

文章编号: 1001-0920(2013)02-0303-06

Cubature 卡尔曼滤波与 Unscented 卡尔曼滤波估计精度比较

孙 枫¹, 唐李军²

(1. 哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001; 2. 中国舰船研究设计中心, 武汉 430000)

摘 要: 对于不同维数下非线性系统的估计问题, 为从常用的 Unscented 卡尔曼滤波(UKF)和 Cubature 卡尔曼滤波(CKF)中选取合适的滤波方法, 从函数泰勒展开式和数值稳定性上对其进行了分析和比较. 由于不同维数下它们捕获函数泰勒展开式高阶项的程度和数值稳定性不同, 两者滤波精度出现差异, 从而得到了不同维数下滤波方法的选择途径. 仿真结果验证了理论分析的正确性.

关键词: 维数; 估计精度; 泰勒展开式; 数值稳定性; Unscented 卡尔曼滤波; Cubature 卡尔曼滤波

中图分类号: U249

文献标志码: A

Estimation precision comparison of Cubature Kalman filter and Unscented Kalman filter

SUN Feng¹, TANG Li-jun²

(1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2. China Ship Development and Design Center, Wuhan 430000, China. Correspondent: TANG Li-jun, E-mail: strapdown@163.com)

Abstract: In order to select the appropriate filtering method from the UKF and CKF for the different dimensions nonlinear systems estimation, the two filters are analyzed and compared through the Taylor expansion of function and the numerical stability. Due to the different dimension, the captured high-order item degree of function Taylor expansion and the numerical stability are different to appear different filter precisions, so that the filter choice ways of different dimension are acquired. Simulation results show the correctness of with the theoretical analysis.

Key words: dimension; estimation precision; Taylor expansion; numerical stability; Unscented Kalman filter; Cubature Kalman filter

0 引 言

现实世界中几乎所有的系统都是非线性的. 针对非线性系统的估计问题, 人们提出了各种非线性滤波^[1-7]方法, 其中 UKF^[3]作为一种常用的非线性滤波已广泛应用于飞行器姿态估计^[8]、弹道目标跟踪^[9-10]、电量扰动信号跟踪^[11]、SLAM 中的自主移动车辆定位定向问题^[12]和连续系统估计^[13]等领域. UKF 是基于“对概率分布进行近似要比对非线性函数进行近似容易得多^[3]”的思想而提出的, UKF 根据 UT 变换, 选择 $2n + 1$ 个具有权值的 Sigma 点来近似状态变量的均值, Sigma 点经非线性函数传播后能捕获的均值和方差能够达到非线性函数真实值的三阶精度, 因此其精度高于 EKF, 同时克服了 EKF 易于发散以及只适用弱非线性的缺点. 由于使用确定性采样 Sigma 点, UKF 避免了粒子滤波的粒子退化和计算

量大以及实时性差的问题, 但在高维系统中 UKF 容易出现数值不稳定现象, 其应用遇到了困难.

最近, Arasaratnam 等^[7]提出了基于 Cubature 变换的 Cubature Kalman filter(CKF). 该滤波方法一经提出便被广大学者应用于姿态估计^[14-15]、导航^[16-18]、连续系统^[19]和混合滤波^[20]等领域. CKF 滤波过程与 UKF 类似, 但其理论推导更加严谨(UKF 缺乏严格的数学推导). CKF 根据 Cubature 准则, 通过 $2n$ 个同等权值的 Cubature 点经非线性系统方程转换后产生新的点来给出下一时刻系统状态的预测, 同样无需对非线性模型线性化. CKF 具备 UKF 的特点, 由于其使用更少的采样点, 很有可能取代 UKF 而成为常用的滤波方法. 但是, 对于不同维数的非线性系统, 它们的估计精度尚存在很大差异. 为了给不同维数下的非线性系统

收稿日期: 2011-08-21; 修回日期: 2011-10-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60834005, 60775001).

作者简介: 孙枫(1944—), 男, 教授, 博士生导师, 从事惯性导航、信息融合等研究; 唐李军(1984—), 男, 博士生, 从事惯性导航、非线性滤波的研究.

选择合适的滤波方法, 本文从函数泰勒展开式和数值稳定性上分析比较这两种方法, 为上述不同维数下两种滤波方法的选择提供一种参考途径.

