

文章编号: 1001-0920(2013)01-0043-06

考虑通货膨胀因素下的连续时间均值-方差投资组合选择

姚海祥¹, 姜灵敏¹, 马庆华¹, 李勇²

(1. 广东外语外贸大学 信息学院, 广州 510006; 2. 证券时报社 数据部, 广东 深圳 518026)

摘要: 考虑通货膨胀因素, 利用均值-方差模型研究连续时间投资组合选择问题. 利用 Lagrange 乘子技术将原均值-方差模型转化为一个标准的随机最优控制问题, 应用动态规划的方法得到问题的解析解, 进而求解出原均值-方差模型的有效投资策略和有效边界的解析表达式. 通过实证分析进一步表明了结论的正确性.

关键词: 通货膨胀; 连续时间均值-方差模型; Lagrange 乘子技术; 动态规划; 有效边界

中图分类号: F830; F224

文献标志码: A

Continuous-time mean-variance portfolio selection under inflation

YAO Hai-xiang¹, JIANG Ling-min¹, MA Qing-hua¹, LI Yong²

(1. School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510006, China; 2. Data Department, Securities Times, Shenzhen 518026, China. Correspondent: YAO Hai-xiang, E-mail: yaohaixiang@mail.gdufs.edu.cn)

Abstract: A continuous-time mean-variance portfolio selection problem is studied under inflation. Firstly, the original mean-variance problem is turned into a standard stochastic optimal control problem by using Lagrange multiplier technique. Then, the analytical solution is obtained by applying the dynamic programming approach, and closed form expressions of the efficient investment strategies and mean-variance efficient frontier are derived. Finally, a numerical example is given to show the correctness of the results.

Key words: inflation; continuous-time mean-variance model; Lagrange multiplier technique; dynamic programming; efficient frontier

0 引言

Markowitz^[1]利用方差度量风险, 建立了著名的均值-方差模型, 奠定了现代资产组合理论的基础, 但只考虑了单阶段静态情形, 而现实中投资是一个多阶段或连续时间的长期动态过程. 为此, 文献[2]研究了多阶段均值-方差投资组合选择问题, 并利用嵌入法技术首次给出了模型的解析解. 文献[3]采用嵌入法与随机线性二次(LQ)控制方法得到了连续时间均值-方差模型的解析解. 在此理论基础上, 文献[4-10]利用动态均值-方差模型研究了其他各种现实条件下的投资组合选择问题. 另外, 文献[11-12]除了考虑投资外, 还同时考虑了消费, 利用期望效用最大化模型和随机最优控制理论, 研究了动态最优投资-消费策略. 文献[13-15]均采用期望效用最大化模型研究了各种

现实条件下的最优投资或最优投资-消费问题.

近年来, 受金融危机影响, 包括我国在内的世界各国都争相采取量化宽松的货币政策和财政政策, 导致通货膨胀日益严重, 全球性通胀压力显现. 以我国为例, 自2009年年底开始, 全国物价呈现出明显的上涨趋势, 自2010年10月开始物价指数(CPI)已经突破4%, 2011年初达5%, 2011年6月和7月则突破6%. 虽然通货膨胀未来的走势是不确定的, 但可以肯定的是通货膨胀将长期存在. 如何在投资决策中应对通货膨胀是投资者必须面对的问题, 通货膨胀成为投资者考虑的重要因素之一. 目前, 考虑通货膨胀因素下的投资组合选择的研究文献还不多. 文献[16]基于期望效用最大化模型并利用鞅方法研究了连续时间的最优投资及消费策略, 文献[17]进一步研究了真实价

收稿日期: 2011-08-23; 修回日期: 2012-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71003110); 教育部人文社会科学研究基金项目(10YJC790339); 广东省自然科学基金项目(S2011010005503); 广东高等院校学科建设专项资金项目(科技创新); 广东省科技计划项目(2011B040400015, 2011A070200012).

作者简介: 姚海祥(1978—), 男, 副教授, 博士, 从事投资决策与风险控制的研究; 姜灵敏(1956—), 男, 教授, 博士, 从事控制理论与风险管理等研究.

