k+1}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]\approx \sum_{i=0}^{L}W_i^c(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}-\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k])^2; \tag{19}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]\approx \sum_{i=0}^{L}W_i^c(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}-\hat{x}_{k+1|k})\times (\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}-\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]). \tag{20}$$

将式 (17) ∼ (20) 代入 (6) ∼ (10), 即可计算出 $k+1$ 时刻输出预测 $\hat{z}_{k+1|k}$ 及协方差 $P_{k+1|k}^z$ 和 $P_{k+1|k}^{xz}$.

3) 在获得新的量测 z_{k+1} 后, 利用第 2) 步的计算结果按照式 (10) 进行滤波更新, 即可计算出 $k+1$ 时刻 UKF 下状态估计和协方差.

2.3 中心差分卡尔曼滤波器 (CDKF)

应用多项式插值拟合技术逼近非线性高斯系统最优滤波框架 (4)∼(10) 中的非线性状态后验均值和协方差, 即可得到 CDKF. 具体算法流程如下:

1) 多项式插值技术在本质上也是通过一组加权 Sigma 采样点来逼近随机变量的先验分布, 并通过这组采样点的非线性变换来捕获随机变量经非线性变换后的统计特性[11]. 与 UT 变换具有多种采样方法不同, 多项式插值技术的采样策略是固定的.

2) 预测方程. 由 k 时刻状态估计 $\hat{x}_k$ 和 P_k 并按下式抽取 Sigma 点 $\xi_{i,k}^{\mathrm{CDKF}}$:

$$\begin{cases}\xi_{0,k}^{\mathrm{CDKF}}=\hat{x}_k,\\ \xi_{i,k}^{\mathrm{CDKF}}=\hat{x}_k+(h\sqrt{P_k})_i,\ \ i=1,2,\cdots,n.\\ \xi_{i+n,k}^{\mathrm{CDKF}}=\hat{x}_k-(h\sqrt{P_k})_i,\end{cases} \tag{21}$$

其中: h 为区间长度, 对于高斯分布, 取 $h^2=3$[15]; $(\sqrt{P_k})_i$ 为 P_k 的平方根矩阵的第 i 列. 设对应于采样点 $\xi_{i,k}^{\mathrm{CDKF}}(i=0,1,\cdots,2n)$ 的权值为

$$\begin{cases}W_0^m=\dfrac{h^2-n}{h^2},W_i^m=\dfrac{1}{2h^2},\\ W_i^{c1}=\dfrac{1}{4h^2},W_i^{c2}=\dfrac{h^2-1}{4h^2},\end{cases}\ i=1,2,\cdots,2n. \tag{22}$$

$\xi_{i,k}^{\mathrm{CDKF}}$ 通过非线性状态函数 $f_k(\cdot)$ 传播为 $\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}$, 则有

$$\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}=f_k(\xi_{i,k}^{\mathrm{CDKF}}),\ i=0,1,\cdots,2n; \tag{23}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[f_k(x_k)|Z^k]\approx \sum_{i=0}^{2n}W_i^m\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}=\sum_{i=0}^{2n}W_i^m f_k(\xi_{i,k}^{\mathrm{CDKF}}); \tag{24}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[\varLambda_k\varLambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k]\approx \sum_{i=1}^{n}W_i^{c1}[(\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\gamma_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}})^2+ W_i^{c2}(\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}+\gamma_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\gamma_{0,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}})^2]. \tag{25}$$

将式 (23)∼(25) 代入 (4) 和 (5), 即可计算出 $k+1$ 时刻状态一步预测 $\hat{x}_{k+1|k}$ 及协方差 $P_{k+1|k}$.

然后, 利用 $\hat{x}_{k+1|k}$ 和 $P_{k+1|k}$ 按式 (21) 构造 Sigma 点 $\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}$, 其通过非线性量测函数 $h_{k+1}(\cdot)$ 传播为 $\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}$, 则有

$$\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}=h_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}),\ i=0,1,\cdots,2n; \tag{26}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]\approx \sum_{i=0}^{2n}W_i^m\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}=\sum_{i=0}^{2n}W_i^m h_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}); \tag{27}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[\varTheta_{k+1}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]\approx \sum_{i=1}^{n}W_i^{c1}[(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\chi_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}})^2+ W_i^{c2}(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}+\chi_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\chi_{0,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}})^2]; \tag{28}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]\approx \sum_{i=1}^{n}W_i^m(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\hat{x}_{k+1|k})(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\chi_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}). \tag{29}$$

将式 (17)∼ (20) 代入 (6)∼ (10), 即可计算出 $k+1$ 时刻输出预测 $\hat{z}_{k+1|k}$ 及协方差 $P_{k+1|k}^z$ 和 $P_{k+1|k}^{xz}$.

3) 在获得新的量测 z_{k+1} 后, 利用第 2) 步的计算结果按照式 (10) 进行滤波更新, 即可计算出 $k+1$ 时刻 CDKF 下状态估计和协方差.

2.4 容积卡尔曼滤波器 (CKF)

根据 $\varLambda_k$ 和 $\varTheta_{k+1}$ 的表达式, 对定理 1 中所涉及的非线性状态后验协方差进行重新整理, 可得

$$\mathrm{E}[\varLambda_k\varLambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k]= \mathrm{E}[f_k(x_k)f_k^{\mathrm{T}}(x_k)|Z^k]-\hat{x}_{k+1|k}\hat{x}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}, \tag{30}$$

$$\mathrm{E}[\varTheta_{k+1}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]= \mathrm{E}[h_{k+1}(x_{k+1})h_{k+1}^{\mathrm{T}}(x_{k+1})|Z^k]-\hat{z}_{k+1|k}\hat{z}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}, \tag{31}$$

$$\mathrm{E}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]= \mathrm{E}[x_{k+1|k}h_{k+1}^{\mathrm{T}}(x_{k+1})|Z^k]-\hat{x}_{k+1|k}\hat{z}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}. \tag{32}$$

将式 (4), (6) 及式 (30)∼(32) 中等式右边第 1 项统一采用如下高斯加权积分形式来表示:

$$I[g]=\int g(x)\omega(x)\mathrm{d}x, \tag{33}$$

其中: x 表示具有统计特性 $(\overline{x}, P_x)$ 的随机变量; $g(\cdot)$ 表示以 x 为自变量的某一非线性函数; $\omega(x)$ 表示高斯密度函数.