1 Cubature 点与 Sigma 点

考虑如下形式的多维权重积分:

$$I(f) = \int_{R^n} f(x)w(x)dx. \quad (1)$$

其中: $f(\cdot)$ 为任意函数, R^n 为积分区域. 一般情况下, 上述积分的解析值无法获得, 需通过数值积分方法对其进行近似计算. 可选择一组具有权重值的点集 (ξ_i, ω_i) 进行近似积分运算, 即

$$I(f) = \sum_{i=1}^m \omega_i f(\xi_i). \quad (2)$$

1.1 Cubature 点

CKF 根据 Cubature 变换^[7]得到 $2n$ 个具有相同权值的 Cubature 点来近似多维权重积分 (1), 即

$$\begin{cases} \xi_i = \sqrt{\frac{2n}{2}} [1]_i, \\ \omega_i = \frac{1}{2n}, i = 1, 2, \dots, 2n. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $[1]_i$ 表示集合 $[1]$ 的第 i 列, 对于二维, 即 $n=2$, 有

$$[1] = \{[1, 0]^T, [-1, 0]^T, [0, -1]^T, [0, 1]^T\}.$$

计算出 Cubature 点集 (ξ_i, ω_i) 后便可以通过时间更新和量测更新得到 CKF 滤波算法^[7].

1.2 Unscented 点

UKF 根据 UT 变换^[3]得到 $2n + 1$ 个不同权值的 Sigma 点来近似多维权重积分 (1), 即

$$\begin{cases} \xi_i = 0, \omega_i = \frac{\kappa}{n + \kappa} i = 0; \\ \xi_i = \sqrt{n + \kappa} [1]_i, \omega_i = \frac{1}{2(n + \kappa)}, i = 1, 2, \dots, 2n. \end{cases} \quad (4)$$

计算出 Sigma 点集 (ξ_i, ω_i) 后便可以得到 UKF 滤波算法^[3].

2 泰勒展开式和数值稳定性分析

假设 n 维向量 $x \sim N(\bar{x}, P)$, $\Delta x \sim N(0, P)$, 将向量函数 $f(x)$ 在均值 \bar{x} 附近泰勒展开, 有

$$f(x) = f(\bar{x} + \Delta x) = f(\bar{x}) + D_{\Delta x} f + \frac{D_{\Delta x}^2 f}{2!} + \frac{D_{\Delta x}^3 f}{3!} + \frac{D_{\Delta x}^4 f}{4!} + \dots \quad (5)$$

其中: $D_{\Delta x} f = (\Delta x^T \nabla) f[x]|_{x=\bar{x}}$, ∇ 表示对 $f[x]$ 求偏导. $D_{\Delta x} f$ 可写成如下标量形式:

$$\frac{D_{\Delta x}^i f}{i!} = \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^i f(x) \Big|_{x=\bar{x}}. \quad (6)$$

则 $f(x)$ 的均值为

$$\begin{aligned} \bar{f} &= E[f(\bar{x} + \Delta x)] = \\ &= f(\bar{x}) + E \left[D_{\Delta x} f + \frac{D_{\Delta x}^2 f}{2!} + \frac{D_{\Delta x}^3 f}{3!} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

根据对称性, 奇阶矩全部为 0, 因此

$$\bar{f} = f(\bar{x}) + E \left[\frac{D_{\Delta x}^2 f}{2!} + \dots + \frac{D_{\Delta x}^{2k} f}{2k!} \right]. \quad (8)$$

考虑

$$\frac{D_{\Delta x}^2 f}{2!} = \frac{D_{\Delta x} (D_{\Delta x} f)}{2!} = \left(\frac{\nabla^T \Delta x \Delta x^T \nabla}{2!} \right) f,$$

且有 $E[\Delta x \Delta x^T] = P$, 从而

$$E \left[\frac{D_{\Delta x}^2 f}{2!} \right] = \left(\frac{\nabla^T P \nabla}{2!} \right) f.$$

因此 $f(x)$ 的均值可表示为

$$\bar{f} = f(\bar{x}) + \left(\frac{\nabla^T P \nabla}{2!} \right) f + E \left[\frac{D_{\Delta x}^4 f}{4!} + \dots + \frac{D_{\Delta x}^{2k} f}{2k!} \right]. \quad (9)$$