格只是部分可观测的情形. 从数学上来看, 因为考虑通货膨胀, 会把新的随机因素 (本文用布朗运动来描述) 引入到模型中, 而且为了更接近现实, 本文并没有假定影响通货膨胀的随机因素和影响风险资产名义价格的随机因素是相互独立的, 即它们可以是相关的. 这些都会对模型的求解带来困难和挑战, 此时并不能简单地采用文献 [3] 介绍的随机 (LQ) 方法进行求解. 为此, 采取动态规划方法^[11-12]对模型进行求解.

本文采用连续时间均值-方差框架, 研究了考虑通货膨胀因素下的投资组合选择问题, 采用 Lagrange 乘子技术和动态规划相结合的方法对模型进行求解, 并得到了有效投资策略及均值-方差有效边界的解析表达式. 最后通过实证分析验证了本文的结论.

1 考虑通货膨胀时连续时间均值-方差模型的建立

假设市场有 1 种无风险资产和 n 种风险资产, 它们可以连续交易, 无风险资产的名义价格 $P_0(t)$ 服从如下微分方程:

$$dP_0(t) = P_0(t)r(t)dt, \quad P_0(0) = p_0 > 0, \quad (1)$$

其中 $r(t)$ 为名义利率. 设 n 种风险资产的名义价格 $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ 服从如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dP_i(t) = P_i(t) \left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW_j(t) \right], \\ P_i(0) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))'$ 为 m 维标准布朗运动, 表示影响风险资产价格的 m 种随机因素; $b_i(t)$ 为漂移率; $\sigma_{ij}(t)$ 为扩散率, $j = 1, 2, \dots, m$. 本文并不需要假定 $m = n$, 即不需假定市场是完备的. 现实中, 未来物价水平 $\Pi(t)$ (当前时刻为 $t = 0$, 未来时刻为 $t > 0$) 是随机的, 从而 $\Pi(t)$ 是一个随机过程, 假设 $\Pi(t)$ 服从如下随机微分方程^[16-17]:

$$d\Pi(t) = \Pi(t)[I(t)dt + \xi(t)dW_I], \quad \Pi(0) = \Pi_0. \quad (3)$$

其中: $W_I(t)$ 为 1 维标准布朗运动, 表示影响物价指数水平的随机因素; $I(t)$ 为期望通胀率; $\xi(t)$ 为通胀扩散率. 现实中, 影响风险资产价格与影响物价水平的随机因素 (用布朗运动描述) 可能相关, 设相关系数为

$$\rho_i(t) = \text{corr}(dW_i(t), dW_I(t)), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

根据布朗运动的有关数学性质, 有

$$E[dW_i(t)dW_I(t)] = \rho_i(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

令 $\rho(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_m(t))'$, 则有

$$E[dW(t)dW_I(t)] = \rho(t)dt.$$

注 1 $\pi(t) = \ln \Pi(t)$ 为通货膨胀率.

设 $(\Omega, F, P, \{F_t\}_{t \geq 0})$ 为一赋流完备概率空间, 其中: $F = \{F_t; t \geq 0\}$; $F_t = \sigma\{W(s), W_I(s); 0 \leq s \leq t\}$

是滤子族, 表示到时刻 t 为止的所有信息集. 令 $L_F^2(0, T; \mathbf{R}^n)$ 表示所有在 \mathbf{R}^n 上取值、可测、 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 适应的函数 $f(t)$ 的集合, 且满足 $E \int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty$.

现考虑一个投资者, 他在时刻 t 拥有的名义财富用 $x(t)$ 表示, 投资在第 i 种风险资产上的比例为 $\pi_i(t)$, 则 $x(t)$ 满足如下随机微分方程^[11-12]:

$$dx(t) = x(t)\{(r(t) + \pi'(t)B(t))dt + \pi'(t)\sigma(t)dW(t)\}, \quad (5)$$

其中: $\mathbf{1}$ 为每个分量均为 1 的 n 维向量, 且有

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\sigma_{ij}(t))_{n \times m}, \quad \pi(t) = \\ &(\pi_1(t), \pi_2(t), \dots, \pi_n(t))', \\ b(t) &= (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t))', \\ B(t) &= b(t) - \mathbf{1}r(t). \end{aligned}$$

设在时刻 t , 考虑通货膨胀因素后的真实财富为 $\bar{x}(t)$, 有 $\bar{x}(t) = x(t)/\Pi(t)$. 由式 (3) 和 (5), 应用伊藤引理得到 $\bar{x}(t)$ 服从如下随机微分方程:

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) = \{\bar{x}(t)(\bar{b}(t) + \pi'(t)\bar{B}(t))dt + \\ \pi'(t)\sigma(t)dW(t) - \xi(t)dW_I(t)\}, \\ \bar{x}(0) = x_0/\Pi_0 = \bar{x}_0. \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{b}(t) &= r(t) - I(t) + \xi^2(t), \\ \bar{B}(t) &= B(t) - \xi(t)\sigma(t)\rho(t). \end{aligned}$$

注 2 当 $I(t) = 0$, $\xi(t) = 0$ 时, $\bar{b}(t) = r(t)$, $\bar{B}(t) = B(t)$, 此时与文献 [3] 不考虑通货膨胀的情形是一致的, 所以文献 [3] 只是本文的一种特殊情况.

为了在数学上处理方便, 作如下假设.

假设 1 $\bar{B}(t) \neq \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{0}$ 为 n 维零向量.

假设 2 $(\sigma(t)\sigma'(t))$ 是可逆的.

称策略 $\pi(\cdot) = \{\pi(t); t \geq 0\}$ 为可行策略, 如果 $\pi(\cdot) \in L_F^2(0, T; \mathbf{R}^n)$, 且 $(\bar{x}(\cdot), \pi(\cdot))$ 满足式 (6), 则所有可行策略的集合为 $\mathcal{U}[0, T]$.

考虑通货膨胀因素下, 连续时间均值-方差投资组合选择问题是: 对于给定真实终端财富的期望 u , $E[\bar{x}(T)] = u$, 寻找最优的可行策略, 使得真实终端财富的风险达最小, 其中风险用方差来度量, 即

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{x}(T)] &= \\ E[\bar{x}(T) - E[\bar{x}(T)]]^2 &= E[\bar{x}(T) - u]^2. \end{aligned}$$

考虑通货膨胀因素时, 连续时间均值-方差模型可由如下随机最优控制问题得到:

$$\begin{cases} \min_{\pi(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T]} \text{Var}[\bar{x}(T)] = E[\bar{x}(T) - u]^2, \\ \text{s.t. } E[\bar{x}(T)] = u. \end{cases} \quad (7)$$

称随机最优控制问题(7)的最优解 $\pi(\cdot)$ 为有效策略, 设 $\text{Var}[\bar{x}(T)]$ 为式(7)中相对于 u 的最优值, 则 $(\text{Var}[\bar{x}(T)], u)$ 为一个有效点, 所有有效点的集合为有效边界.

2 问题转化与求解

最优控制问题(7)中的约束 $E[\bar{x}(T)] = u$ 可用Lagrange方法技术来处理^[8], 固定Lagrange乘子 λ 求以下最优控制问题:

$$\min_{\pi(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T]} E\{[\bar{x}(T) - u]^2 + 2\lambda[E\bar{x}(T) - u]\}. \quad (8)$$

由于

$$[\bar{x}(T) - u]^2 + 2\lambda[E\bar{x}(T) - u] = [\bar{x}(T) + a]^2 - (a + u)^2,$$

其中 $a = \lambda - u$, 此时 λ 固定, a 也固定, 求解最优控制问题(8)等价于求解如下最优控制问题:

$$\min_{\pi(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T]} E[\bar{x}(T) + a]^2. \quad (9)$$

假定从任意时刻 t 开始考虑该问题, 设此时可行策略的集合为 $\mathcal{U}[t, T]$, 定义最优值函数为

$$V(t, \bar{x}) = \min_{\pi(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]} E[(\bar{x}(T) + a)^2 | \bar{x}(t) = \bar{x}]. \quad (10)$$

显然, 当 $t = 0$ 时, $V(0, \bar{x})$ 即为最优控制问题(9)的最优值. 注意到, $E[dW(t)dW_I(t)] = \rho(t)dt$, 从而由动态规划理论可知 $V(t, \bar{x})$ 满足如下HJB方程:

$$\begin{cases} \inf \left\{ V_t + V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{b}(t) + \pi'(t)\bar{B}(t) + \frac{1}{2}V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}^2[\xi^2(t) + \pi'(t)\sigma(t)\sigma'(t)\pi(t) - 2\xi(t)\pi'(t)\sigma(t)\rho(t)] \right\} = 0, \\ V(T, \bar{x}) = (\bar{x} + a)^2 = \bar{x}^2 + 2a\bar{x} + a^2. \end{cases} \quad (11)$$