应用球面径向规则来逼近定理 1 中的非线性状态后验均值和协方差, 即可得到 CKF. 具体算法流程如下:

1) 球面径向规则本质上是寻找一组加权采样点 (ξ_i, W_i) 来逼近标准高斯加权积分 $I_N[g]$, 即

$$\xi_i = \sqrt{\frac{L}{2}}[1]_i,\ W_i = \frac{1}{L},\ i = 1, 2, \cdots, L; \tag{34}$$

$$I_N[g] = \int g(x)N(x; 0, I)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{L} W_i g(\xi_i). \tag{35}$$

其中 $L = 2n$. 假如 $n = 2$, 则 $[1]_i$ 即表示如下集合:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

为了计算一般的 $I[g]$, 首先对 P_x 进行平方根分解并构造如下采样点 $\xi_i^{\mathrm{CKF}} (i = 1, 2, \cdots, L)$:

$$P_x = S_x S_x^{\mathrm{T}},\ \xi_i^{\mathrm{CKF}} = S_x \xi_i + \overline{x}. \tag{36}$$

然后计算 ξ_i^{CKF} 经非线性函数传递后的结果

$$\gamma_i^{\mathrm{CKF}} = g(\xi_i^{\mathrm{CKF}}). \tag{37}$$

于是

$$I[g] = \int g(x)\omega(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{L} W_i \gamma_i^{\mathrm{CKF}}. \tag{38}$$

2) 预测方程. 滤波开始, $\hat{x}_k$ 和 P_k 已知, 则高斯分布 $p(x_k|Z^k)$ 便已知. 将式 (4) 中 $f_k(x_k)$ 及 (30) 中 $f_k(x_k)f_k^{\mathrm{T}}(x_k)$ 类比于 (33) 中 $g(\cdot)$, 将 $p(x_k|Z^k)$ 类比于 $\omega(x)$, 状态 x_k 类比于变量 x, $(\hat{x}_k, P_k)$ 类比于 $(\overline{x}, P_x)$ 并用式 (36) 构造采样点, 于是 $\mathrm{E}[f_k(x_k)|Z^k]$ 与式 (30) 中 $\mathrm{E}[f_k(x_k)f_k^{\mathrm{T}}(x_k)|Z^k]$ 项可类比于 $I[g]$, 并根据式 (38) 近似计算得到.

根据球面径向规则, 由 k 时刻状态估计 $\hat{x}_k$ 和 P_k 按下式构造 Sigma 点 $\xi_{i,k}^{\mathrm{CKF}} (i = 1, 2, \cdots, L)$:

$$P_k = S_k S_k^{\mathrm{T}},\ \xi_{i,k}^{\mathrm{CKF}} = S_k \xi_i + \hat{x}_k. \tag{39}$$

然后 $\xi_{i,k}^{\mathrm{CKF}}$ 通过非线性状态函数 $f_k(\cdot)$ 传播为 $\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}}$, 则有

$$\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} = f_k(\xi_{i,k}^{\mathrm{CKF}}),\ i = 1, 2, \cdots, L; \tag{40}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CKF}}[f_k(x_k)|Z^k] \approx \sum_{i=1}^{L} W_i \gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} = \sum_{i=1}^{L} W_i f_k(\xi_{i,k}^{\mathrm{CKF}}); \tag{41}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CKF}}[\varLambda_k \varLambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k] \approx \sum_{i=1}^{L} W_i \gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} (\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}})^{\mathrm{T}} - \hat{x}_{k+1|k}\hat{x}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}. \tag{42}$$

将式 (41) 和 (42) 代入 (4) 和 (5), 即可计算出 $k+1$ 时刻状态一步预测 $\hat{x}_{k+1|k}$ 及协方差 $P_{k+1|k}$.

将式 (6) 中的 $h_{k+1}(x_{k+1})$ 及式 (31) 和 (32) 中的 $h_{k+1}(x_{k+1})h_{k+1}^{\mathrm{T}}(x_{k+1})$ 和 $x_{k+1}h_{k+1}^{\mathrm{T}}(x_{k+1})$ 类比于(33) 中 $g(\cdot)$, 将 $p(x_{k+1}|Z^k)$ 类比于 $\omega(x)$, 将 x_{k+1} 类比于 x, 将 $(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k})$ 类比于 $(\overline{x}, P_x)$, 并采用式 (36) 来构造采样点, 于是 $\mathrm{E}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]$ 与式 (31), (32) 中等号右边第 1 项可类比于 $I[g]$, 并根据 (38) 近似计算得到. 已知 $\hat{x}_{k+1|k}$ 和 $P_{k+1|k}$, 按下式构造采样点 $\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}}$ $(i = 1, 2, \cdots, L)$:

$$\begin{aligned} &P_{k+1|k} = S_{k+1|k} S_{k+1|k}^{\mathrm{T}}, \\ &\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} = S_{k+1|k}\xi_i + \hat{x}_{k+1|k}. \end{aligned} \tag{43}$$

其通过非线性量测函数 $h_{k+1}(\cdot)$ 传播为 $\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}}$, 于是

$$\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} = h_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}}),\ i = 1, 2, \cdots, L; \tag{44}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CKF}}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k] \approx \sum_{i=1}^{L} W_i \chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} = \sum_{i=1}^{L} W_i h_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}}); \tag{45}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CKF}}[\varTheta_{k+1}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k] \approx \sum_{i=1}^{L} W_i \chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} (\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}})^{\mathrm{T}} - \hat{z}_{k+1|k}\hat{z}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}; \tag{46}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CKF}}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k] \approx \sum_{i=1}^{L} W_i \xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}} (\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}})^{\mathrm{T}} - \hat{x}_{k+1|k}\hat{z}_{k+1|k}^{\mathrm{T}}. \tag{47}$$

3) 在获得新的量测 z_{k+1} 后按式 (10) 进行滤波更新, 可得 $k+1$ 时刻 CKF 下状态估计和协方差.