其中: $k = 2, 3, \dots$; 均值为零、方差为 P 的随机向量 Δx 可以表示为 $\Delta x = A \Delta x'$, $A = \sqrt{P}$, $\Delta x'$ 均值为零、方差为单位阵 I ; $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 因此 $D_{\Delta x}$ 可表示为

$$\begin{aligned} D_{\Delta x}^{2k} f &= \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \Delta x'_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right]^{2k} f \Big|_{x=\bar{x}} = \\ &= \left[\Delta x'_1 \left(a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{1n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) + \dots + \right. \\ &= \left. \Delta x'_n \left(a_{n1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{nn} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right]^{2k} f \Big|_{x=\bar{x}} = \\ &= \left[(\Delta x'_1)^{2k} \left(a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{1n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{2k} + \dots + \right. \\ &= \left. (\Delta x'_n)^{2k} \left(a_{n1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{nn} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{2k} \right] f \Big|_{x=\bar{x}} + \zeta_1, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 ζ_1 为各分量之间的交叉项. 从而 $D_{\Delta x}^{2k} f$ 的期望为

$$\begin{aligned} E(D_{\Delta x}^{2k} f) &= \\ &= \left[E[(\Delta x'_1)^{2k}] \left(a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{1n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{2k} + \right. \\ &= \left. \dots + E[(\Delta x'_n)^{2k}] \left(a_{n1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \right. \right. \\ &= \left. \left. a_{nn} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{2k} \right] f \Big|_{x=\bar{x}} + E\zeta_1 = \\ &= \left[\theta \left(a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{1n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{2k} + \dots + \right. \\ &= \left. \theta \left(a_{n1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{nn} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{2k} \right] f \Big|_{x=\bar{x}} + E\zeta_1 = \\ &= \theta \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{i1} \partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{a_{in} \partial}{\partial x_n} \right) \right]^{2k} f \Big|_{x=\bar{x}} + E\zeta_1. \end{aligned} \quad (11)$$

$E\zeta_1$ 为各分量之间的交叉矩. 式 (11) 利用了

$$\begin{aligned} \theta &= E[(\Delta x'_1)^{2k}] = \dots = \\ &= E[(\Delta x'_n)^{2k}] = 1 \times 3 \times \dots \times (2k - 1), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的均值为

$$\bar{f} = f(\bar{x}) + \left(\frac{\nabla^T P_{xx} \nabla}{2!} \right) f + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k - 1)}{(2k)!} \times$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{i1} \partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{a_{in} \partial}{\partial x_n} \right) \right]^{2k} f \Big|_{x=\bar{x}} + E\zeta_2. \quad (12)$$

其中 a_{ij} 为矩阵 A 的第 j 列的第 i 个元素.

2.1 CKF 估计精度

Cubature 点 $x_i = \bar{x} + \sqrt{nP}[1]_i$, 每个点经非线性函数传播后的泰勒展开式如下:

$$\chi_i = f(x_i) = f[\bar{x}] + D_{\sigma_i} f + \frac{D_{\sigma_i}^2 f}{2!} + \cdots, \quad (13)$$

其中 $\sigma_i = x_i - \bar{x}$. 从而 CKF 预测的 $f(x)$ 的均值为

$$\bar{f}_{\text{CKF}}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(f[\bar{x}] + \frac{D_{\sigma_i}^2 f}{2!} + \cdots \right), \quad (14)$$

$$\frac{D_{\sigma_i}^2}{2!} = \left(\frac{\nabla^T \sigma_i \sigma_i^T \nabla}{2!} \right) f, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{D_{\sigma_i}^2}{2!} =$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\nabla^T \sigma_i \sigma_i^T \nabla}{2!} \right) f = \left(\frac{\nabla^T P_{xx} \nabla}{2!} \right) f. \quad (16)$$

考虑对称性, 奇阶矩为 0, 从而

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\text{CKF}}(x) &= f[\bar{x}] + \left(\frac{\nabla^T P_{xx} \nabla}{2!} \right) f + \\ &\quad \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{D_{\sigma_i}^4 f}{4!} + \cdots + \frac{D_{\sigma_i}^{2k} f}{2k!} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

而 σ_i 可表示为 $\sigma_i = A\sigma'_i$, σ_i 为 $A\sqrt{n}[1]_i$, σ'_i 为 $\sqrt{n}[1]_i$. σ_i 可改写为

$$\begin{aligned} \sigma_i &= A\sqrt{n}[1]_i = \\ &\begin{cases} \sqrt{n}[a_{1i} \cdots a_{ni}]^T, & i = 1, 2, \dots, n; \\ -\sqrt{n}[a_{1(i-n)} \cdots a_{n(i-n)}]^T, & i = n+1, \dots, 2n. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