式(11)中第1个等式展开后即为

$$V_t + V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{b}(t) + \frac{1}{2}V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}^2\xi^2(t) + \inf_{\pi(t)} \left\{ \pi'(t)[V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{B}(t) - V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}^2\xi(t)\sigma(t)\rho(t)] + \frac{1}{2}V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}^2\pi'(t)\sigma(t)\sigma'(t)\pi(t) \right\} = 0. \quad (12)$$

根据式(12)关于 $\pi(t)$ 的一阶条件可得最优控制策略为

$$\pi^*(t) = - \frac{(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}(V_{\bar{x}}\bar{B}(t) - V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}\xi(t)\sigma(t)\rho(t))}{V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}}. \quad (13)$$

将式(13)代入(12), 整理后得到如下偏微分方程:

$$2V_t + 2V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{r}(t) - \frac{V_{\bar{x}}^2}{V_{\bar{x}\bar{x}}}v(t) + \gamma(t)V_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}^2 = 0. \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{r}(t) := \bar{b}(t) + \xi(t)\rho'(t)\sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\bar{B}(t), \\ v(t) := \bar{B}'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\bar{B}(t) > 0, \\ \gamma(t) = \xi^2(t)(1 - \rho'(t)\sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\sigma(t)\rho(t)). \end{cases} \quad (15)$$

猜测(后文证明)偏微分方程(14)解的形式为

$$V(t, \bar{x}) = \frac{1}{2}p(t)\bar{x}^2 + g(t)\bar{x} + c(t). \quad (16)$$

其中: $p(t) > 0$, $g(t)$ 和 $c(t)$ 是待定函数. 代入式(14)得

$$[\dot{p}(t) + (2\bar{r}(t) - v(t) + \gamma(t))p(t)]\bar{x}^2 + 2[\dot{g}(t) + (\bar{r}(t) - v(t))g(t)]\bar{x} + \left[2\dot{c}(t) - \frac{g^2(t)}{p(t)}v(t)\right] = 0.$$

由于 \bar{x} 为任意自变量, 若要以上等式恒成立则必有

$$\dot{p}(t) + (2\bar{r}(t) - v(t) + \gamma(t))p(t) = 0,$$

$$\dot{g}(t) + (\bar{r}(t) - v(t))g(t) = 0, \quad 2\dot{c}(t) - \frac{g^2(t)}{p(t)}v(t) = 0.$$

注意到, $V(t, x)$ 的边界条件 $V(T, \bar{x}) = \bar{x}^2 + 2a\bar{x} + a^2$, 得到 $p(t)$, $g(t)$, $c(t)$ 为以下微分方程的解:

$$\dot{p}(t) = p(t)(v(t) - 2\bar{r}(t) - \gamma(t)), \quad p(T) = 2, \quad (17)$$

$$\dot{g}(t) = g(t)(v(t) - \bar{r}(t)), \quad g(T) = 2a, \quad (18)$$

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{2} \frac{g^2(t)}{p(t)} \rho(t), \quad c(T) = a^2. \quad (19)$$

求解微分方程(17)~(19)得到 $p(t)$, $g(t)$, $c(t)$ 的表达式为

$$p(t) = 2K(t), \quad g(t) = 2aL(t), \quad c(t) = a^2M(t). \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} K(t) := e^{-\int_t^T (v(s) - 2\bar{r}(s) - \gamma(s))ds}, \\ L(t) := e^{-\int_t^T (v(s) - \bar{r}(s))ds}, \\ M(t) := 1 - \int_t^T e^{-\int_t^z (v(s) + \gamma(s))ds} v(z) dz. \end{cases} \quad (21)$$

从而得到最优控制问题(10)的最优值函数为

$$V(t, \bar{x}) = K(t)\bar{x}^2 + 2aL(t)\bar{x} + a^2M(t). \quad (22)$$

将式(22)代入(13)得到最优控制问题(10)的最优策略为

$$\pi^*(t, \bar{x}) = - \left(1 + \frac{aL(t)}{K(t)\bar{x}(t)}\right) (\sigma(t)\sigma'(t))^{-1} \bar{B}(t). \quad (23)$$