3　确定采样型滤波性能分析

1) UKF, CDKF 及 CKF 都是基于一组加权采样点来逼近定理 1 中的非线性状态后验分布, 因此它们都是定理 1 中最优高斯滤波框架下的次优变种. 此外, 从式 (11), (21) 及 (36) 不难看出, 3 种滤波器都是通过确定解析式来实现对状态先验分布的抽样, 采样点空间位置分布方式都是中心对称的, 这即是将 UKF, CDKF 及 CKF 统一称为确定采样型滤波的原因所在. 所不同的只是体现在采样点个数、权值及计算后验分布的表达方式上.

2) 如前所述, 对于高斯分布, 考虑 4 阶矩的统计量, 对称采样中 κ 的最佳选取需满足 $n+\kappa = 3$, 但当系统状态维数大于 3 时, κ 取值为负, 于是 W_0^m 和 W_0^c 均为负, 此时 UKF 中式 (15) 和 (19) 所示的协方差正定性可能无法得到保证, 协方差的非负定性会导致在抽取采样点时无法求取矩阵的平方根, 进而引起滤波发散; 尽管采用比例修正策略可以克服上述缺点, 但需选取 3 个参数 α, β 和 κ[10], 参数之间的相互影响使得 UKF 的灵活性变差, 实际应用时相对困难. 而 CDKF 只需选取一个参数 h 便可完成滤波运算, 比

UKF应用简单, 且只要选取$h^2>1$便可完全保证协方差的正定性. 但UKF的采样策略有多种, 可根据不同应用场合选择相适应的采样策略, 其滤波精度的提升空间和适应性均优于CDKF.

3) UKF仅适用于解决低维($n\leqslant 3$)非线性状态问题. 如上所述, 其在状态维数较高时可能会出现滤波发散, 因为κ的选取需满足$n+\kappa=3$, 状态为高维数时κ取值为负, 可能会引起协方差非负定性. 对式(42)和(46)重新整理, 不难得到

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CKF}}[\varLambda_k\varLambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k]=\sum_{i=1}^{L}W_i(\gamma_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}}-\hat{x}_{k+1|k}),\quad(48)$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CKF}}[\varTheta_{k+1}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]=\sum_{i=1}^{L}W_i(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CKF}}-\hat{z}_{k+1|k}).\quad(49)$$

显然, 由式(34)可以看出, 相比于UKF, CKF在采样及滤波过程中, 无需选择任何参数且无论状态维数高低, 权值W_i始终为正, 从而保证了式(48)及(49)所示的协方差的正定性和滤波器的有效运行, 因此CKF适用于解决从低维到高维的非线性状态估计问题, 具有应用范围广的优点. 特别地, CKF不会出现UKF在估计高维非线性状态过程时因参数κ选择不当所引起的滤波发散, 可以有效克服UKF的上述缺点.

4) 尽管UKF, CDKF及CKF对非线性高斯状态后验分布的近似精度都至少能达到二阶泰勒精度, 但它们都会引入额外的高阶项, 具体参见文献[8, 12, 15]. 由于在UKF和CDKF中这个高阶项会受到参数κ或h不同取值的影响, 一般情况下它们对后验分布的近似是不同的, 只在某些特殊条件下才相等[18], 即有如下定理:

定理 2 如果$n+\kappa=h^2$, 则对称采样下UKF与CDKF的对后验均值及互协方差近似精度相等, 即

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[f_k(x_k)|Z^k]=\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[f_k(x_k)|Z^k],\quad(50)$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]=\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k],\quad(51)$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]=\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k].\quad(52)$$

证明 式(50)与(51)成立是显然的. 注意到$i=0$时, $\xi_{0,k+1|k}-\hat{x}_{k+1|k}=0$; 另外, 当$n+\kappa=h^2$时, $\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}=\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}$, 于是$\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}=\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}$. UKF对称采样下$L=2n$, 从式(20)出发, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]=\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2(n+\kappa)}\Big\{\Big(\sqrt{(n+\kappa)\,P_{k+1|k}}\Big)_i\times\\&\Big(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}-\mathrm{E}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]\Big)^{\mathrm{T}}\Big\}+\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2(n+\kappa)}\Big\{\Big(-\sqrt{(n+\kappa)\,P_{k+1|k}}\Big)_i\times\\&\Big(\chi_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}-\mathrm{E}[h_{k+1}(x_{k+1})|Z^k]\Big)^{\mathrm{T}}\Big\}=\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2h^2}\Big(\sqrt{P_{k+1|k}}\Big)_i\Big(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}-\chi_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{UKF}}\Big)^{\mathrm{T}}=\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2h^2}\Big(\xi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\hat{x}_{k+1|k}\Big)\Big(\chi_{i,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}-\chi_{i+n,k+1|k}^{\mathrm{CDKF}}\Big)^{\mathrm{T}}=\\&\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[\widetilde{x}_{k+1|k}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k].\end{aligned}\quad(53)$$

显然定理成立. □

定理 3 如果$n+\kappa=h^2$且$n=m=1$, 则对称采样下UKF自协方差与CDKF自协方差相等, 即

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[\varLambda_k\varLambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k]=\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[\varLambda_k\varLambda_k^{\mathrm{T}}|Z^k],\quad(54)$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{UKF}}[\varTheta_{k+1}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k]=\mathrm{E}_{\mathrm{CDKF}}[\varTheta_{k+1}\varTheta_{k+1}^{\mathrm{T}}|Z^k].\quad(55)$$

上述结果的证明参见文献[18].

由于CKF无需选择任何参数, 它所产生的高阶项不受参数取值的影响, 无法定量比较CKF, UKF及CDKF对后验分布的近似情况.

5) 通过上述分析可以得到一个非常重要的启发: 由于UKF, CDKF及CKF在进行滤波计算时所依赖的基本框架(即定理1)是完全相同的, 且它们在对基本框架中非线性状态后验分布的采样近似方法上具有相似性, 针对3种滤波器的改进算法一般情况下也均适用于彼此. 关于这一点将会在下面第5节中作一些相关说明.