因此 $D_{\sigma_i}^{2k} f$ 可表示为

$$\begin{aligned} D_{\sigma_i}^{2k} f &= \\ &\left[\sum_{j=1}^n \sqrt{na_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=n+1}^{2n} (-\sqrt{na_{i(j-n)}}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right]^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}} = \\ &\left[\sum_{j=1}^n \sqrt{na_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} - \sum_{j=1}^n \sqrt{na_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right]^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}} = \\ &\left(\sum_{j=1}^n \sqrt{na_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}} + \\ &\left(-\sum_{j=1}^n \sqrt{na_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}} + \xi, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 ξ 为各分量之间的交叉项. 式 (19) 可进一步写为

$$\begin{aligned} D_{\sigma_i}^{2k} f &= \\ &2n^k \left(\frac{a_{i1} \partial}{\partial x_{i1}} + \cdots + \frac{a_{in} \partial}{\partial x_{in}} \right)^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}} + \xi. \end{aligned} \quad (20)$$

且有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{D_{\sigma_i}^{2k} f}{2k!} \right) = \\ &\frac{n^{k-1}}{(2k)!} \sum_{i=1}^n \left(a_{i1} \frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \cdots + a_{in} \frac{\partial}{\partial x_{in}} \right)^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}}. \end{aligned}$$

从而 CKF 预测的 $f(x)$ 的均值为

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\text{CKF}}(x) &= \\ &f[\bar{x}] + \left(\frac{\nabla^T P_{xx} \nabla}{2!} \right) f + \frac{n^{k-1}}{(2k)!} \times \\ &\sum_{i=1}^n \left(a_{i1} \frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \cdots + a_{in} \frac{\partial}{\partial x_{in}} \right)^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}}. \end{aligned} \quad (21)$$

2.2 UKF 估计精度

由于推导过程类似于 CKF, 这里仅给出最后结果

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\text{UKF}}(x) &= \\ &f[\bar{x}] + \left(\frac{\nabla^T P_{xx} \nabla}{2!} \right) f + \frac{(n+\kappa)^{k-1}}{(2k)!} \times \\ &\sum_{i=1}^n \left(a_{i1} \frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \cdots + a_{in} \frac{\partial}{\partial x_{in}} \right)^{2k} f(x) \Big|_{x=\bar{x}}. \end{aligned} \quad (22)$$

对于 $\bar{f}(x)$ 、 $\bar{f}_{\text{CKF}}(x)$ 、 $\bar{f}_{\text{UKF}}(x)$ 之间的关系, 只需比较 $1 \times 3 \times \cdots \times (2-1)$ 、 n^{k-1} 和 $(n+\kappa)^{k-1}$ 即可.

2.3 估计精度分析

对于 $\bar{f}(x)$ 的四阶矩 (即 $k=2$ 时), 有 $1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1) = 3$ (不包括分量之间的四阶交叉矩, CKF 和 UKF 无交叉矩). 为捕获真实均值 $\bar{f}(x)$ 的大部分四阶矩信息, UKF 滤波过程中选择 $n+\kappa = 3^{[21]}$. 因此, 当 $n \leq 2$ 时, 有

$$n^{k-1} < (n+\kappa)^{k-1} < 1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1), \quad (23)$$

即此时 UKF 捕获真实均值的高阶矩信息多于 CKF 捕获的信息, 从而 UKF 估计精度高于 CKF; $n=3$ 时, 有

$$n^{k-1} = (n+\kappa)^{k-1} < 1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1), \quad (24)$$

即此时 UKF 捕获真实均值的高阶矩信息等于 CKF 捕获的信息, 从而 UKF 估计精度与 CKF 相同; 当 $n > 3$ 时, 通过捕获高阶矩信息的程度来比较两种方法会很困难, 这时可以用数值稳定性来分析 UKF 和 CKF.

任何滤波方法都是由积分公式导出的, 采用不同的积分公式对多维积分 (1) 进行积分, 可以推导出不同的滤波方法. 积分公式应同时具有点集位于积分区间和权值为正这 2 个性质^[22-24], 因为此种情况下的积分公式的误差将小于缺少上述一个或全部性质的积分公式^[22-23]. 对于点集位于积分区间的情况, UKF 和 CKF 两种滤波方法所使用的积分公式均可得到满足. 对于第 2 个性质, 先定义稳定因子

$$I = \sum_i |\omega_i| / \sum_i \omega_i. \quad (25)$$

文献 [7, 22, 24-26] 将式 (25) 作为衡量积分公式数值稳定的指标. 文献 [23-24] 已证明, 当 $I > 1$ 时, 在有

限精度运算器上积分公式将引入大量的截断误差.