4 确定采样型滤波与粒子滤波和EKF的比较

1) 事实上, 基于Monte Carlo随机采样的粒子滤波也可以用来解决式(1)所示的非线性估计问题, 其突出特点是不受限于线性和高斯的假设, 从理论上看, 它适用于任意非线性系统的滤波问题. 尽管PF无需对如式(2)和(3)所示的状态后验概率密度函数作任何假设和约束, 且随着采样粒子数的不断增加, 粒子的概率密度函数会逼近状态的真实后验概率密度$p(x_{k+1}|Z^{k+1})$, 但相应的缺点是必须承担比高斯滤波器大数百倍的计算量, 实时性较差; 另外, 实际中采样粒子数不可能无限地增大, 有限的粒子经过若干次迭代后, 粒子滤波必然会出现粒子退化[19], 即粒子丧失多样性的现象, 尽管重采样能克服上述问题, 但随之带来的是“粒子贫化”或“粒子枯竭”的负面作用, 即权值大的粒子在迭代中被多次选取, 而权值小的粒子被逐渐剔除, 从而导致滤波发散.

在高斯假设下所推导的非线性滤波器相比于PF具有如下优势: ① 状态估计本身仅要求计算后验概率的一、二阶矩, 而高斯假设刚好满足这个要求, 既保证了状态估计的信息完整性, 又使得高斯滤波器中状态更新公式(10)是解析的, 易于迭代实时运算; ② 定理1中非线性高斯滤波器运行的关键是如何计算非线性状态的后验均值和协方差, 而所采用的数值计算方法, 如一阶线性化, UT变换, 多项式插值拟合及球面径向规则等, 在对式(4)～(8)中非线性状态后验分布近似过程中, 逼近精度至少可以达到泰勒二阶, 它们不仅采样点个数远少于PF中粒子采样数, 只与状态维数有关, 而且采样点抽取方式确定简单, 不像PF是随机采样, 采样点权值也不像PF是随时间变化的, 其在每次滤波计算中都是固定的, 因此非线性高斯滤波器的计算量远小于PF, 可以有效克服粒子退化及贫化的缺点, 能在估计精度和计算负担上提供有效折中. 记住这样一个实际规则是很有益的: 只有当所有的解析工具都不能满足要求时, 才有必要考虑仿真的方法.

2) 正如引言中所述, 确定采样型滤波不仅估计精度高于EKF, 而且无需计算非线性函数的雅克比矩阵, 其也适用于某些不连续或不可导的非线性函数滤波问题, 大大拓展了EKF的应用范围. 但确定采样型滤波在对状态后验分布近似达到二阶的同时, 也引进了额外的高阶项[8,12,15], 有时适当选取参数(UKF中的κ及CDKF中的h)可以使这些高阶项更加近似于真实后验分布的高阶项; 相反, 不适当的参数选取有可能造成南辕北辙的效果, 使UKF和CDKF的滤波精度大为下降, 滤波性能甚至坏于EKF. 即参数的选取增加了UKF和CDKF的滤波性能不确定性; 而对于EKF而言, 虽然它的近似精度只有一阶, 但没有引进其他额外的高阶项, 不需要选取任何参数, 从这一点来说, 其比UKF和CDKF更容易预测.

5 确定采样型滤波器的研究现状

目前, 关于确定采样型滤波的理论研究主要集中在以下几方面:

1) 克服系统模型的不确定性.

与EKF类似, UKF和CDKF要求精确已知系统模型, 然而受本身以及外部应用环境不确定性因素的影响, 系统通常具有模型不确定性, 包括模型状态简化、瞬时干扰、噪声先验统计特性未知时变、初始状态的建模不准确及模型参数发生变动等, 都会造成滤波器的状态估计精度下降, 甚至引起滤波发散, 即确定采样型滤波器不具有能克服系统模型不确定的鲁棒性. 为解决此问题, 国内外学者进行了深入研究, 取得了许多卓有成效的成果. Seong和Wan[20] 在UKF基础上提出了Σ-点临界卡尔曼有限脉冲(SPRHKF), 其对系统模型不确定性及瞬时干扰误差具有鲁棒性, 有效解决了UKF在未知时变噪声下滤波精度下降甚至发散的问题. 然而SPRHKF相比于UKF收敛性不佳, 为此, Seong等人[21]又设计出一种自适应融合滤波算法, 其利用交互式多模型(IMM)[22]将UKF和SPRHKF两种滤波器有机结合起来, 形成优势互补, 克服了两种滤波器单独工作时的缺点, 但这种算法计算量较大, 实时性较差. Subrahmanya[23]推导了在系统状态方程存在模型误差时CDKF预测协方差的上界, 进而提出一种自适应CDKF算法, 以此来解决CDKF在系统模型不确定时鲁棒性差的问题, 该算法计算量小, 可以在线辨识发生突变的模型参数, 适用于自适应控制、故障诊断等领域, 但缺点是要求量测方程必须是线性的. 文献[24]和[25]根据正交原理[4], 分别提出了基于UT变换的强跟踪UKF和基于多项式插值的强跟踪CDKF, 有效解决了在GPS/INS组合导航系统模型不确定时滤波精度下降甚至发散的问题. LEE等人[26]基于极大似然估计原理对未知的噪声先验协方差进行估计, 提出了一种状态和参数联合估计的自适应UKF, 并将其成功地应用于卫星轨道导航定位中. [27]通过最小化UKF残差协方差之和的方法求取噪声的先验统计特性. [28]利用人工神经网络来辅助UKF, 从而使UKF具有应对噪声变化的鲁棒性. [29]和[30]基于极大后验原理和指数加权设计带常值噪声统计估计器和时变噪声统计估计器的改进UKF, 相比于传统UKF, 该算法不要求精确已知噪声的先验统计, 且具有应对噪声变化的自适应能力. 目前, CKF的研究正处于起步阶段, 针对此方面的相关改进算法尚未出现, 但正如第3节中最后所分析的: [23]中推导自适应CDKF的思路完全可以用来扩展推导自适应UKF和CKF.

2) 滤波收敛性和数值稳定性.

尽管UKF和CDKF的滤波精度高于EKF, 但缺少理论证明来保证其收敛性. 最近, 针对状态函数为非线性而量测函数为线性的随机系统, Xiong等人[31]在借鉴EKF的收敛性证明基础上, 给出了一个UKF误差有界的充分性条件: 当模型的非线性和噪声先验统计特性满足一定条件时UKF误差有界收敛, 并指出噪声协方差矩阵在保证滤波器稳定性方面起着重要作用, 即可以通过增加一个附加的正定矩阵来增强UKF的稳定性. 之后, 武元新等人[32]将上述UKF收敛性的结论推广到CDKF和PF中; 同时, Xiong等人[33]又给出了在状态和量测函数均为非线性时PF, UKF和CDKF的收敛性条件, 这些理论成果的正确性在地球卫星自主定轨实测数据仿真中得到

了验证[34]. 相似地, 因CKF和UKF所依赖的滤波框架是完全相同的, 故上述已获得的收敛性结论也可以被扩展用于判定CKF的稳定性.

Merwe等人[10]将QR分解和Cholesky因子更新引入到滤波器预测更新中, 提出了平方根UKF和平方根CDKF, 并将其用于基于无人机平台的GPS/INS组合导航系统中. 实验表明, 该算法能有效克服因协方差失去正定而引起的滤波器计算发散, 提高了UKF和CDKF的数值稳定性和计算效率. 特别地, 由前面第4节分析可知, UKF在状态高维时因参数选择不当可能会引起自协方差非正定, 此时无法得到协方差的平方根, 因此平方根UKF在系统高维时可能不存在; 而CKF则不存在上述问题, 平方根CKF的存在与否与状态维数无关, 这也是CKF在解决高维状态估计问题时相比于UKF所具有的优势所在. 平方根CKF递推公式参见文献[12].

3) 非线性状态平滑.

通常, 平滑因可以使用更多的量测信息而能够获得比滤波更精确的状态估计, 故平滑估计可以作为一种高精度的数据处理算法来对量测数据进行精确的事后分析. WAN等人[35]将Fraser所提出的线性Kalman平滑器的基本框架[36]推广到非线性随机系统中, 基于UT变换提出了Unscented卡尔曼平滑器(UKS), 并通过一个时间序列仿真问题验证了所提出的UKS比基于线性化的扩展Kalman平滑器的估计精度高. 然而, UKS需要对系统动态模型进行逆运算, 计算复杂且滤波稳定性难以保证. 为此, Simo[37] 在Rauch[38]的研究成果之上, 结合UT变换提出了一种简单实用的非线性离散状态URTSS平滑器, 仿真结果表明, URTSS在保证与UKS具有相同估计精度的同时, 可以克服UKS计算复杂的缺点. 之后, Simo[39]在非线性离散状态URTSS平滑器的研究成果基础上[37], 又提出了一种应用于状态方程为非线性连续系统而量测方程为连续或离散系统的固定滞后URTSS平滑器, 拓展了UT变换的应用范围. 另外, Simandl等人[40]又将Rauch[38]的线性平滑器研究成果推广到非线性状态平滑中, 基于多项式插值提出了中心差分平滑器, 并将其用于非线性模型初始状态的平滑估计.

特别地, 文献[37]所推导的高斯假设下非线性状态最优平滑框架同样适用于推导基于径向球面规则的容积卡尔曼平滑器(CKS), 所不同的是, CKS采用径向球面规则来近似最优平滑框架中的非线性状态后验分布, 而URTSS则采用UT变换来近似.

4) 噪声相关条件下确定采样型滤波器.

传统UKF和CDKF均假设非线性模型中系统噪声和量测噪声互不相关, 但在实际系统中, 受内外部环境变化的影响, 噪声互不相关的条件并不能得到完全满足, 使得传统UKF和CDKF在噪声相关条件下滤波失效. 为此, 文献[41]和[42]基于最小方差估计准则, 在噪声相关条件下分别推导了两种非线性状态的最优滤波框架, 并应用UT变换来近似计算最优滤波框架中非线性状态的后验分布, 进而得到噪声相关条件下UKF滤波递推公式. 同理, 基于多项式差值公式和非线性状态最优滤波框架也可以获得噪声相关条件下CDKF. 同样, 上述文献所涉及的框架也适用于推导噪声相关CKF算法.

5) 其他方面.

Hermoso-Carazo等人[43]推导了非线性离散系统存在量测数据滞后情况下UKF滤波算法, 之后, 他又采用Bernoulli分布或乘性噪声来描述量测数据的不确定性, 基于UT变换提出了在量测数据不确定或缺失情况下非线性系统UKF新算法[44], 数值仿真结果证明了上述两种算法精度均优于传统基于一阶线性化的EKF. Bruno等人[45]提出了一种约束UKF(CUKF)算法, 以此来解决在状态受区间约束情况下[46]非线性系统滤波问题. Saleh等人[47]提出了一种改进的UKF算法, 以解决在系统存在时滞下非线性状态估计问题. 文献[48]将迭代滤波理论与CDKF相结合, 设计了一种迭代CDKF算法, 并将其用于说话人跟踪系统, 减小了系统线性化误差, 提高了跟踪精度. 最近, Arasaratnam等人[19]在非线性离散CKF算法[12]基础上, 进一步提出了应用于状态函数连续而量测函数离散的非线性系统CKF算法.

6 确定采样型滤波器的应用领域

目前确定采样型滤波器已在目标跟踪和导航领域得到了广泛应用, 并不断向化学反应、通信、故障诊断、金融以及图像处理等领域渗透.

1) 目标跟踪.

William等人[49]将UKF用于多目标跟踪, 取得了优于EKF的跟踪精度; Michail等人[50]提出了基于IMM的迭代UKF算法, 并将其用于解决多目标跟踪中的数据关联问题; Jaipal等人[51]针对目标跟踪中量测模型非线性问题, 分析了EKF, UKF, CDKF及PF之间的性能, 为实际应用中如何选择非线性滤波器提供了理论依据; Hu等人[52]将模糊控制统计模型与UKF相结合应用于多目标跟踪; Cui等人[53]将UKF用于地面目标跟踪与定位; Razali等人[54]将URTSS平滑器用于目标方位跟踪问题.

2) 导 航.

Tang等人[55]建立了一主一从两个空间飞行器

六自由度相对运动方程, 并用平方根 UKF 来估计两者的空间姿态和位置; Kim 等人[56]用 UKF 代替 EKF 以解决机器人快速视觉即时定位与地图构建 (SLAM) 导航问题, 克服了 EKF 需计算雅可比矩阵和一阶线性化精度偏低的局限性; Soken 等人[57]提出了一种鲁棒 UKF 算法, 以解决量测故障情况下卫星姿态估计问题; Patrick 等人[58] 用 UKF 来估计无陀螺惯性测量单元中的角速度信息; Ning 等人[59]将状态增广 UKF 用于月球车自主天文导航中, 克服了系统误差和随机误差的影响; Rezare 等人[60]将 CDKF 用于 GPS/INS 组合导航系统, 通过仿真分析得出: CDKF 计算时间和均方误差根均小于 EKF; Lachapelle[61]将 UKF 用于 GPS/INS 组合导航系统的位置及姿态估计.