当 $n > 3$ 时 $n + \kappa = 3$, 所以 $\kappa = (3 - n) < 0$, 权值 $\omega_0 = (1 - n/3) < 0$, 从而 UKF 的稳定因子

$$I_{\text{UKF}} = \frac{2n}{3} - 1 > 1,$$

且稳定因子随 n 线性增加, 导致在矩积分的数值估计中出现很大的误差, 积分公式精度变差, 而当 $n > 3$ 时, CKF 的稳定因子始终为 $I_{\text{CKF}} = 1$, 因此 $n > 3$ 时 CKF 的估计精度高于 UKF. 同时, 由 CKF 与 UKF 算法的对比可以看出, 若 κ 取 0 时, 则对于任何维数, UKF 估计性能与 CKF 一致.

3 仿真分析

选择如下一维、三维和五维非线性例子评估上述两种滤波: 单变量非平稳增长模型, 弹道目标再入, 目标跟踪. 它们已被文献 [7, 21, 26-29] 作为研究范例.

3.1 单变量非平稳增长模型

该模型为经济领域广泛使用的非线性模型, 其离散方程为

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{25x_k}{1+x_k^2} + 8\cos(1.2k) + r_k, \\ y_{k+1} = \frac{x_{k+1}^2}{20} + v_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (26)$$

其中: 噪声 $r_k \sim N(0, 1)$, $v_{k+1} \sim N(0, 1)$. 状态初始真实值 $x_0 = 0.1$, 仿真初始条件取 $x_{0/0} = 0$, $P_{0/0} = 1$, 时间 $N = 500$. 两种滤波器的估计性能采用时间平均 MSE 进行比较.

图 1 给出了 50 次 Monte Carlo 仿真的 MSE 以及 MSE 的均值和标准差. 由仿真结果可以看出, 一维情况下, UKF 的 MSE 均值和方差明显小于 CKF, UKF 精度更高. 此例的结果与前面的理论分析一致.

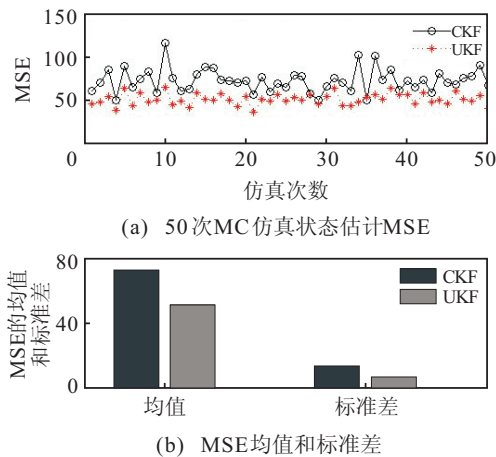


图 1 50 次 MC 仿真的 MSE 及其均值和标准差

3.2 弹道目标再入

目标连续时间动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + r_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -e^{-\gamma x_1(t)} x_2^2(t) x_3(t) + r_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = r_3(t). \end{cases} \quad (27)$$

主要目的是对从高处以很快的速度进入大气层的载体位置 x_1 、速度 x_2 和弹道常数 x_3 进行估计. $r_1, r_2, r_3 \sim N(0, Q)$, 且互不相关. 常数 γ 表示大气密度与高度间的关系. 载体的位置通过雷达测定, 它们之间的关系为

$$y(t) = \sqrt{l^2 + (x_1(t) - h)^2} + v(t). \quad (28)$$

其中: h 为雷达高度, l 为其与载体之间的水平距离, $v \sim N(0, R)$. 系统参数如下: $\gamma = 5 \times 10^{-5}$, $h = 10^5$, $l = 10^5$, $Q = 0$, $R = 10^4$. 系统真实状态初值

$$x_0 = [3 \times 10^5 \quad 2 \times 10^4 \quad 10^{-3}]^T,$$

仿真初始状态

$$x_{0/0} = [3 \times 10^5 \quad 2 \times 10^4 \quad 10^{-3}]^T,$$

协方差矩阵

$$P_{0/0} = \text{diag}[10^6 \quad 4 \times 10^6 \quad 10^{-4}].$$

采用平均绝对值误差比较两种滤波方法, 进行 50 次 MC 仿真, 仿真结果如图 2 所示. 从图 2 可以看出, CKF 与 UKF 估计精度一致, 从而证实了当状态维数为 3 时两种滤波方法性能相同的推断.