3) 其他领域.

Murshed 等人[62]将 UKF 用于燃料电池系统的非线性状态估计和控制中; Wang 等人[63]将 UKF 用于生化反应过程监控和最优控制中; Shin 等人[64]将 UKF 应用于 CDMA 系统中, 以处理联合通道系数和时延; Tripathy 等人[65]采用 CDKF 对同步发电机转子角进行估计; Simon 等人[66]将 UKF 用于飞机涡轮风扇发动机故障诊断及健康评估中; Chen 等人[67]采用 UKF 研究了通胀风险估计问题; 文献 [68] 将 UKF 用于机器人图像视觉自主定位中.

目前, UKF 和 CDKF 的研究已相对成熟, 相关文献甚多; 但 CKF 为最近才出现的新方法, 其在理论创新、目标跟踪及导航中应用等相关文献甚少, 国内对此方面的研究也仅处于起步阶段, 相关文献还未出现.

7 确定采样型滤波的研究展望

尽管上述关于确定采样型滤波的文献在克服系统模型不确定、滤波收敛性和数值稳定性、非线性状态平滑、噪声相关条件下确定采样型滤波、量测延时或缺失下确定采样型滤波、导航与目标跟踪应用等方面已取得了一定的理论和实践研究成果, 然而确定采样型滤波还处于不断发展中, 仍有很多问题亟待解决. 从目前国内外的研究状况来看, 以下几个理论问题值得进一步研究:

1) 参数和采样策略自适应选取.

确定采样型滤波器在滤波前需要选定 UKF 中采样策略和相应的参数 (如对称采样中的比例因子 κ 和单形采样中 W_0) 以及 CDKF 中的参数 h, 这些参数和采样策略一旦选定, 在滤波中便不再发生变化. 然而这种没有任何规律和依据可言的参数和采样策略选择势必会导致滤波精度下降甚至发散, 这是因为, 从文献 [14-15] 中不难看出, 采用 UT 变换和多项式插值在对非线性状态后验分布近似达到二阶的同时, 也引进了额外的高阶项, 滤波前适当选取的参数和采样策略可以使这些高阶项更加近似于真实后验分布的高阶项, 但不适当的参数和采样策略的选取有可能造成南辕北辙的效果, 使 UKF 和 CDKF 的滤波精度大为下降, 甚至发散, 即参数和采样策略的选取与确定采样型滤波的性能息息相关.

尽管基于确定采样型滤波来自适应估计系统模型参数的研究成果已有报道[23], 但目前鲜有文献研究在 UKF 和 CDKF 滤波过程中对采样参数及采样策略进行自适应选取, 因此, 有必要开展采样参数和采样策略自适应选取的研究工作, 即探讨参数和各种采样策略对滤波性能的影响规律, 在滤波过程中通过各种智能算法 (如神经网络、支持向量积及遗传算法等) 或最优化某些性能指标来对 UKF 和 CDKF 中的采样参数进行在线训练, 通过自适应选择这些滤波参数和采样策略, 使得 UT 变换和多项式插值后的高阶项更加接近真实状态后验分布的高阶项, 从而进一步增强和提高确定采样型滤波估计精度和稳定性.

尽管上述分析中已经指出 UKF 参数 κ 需满足 $n + \kappa = 3$, 似乎无需再进行 κ 自适应选取, 但这个条件只是在保证 4 阶矩近似误差最小情况下所获得的, 并不能保证 UT 变换对高于 4 阶矩的近似误差最小. 本文所指的参数 κ 自适应选取是指在每一次滤波计算中参数 κ 的取值都能保证所有 4 阶矩以上近似误差都能最小. 同样的情况存在于 CDKF 中参数的选取.

2) 复杂系统确定采样型估计理论研究.

复杂系统是一类具有非线性、模型不确定、状态时滞、量测数据滞后或缺失、噪声非高斯等复杂特性的系统. 尽管已有针对上述单个复杂特征的确定采样型改进算法出现, 如克服模型不确定的自适应 CDKF[23], 带量测数据滞后或缺失的 UKF 等[43-44], 但在实际中这些复杂特征经常是共存的且相互耦合. 如在化工系统中, 化学反应过程一般都是非线性的, 化学反应和化合物的传递会导致状态时滞、环境及温度的变化使得系统中的不确定性因素增多; 在网络控制系统和无线传感器网络中, 通信网络的不可靠性或故障会导致观测数据丢失, 元器件的老化、灵敏度差及信息传递的延迟等使得系统普遍存在着滞后现象; 统计知识的缺乏会导致所建立的系统模型存在不确定性. 然而, 传统确定采样型滤波无法解决特征共存或相互耦合的复杂系统状态估计问题. 到目前为止, 针对此方面问题的解决方案, 国内外相关文献报道甚少, 因此, 采用确定采样型滤波方法研究复杂系统估计问题极具理论价值和现实意义.

3) 简单实用的稳定性分析方法研究.

虽然关于确定采样型滤波的稳定性分析已有相关文献报道[31-34], 但该充分性条件过于保守, 方法比较复杂且限制因素过多, 不具有通用性, 缺乏可操作性, 几乎不可能在工程上得到应用. 因此, 有必要进一步开展关于确定采样型滤波收敛性分析的研究, 给出简单实用的收敛性条件, 从而可以更有效地对滤波性能进行评价.

4) 非线性状态后验分布近似方法研究.

对于式 (1) 所示的非线性离散随机系统, 状态的最优滤波估计可以用定理 1 来统一描述, 采用 UT 变换、多项式插值技术及径向球面规则对状态后验分布近似得到 UKF, CDKF 和 CKF. 确定采样型滤波的成功应用给人们这样的启发: 利用目前已知的高等数学及概率论知识来对非线性状态的后验分布进行近似, 可以创新得到一些对状态后验分布近似精度更高、计算更为简单的非线性次优滤波算法.