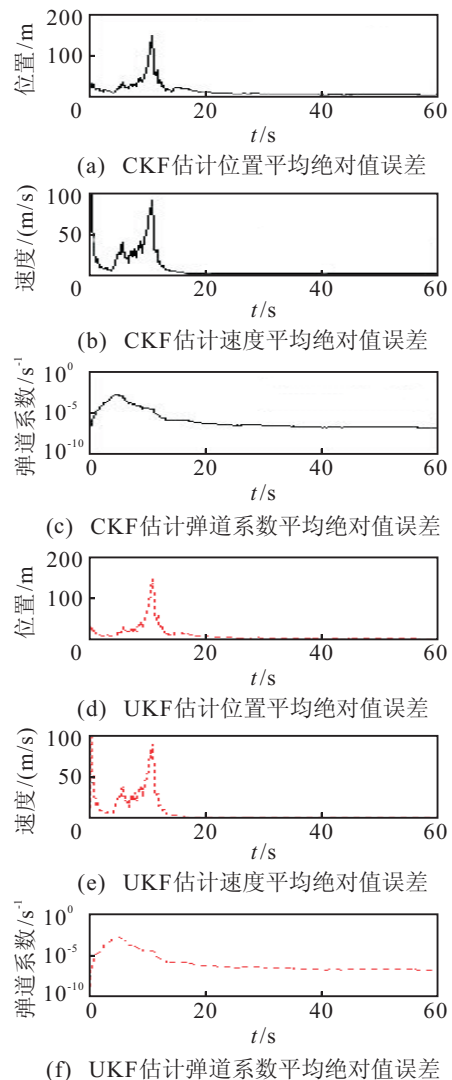


图 2 位置、速度及弹道系数平均绝对值误差

3.3 目标跟踪

飞行器在水平方向以未知的角速度 Ω 持续不断地机动飞行, 其动力学运动方程如下:

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \Omega T}{\Omega} & 0 & \frac{-1 + \cos \Omega T}{\Omega} & 0 \\ 0 & \cos \Omega T & 0 & -\sin \Omega T & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos \Omega T}{\Omega} & 1 & \frac{\sin \Omega T}{\Omega} & 0 \\ 0 & \sin \Omega T & 0 & \cos \Omega T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + v_k. \quad (29)$$

其中: 状态 $x = [\xi \ \dot{\xi} \ \eta \ \dot{\eta} \ \Omega]^T$, ξ 和 η 为位置, $\dot{\xi}$ 和 $\dot{\eta}$ 为速度, T 为两次量测时间的间隔. $v_k \sim N(0, Q)$, $Q = \text{diag}[q_1 M \ q_1 M \ q_2 T]$, $M = [T^3/3 \ T^2/2; T^2/2 \ T]$. 雷达对飞行器进行测量, 两者斜距为 r , 方位为 θ . 量测方程

$$\begin{bmatrix} r_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2} \\ \tan^{-1} \left(\frac{\eta_k}{\xi_k} \right) \end{bmatrix} + w_k. \quad (30)$$

其中: $w_k \sim N(0, R)$, $R = \text{diag}[\sigma_r^2 \ \sigma_\theta^2]$. 系统参数如下: $T=1\text{ s}$, $\Omega = -3^\circ/\text{s}$, $q_1 = 0.1\text{ m}^2/\text{s}^3$, $q_2 = 1.75 \times 10^{-4}/\text{s}^3$, $\sigma_r = 10\text{ m}$, $\sigma_\theta = \sqrt{10}\text{ m} \cdot \text{rad}$. 真实初始值

$$x_0 = [1000\text{ m} \ 300/\text{ms} \ 1000\text{ m} \ 0\text{ m/s} \ -3^\circ/\text{s}]^T,$$

$$P_0 = \text{diag}[100\text{ m}^2 \ 10\text{ m}^2/\text{s}^2 \ 100\text{ m}^2 \ \leftarrow 10\text{ m}^2/\text{s}^2 \ 100\text{ m} \cdot \text{rad}^2/\text{s}^2].$$

仿真条件如下: $x_{0/0}$ 从 $N(x_0, P_{0/0})$ 中随机选取, 仿真时间 100 s, 进行 50 次 MC 仿真. 采用均方根误差 RMSE 评估两种滤波方法.

UKF 选择 $\kappa = -2$, 由于数值截断误差的原因, 在 50 次 MC 仿真中, UKF 经常出现算法中断运行的现象, 而 CKF 则没有出现算法中断的现象. 图 3~图 5 给出了 50 次 MC 仿真结果. 从仿真结果可以看出, CKF 估计性能远远好于 UKF, 从而验证了当 $n > 3$ 时, CKF 估计精度优于 UKF. 该结论与文献 [7] 中的结论

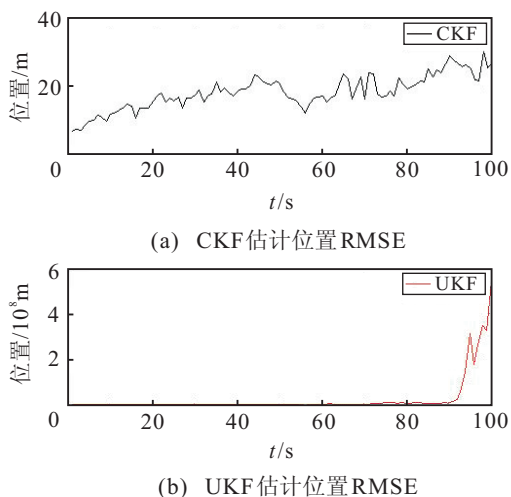


图3 位置 RMSE

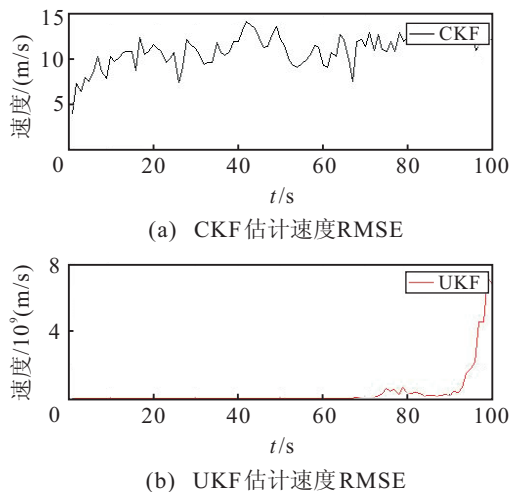


图4 速度 RMSE

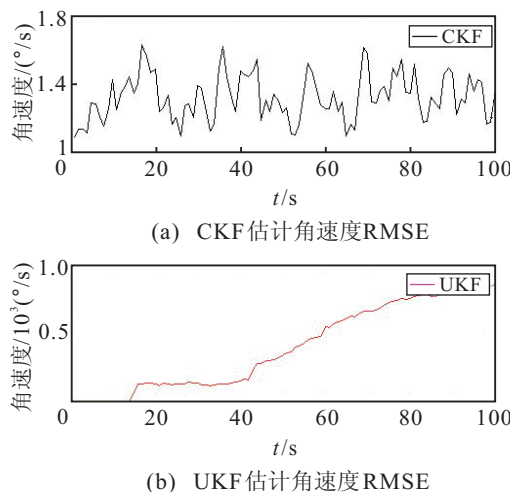


图5 角速度 RMSE

与文献 [19] 中用 CKF 处理同时含有连续和离散的高维非线性系统比使用 UKF 具有更高精度的结论一致.

此外, 对上述 3 个非线性例子还仿真了 $\kappa = 0$ 时的情形, 正如前面预料的结果那样, UKF 与 CKF 精度相同. 对于算法运行时间, 由于 CKF 比 UKF 少一个采样点, CKF 运行时间更快, 实时性更好一些. 通过前面的理论分析和上述仿真案例, 可得出如下结论:

- 1) 对于低维 ($n < 3$) 非线性系统, UKF 精度高于 CKF, 建议选择 UKF 作为滤波方法;
- 2) 对于 $n = 3$ 的非线性系统, UKF 与 CKF 精度相同, 考虑 CKF 选择了更少的采样点, 建议选择 CKF 作为滤波方法;
- 3) 对于高维 ($n > 3$) 非线性系统, UKF 估计精度低于 CKF, 且 UKF 数值稳定性差, 建议选择 CKF 作为滤波方法;
- 4) 当 $\kappa = 0$ 时, 尽管两种滤波方法精度相同, 但 CKF 采样点更少, 因此建议选择 CKF 作为滤波方法.