8 结 论

近年来确定采样型滤波算法在国外发展很快, 并取得了许多理论研究和应用成果, 各种改进算法层出不穷, 针对许多领域的应用研究方兴未艾; 而国内相关研究尽管早已起步, 但已有文献大多都集中于确定采样型滤波的应用研究, 而日渐忽略其理论方面的创新. 若能对上述问题进行深入研究, 必将促进确定采样型算法理论和应用的发展, 进而在非线性系统的数据分析和处理领域紧跟世界发展趋势.

参考文献(References)

[1] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction theory[J]. Trans on ASME J of Basic Engineering, 1960, 82(D): 35-46.

[2] Kalman R E, Bucy R S. New results in linear filtering and prediction theory[J]. Trans on ASME J of Basic Engineering, 1961, 83(D): 95-108.

[3] Jazwinski A H. Stochastic processes and filtering theory[M]. New York: Academic, 1970: 235-237.

[4] Zhou D H, Xi Y G, Zhang Z J. A suboptimal multiple extended Kalman filter[J]. Chinese J of Automation, 1992, 4(2): 145-152.

[5] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.

[6] N∅rgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.

[7] Merwe R V, Wan E A. Sigma-point Kalman filters for integrated navigation[C]. Proc of the 60th Annual Meeting of the Institute of Navigation. Dayton: Institute of Navigation, 2004: 641-654.

[8] Julier S J, Uhlmann J K. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.

[9] 潘泉, 杨峰, 叶亮, 等. 一类非线性滤波器——UKF综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(5): 481-489.
(Pan Q, Yang F, Ye L, et al. Survey of a kind of nonlinear filters — UKF[J]. Control and Decision, 2005, 20(5): 481-489.)

[10] Julier S J. The scaled unscented transformation[C]. Proc of American Control Conf. Anchorage: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2002: 4555-4559.

[11] Merwe R V. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[EB/OL]. (2004-04-01). http://www.cslu.ogi.edu/publications/.

[12] Arasaratnam I, Haykin S. A numerical-integration perspective on Gaussian filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(8): 1254-1269.

[13] Simandl M, Dunrik J. Derivative-free estimation methods: New results and performance analysis[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1749-1757.

[14] Julier S J, Uhlmann J K. A general method for approximating nonlinear transformation of probability distributions[EB/OL]. (1996-11-01). http://www.eng.ox.ac.uk/.

[15] N∅rqaard M, Poulsen N K, Ravn O. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems[R]. Lyngby: Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 2000.

[16] 胡士强, 敬忠良. 粒子滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 361-371.
(Hu S Q, Jin Z L. Overview of particle filter algorithms[J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 361-371.)

[17] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems[C]. Proc of Aerosense: The 11th Int Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls. Orlando: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1997: 54-65.

[18] Simandl M, Duník J. Derivative-free estimation methods: New results and performance analysis[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1749-1757.

[19] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(10): 1254-1269.

[20] Seong Y C, Wan S C. Robust positioning technique in low-cost DR/GPS for land navigation[J]. IEEE Trans on

Instrumentation and Measurement, 2006, 55(4): 1132-1142.

[21] Seong Y C, Byung D K. Adaptive IIR/FIR fusion filter and its application to the INS/GPS integrated system[J]. Automatica, 2008, 44(8): 2040-2047.

[22] Blom H A P, Bar-Shalom Y. The interacting multiple model algorithm for system with markovian switching coefficients[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(8): 780-783.

[23] Subrahmanya N, Shin Y C. Adaptive divided difference filtering for simultaneous state and parameter estimation[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1686-1693.

[24] 王小旭, 赵琳, 夏全喜, 等. 基于 Unscented 变换的强跟踪滤波器[J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 1063-1068.
(Wang X X, Zhao L, Xia Q X, et al. Strong tracking filter based on unscented transformation[J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 1063-1068.)

[25] 王小旭, 赵琳, 薛红香. 强跟踪 CDKF 及其在组合导航中的应用[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1837-1842.
(Wang X X, Zhao L, Xue H X. Strong tracking CDKF and its application for integrated navigation[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1837-1842.)

[26] Lee D J, Alfriend K T. Adaptive sigma point filtering for state and parameter estimation[C]. Proc of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conf and Exhibit. Providence: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, 2004: 897-916.

[27] Song Q, Han J D. An adaptive UKF algorithm for the state and parameter estimation of a mobile robot[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(1): 72-79.

[28] Yu Z J, Wei J M, Liu H T. A new adaptive maneuvering target tracking algorithm using artificial neural networks[C]. Proc of 2008 Int Joint Conf on Neural Networks. Hong Kong: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2008: 901-905.

[29] 赵琳, 王小旭, 孙明, 等. 基于极大后验和指数加权的自适应 UKF 滤波算法[J]. 自动化学报, 2010, 36(7): 1007-1019.
(Zhao L, Wang X X, Sun M, et al. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posterior estimation and exponential weighting[J]. Acta Automatica Sicina, 2010, 36(7): 1007-1019.)

[30] 赵琳, 王小旭, 薛红香, 等. 带噪声统计估计器的 Unscented 卡尔曼滤波器设计[J]. 控制与决策, 2009, 24 (10): 1483-1488.
(Zhao L, Wang X X, Xue H X, et al. Design of unscented Kalman filter with noise statistic estimator[J]. Control and Decision, 2009, 24 (10): 1483-1488.)

[31] Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering[J]. Automatica, 2006, 42(2): 261-270.

[32] Wu Y X, Hu D W, Hu X P. Comments on “Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering”[J]. Automatica, 2007, 43(3): 567-568.

[33] Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Author’s reply to “Comments on ‘Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering’ ”[J]. Automatica, 2007, 43(3): 569-570.

[34] Xiong K, Liu L D, Zhang H Y. Modified unscented Kalman filtering and its application in autonomous satellite navigation[J]. Aerospace Science and Technology, 2009, 13(5): 238-246.

[35] Wan E A, Merwe van der R. Kalman filtering and neural networks[M]. New York: Wiley, 2001: 126-131.

[36] Fraser D, Potter J. The optimum linear smoother as a combination of two optimum linear filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1969, 14(4): 387-390.

[37] Simo S. Unscented Rauch-Tung-Striebel smoother[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(3): 845-849.

[38] Rauch H E, Tung F, Striebel C T. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems[J] AIAA Journal, 1965, 3(8): 1445-1450.

[39] Simo S. Continuous-time and continuous-discrete-time unscented Rauch-Tung-Striebel smoothers[J]. Signal Processing, 2010, 90(1): 225-235.

[40] Simandl M, Duník J. Design of derivative-free smoothers and predictors[C]. Proc of the 14th IFAC Symposium on System Identification. Pilsen: IFAC Press, 2006: 991-996.

[41] 王小旭, 赵琳, 夏全喜, 等. 噪声相关条件下 Unscented 卡尔曼滤波器设计[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(10): 1362-1368.
(Wang X X, Zhao L, Xia Q X, et al. Design of unscented Kalman filter with correlated noises[J]. Control Theory & Application, 2010, 27(10): 1362-1368.)

[42] 王小旭, 赵琳, 潘泉, 等. 基于最小均方误差估计的噪声相关 UKF 设计[J]. 控制与决策, 2010, 25 (9): 1393-1398.
(Wang X X, Zhao L, Pan Q, et al. Design of UKF with correlative noises based on minimum mean square error estimation[J]. Control and Decision, 2010, 25(9): 1393-1398.)

[43] Hermoso-Carazo A, Linares-Pérez J. Unscented filtering algorithm using two-step randomly delayed observations in nonlinear systems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(9): 3705-3717.

[44] Hermoso-Carazo A, Linares-Pérez J. Nonlinear estimation applying an unscented transformation in systems with correlated uncertain observations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 217(20): 7998-8009.

[45] Bruno O S T, Leonardo A B T, Luis A A, et al. On unscented Kalman filtering with state interval constraints[J]. J of Process Control, 2010, 20(1): 45-57.

[46] Kolas S, Fossa B A, Schei T S. Constrained nonlinear state estimation based on the UKF approach[J]. Computers and Chemical Engineering, 2009, 33(4): 1386-1401.

[47] Saleh O A, Desmond M, James C, et al. A modified unscented filter for delay tracking in asynchronous CDMA systems[J]. Int J of Electronics and Communications, 2011, 65(1): 9-15.

[48] 侯代文, 殷福亮. 基于迭代中心差分卡尔曼滤波的说话人跟踪方法[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(7): 1684-1689.

(Hou D W, Yin F L. Iterated central difference Kalman filter based speaker tracking[J]. J of Electronics and Information Technology, 2008, 30(7): 1684-1689.)

[49] William F L, Aaron D L. Unscented Kalman filters for multiple target tracking with symmetric measurement equations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 370-375.

[50] Michail N P, Emmanouil G A, Nikolaos K U. Solving the association problem for a multistatic range-only radar target tracker[J]. Signal Processing, 2008, 88(9): 2254-2277.

[51] Katkuri J R, Jilkov V P, Li X R. A comparative study of nonlinear filters for target tracking in mixed coordinates[C]. Proc of the 42nd South Eastern Symposium on System Theory. Tyler: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2010: 202-207.

[52] Hu H T, Jing Z L, Hu S Q. Unscented fuzzy-controlled current statistic model and adaptive filtering for tracking maneuvering targets[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2006, 11(3): 961-972.

[53] Cui N Z, Hong L, Layne J R. A comparison of nonlinear filtering approaches with an application to ground target tracking[J]. Signal Processing, 2005, 85(8): 1469-1492.

[54] Razali S, Watanabe K, Maeyama S, et al. Unscented Rauch-Tung-Striebel smoother for a bearing only tracking problem[C]. Proc of 2010 Int Conf on Control Automation and Systems. Gyeonggi-do: IEEE Computer Society, 2010: 1281-1286.

[55] Tang X J, Yan J, Zhong D D. Square-root Sigma-point Kalman filtering for spacecraft relative navigation[J]. Acta Astronautica, 2010, 66(5): 704-713.

[56] Kim C K, Chung W K. Unscented fast SLAM: A robust and efficient solution to the SLAM problem[J]. IEEE Trans on Robotics, 2008, 24(4): 808-820.

[57] Soken H E, Hajiyev C. Pico satellite attitude estimation via robust unscented Kalman filter in the presence of measurement faults[J]. ISA Trans, 2010, 49(3): 249-256.

[58] Patrick S, Lasse K, Christian P. Design, geometry evaluation, and calibration of a gyroscope-free inertial measurement unit[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2010, 162(2): 379-387.

[59] Ning X L, Fang J C. A new autonomous celestial navigation method for the lunar rover[J]. Robotics and Autonomous and Systems, 2009, 57(1): 48-54.

[60] Rezaie J, Moshiri B, Araabi B N, et al. GPS/INS integration using nonlinear blending filters[C]. Proc of SICE Annual Conf. Takamatsu: Society of Instrument and Control Engineers, 2007: 1674-1680.

[61] Lachapelle G. Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(2): 750-756.

[62] Murshed A M, Huang B, Nandakumar K. Estimation and control of solid oxide fuel cell system[J]. Computers and Chemical Engineering, 2010, 34(1): 96-111.

[63] Wang J L, Feng X Y, Zhao L Q, et al. Unscented transformation based robust Kalman filter and its applications in fermentation process[J]. Chinese J of Chemical Engineering, 2010, 18(3): 412-418.

[64] Kim J S, Shin D R, Serpedin E. Adaptive multiuser receiver with joint channel and time delay estimation of CDMA signals based on the square-root unscented filter[J]. Digital Signal Processing, 2009, 19(2): 504-520.

[65] Tripathy P, Sighn S N. A divide-by-difference-dilter based algorithm for estimation of generator rotor angle utilizing synchrophasor measurements[J]. IEEE Trans on Instruemention and Measurement, 2010, 59(6): 1562-1570.

[66] Simon D. A comparison of filtering approaches for aircraft engine health estimation[J]. Aerospace Science and Technology, 2008, 12(1): 276-284.

[67] Chen R R, Liu B, Cheng X L. Pricing the term structure of inflation risk premia: Theory and evidence from TIPS[J]. J of Empirical Finance, 2010, 17(4): 704-721.

[68] Wang K, Wang W, Zhuang Y. An MAP approach for vision-based self-localization of mobile robot[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(2): 159-166.