4 结 论

从函数泰勒展开式及数值稳定性上分析比较了

基于 UT 变换和 Cubature 变换的两种滤波方法(UKF 和 CKF). 它们都可以用于处理非线性系统的估计问题, 两者估计精度之间的区别在于它们对于函数泰勒展开式高阶项的捕获程度以及数值稳定性不一样, 并对不同维数非线性系统下的两种滤波方法的选择作出了如下说明: 三维以下非线性系统应选择 UKF 作为滤波方法; 三维及以上非线性系统应将 CKF 作为滤波方法. 理论分析和仿真结论为实际工程从 UKF 和 CKF 中选取最佳的滤波方法提供了很好的甄别途径. 同时, 证明了 $\kappa=0$ 时, UKF 与 CKF 估计精度等价.

参考文献(References)

- [1] Schmidt S F. The Kalman filter-its recognition and development for aerospace applications[J]. J of Guidance Control and Dynamics, 1981, 4(1): 4-7.
- [2] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEEE Proc on Radar and Signal Processing, 1993, 140(2): 107-113.
- [3] Julier S J, Uhlman J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems[J]. Proc of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers, 1997, 3068(3): 182-193.
- [4] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1628.
- [5] Ito K, Xiong K Q. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.
- [6] Kotecha J H, Djuric P A. Gaussian particle filtering[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2003, 51(10): 2592-2601.
- [7] Ienkaran Arasaratnam, Simon Haykin. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [8] Crassidis J L, Markley F L. Unscented for spacecraft attitude estimation[J]. J of Guidance Control and Dynamics, 2003, 26(4): 536-542.
- [9] Farina A, Ristic B, Benvenuti D. Tracking a ballistic target: Comparison of several nonlinear filters[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(3): 854-867.
- [10] Ristic B, Farina A, Benvenuti D, et al. Performance bounds and comparison of nonlinear filters for tracking a ballistic object on reentry[J]. IEE Proc Radar Sonar and Navigation, 2003, 150(2): 65-70.
- [11] Reddy J B V, Dash P K, Samantaray R, et al. Fast tracking of power quality disturbance signals using an optimized Unscented filter[J]. IEEE Trans on Instrumentation and Measurement, 2009, 58(12): 3943-3952.
- [12] Chanki Kim, Rathinasamy Sakthivel, Wan Kyun Chung. Unscented fast SLAM: A robust and efficient solution to the SLAM problem[J]. IEEE Trans on Robotics, 2008, 24(4): 808-820.
- [13] Simo Sarkka. On Unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(9): 1631-1641.
- [14] Jonghee Bae, Youdan Kim. Nonlinear estimation for spacecraft attitude using decentralized Unscented information filter[C]. Int Conf on Control Automation and Systems. KINTEX, Gyeonggi-do, 2010: 1562-1566.
- [15] Bin Jia, Ming Xin, Yang Cheng. Sparse Gauss-Hermite quadrature filter with application to spacecraft attitude estimation[J]. J of Guidance Control and Dynamics, 2011, 34(2): 367-379.
- [16] Liu Jiang, Cai Bai-gen, Tang Tao, et al. A CKF based GNSS/INS train integrated positioning method[C]. Int Conf on Mechatronics and Automation. Xi'an, 2010: 1686-1689.
- [17] Pesonen H, Piche R. Cubature-based Kalman filters for positioning[C]. Workshop on Positioning Navigation and Communication. Dresden, 2010: 45-49.
- [18] Weisheng Wu, Chunlei Song, Junhou Wang, et al. Cubature Gaussian Particle filter for initial alignment of strapdown inertial navigation system[C]. Int Conf on Pervasive Computing Signal Processing and Applications. Harbin, 2010: 1196-1200.
- [19] Ienkaran Arasaratnam, Simon Haykin, Thomas R Hurd. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(10): 4977-4993.
- [20] Jing Mu, Yuan Li Cai, Jun Min Zhang. Square root cubature particle filter[J]. Advanced Materials Research, 2011, 219(1): 727-731.
- [21] Julier S, Uhlman J, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [22] Davis P J, Rabinowitz P. Methods of numerical integration[M]. New York: Academic Press, 1975: 125-126.
- [23] Stroud A H. Approximate calculation of multiple integrals[M]. NJ: Prentice Hall, 1971: 98-100.
- [24] Genz A, Keister B D. Fully symmetric interpolatory rules for multiple integrals over infinite regions with Gaussian weight[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 1996, 71(2): 299-309.