3 模型的有效投资策略及有效边界

由上述分析可知, 当 $t = 0$ 时, 得到最优控制问题(9)的最优值函数为

$$V(0, x_0) = K(0)\bar{x}_0^2 + 2aL(0)\bar{x}_0 + a^2M(0).$$

最优控制问题(8)的最优值函数为

$$G(\bar{x}_0, a) := V(0, \bar{x}_0) - (a + u)^2 =$$

$$(M(0) - 1)a^2 + 2(L(0)\bar{x}_0 - u)a + (K(0)\bar{x}_0^2 - u^2),$$

其中 $a = \lambda - u$. 由Lagrange对偶定理^[18]可知, 最优控制问题(7)的最优值即最小方差可由如下最优化问题得到:

$$\text{Var}[\bar{x}(T)] = \max_a G(\bar{x}_0, a). \quad (24)$$

为了表明以上最优化问题的解存在, 给出如下3个引理.

引理1 对于任意 $t \in [0, T]$, 有 $\rho(t)\rho'(t) \leq 1$.

证明 由于 $E[dW(t)dW_I(t)] = \rho(t)dt$, 令

$$\bar{W} = \frac{dW(t)}{\sqrt{dt}}, \bar{W}_I = \frac{dW_I(t)}{\sqrt{dt}},$$

则有 $E[\bar{W}\bar{W}_I] = \rho(t)$. 又由标准布朗运动可知 $E[\bar{W}_I^2] = 1$, $E[\bar{W}\bar{W}'] = I_m$, 其中 I_m 为 m 阶单位矩阵. 将 \bar{W}_I 分解为 $\bar{W}_I = (\bar{W}_I - \rho'(t)\bar{W}) + \rho'(t)\bar{W}$, 则有

$$\begin{aligned} 1 &= \\ E[\bar{W}_I^2] &= E[(\bar{W}_I - \rho'(t)\bar{W}) + \rho'(t)\bar{W}]^2 = \\ E[(\bar{W}_I - \rho'(t)\bar{W})^2] &+ E[\rho'(t)\bar{W}\bar{W}'\rho(t)] + \\ 2E[(\bar{W}_I - \rho'(t)\bar{W})\bar{W}'\rho(t)] &= \\ E[(\bar{W}_I - \rho'(t)\bar{W})^2] &+ \rho'(t)E[\bar{W}\bar{W}']\rho(t) + \\ 2E[\bar{W}_I\bar{W}']\rho(t) &- 2\rho'(t)E[\bar{W}\bar{W}']\rho(t) = \\ E[(\bar{W}_I - \rho'(t)\bar{W})^2] &+ \rho'(t)\rho(t). \end{aligned}$$

因为 $E[(\bar{W}_I - \rho'(t)\bar{W})^2] \geq 0$, 所以 $\rho'(t)\rho(t) \leq 1$. \square

引理 2 对于任意 $t \in [0, T]$, 有: 1) $\gamma(t) \geq 0$; 2) 当 $\xi(t) = 0$, 或 $\rho(t)\rho'(t) = 1$ 且 $\sigma(t)$ 可逆时, $\gamma(t) = 0$.

证明 1) 由引理 1 可知 $\rho(t)\rho'(t) \leq 1$, 从而有

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \\ \xi^2(t)(1 - \rho'(t)\sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\sigma(t)\rho(t)) &\geq \\ \xi^2(t)(\rho'(t)\rho(t) - \rho'(t)\sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\sigma(t)\rho(t)) &= \\ \xi^2(t)\rho'(t)H(t)\rho(t), \end{aligned}$$

其中 $H(t) = I_m - \sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\sigma(t)$. 容易证明 $H(t) = H'(t)$, $H^2(t) = H(t)$, 从而有

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\geq \xi^2(t)\rho'(t)H(t)\rho(t) = \xi^2(t)\rho'(t)H^2(t)\rho(t) = \\ \xi(t)\rho'(t)H(t)(\xi(t)\rho'(t)H(t))' &\geq 0. \end{aligned}$$

2) 由 $\gamma(t)$ 的表达式可知, 当 $\xi(t) = 0$, 或 $\rho(t)\rho'(t) = 1$ 且 $\sigma(t)$ 可逆时, $\gamma(t) = 0$. \square

引理 3 对于任意 $t \in [0, T]$, 有: 1) $0 < L^2(t)/K(t) \leq M(t) < 1$; 2) 当且仅当 $\gamma(t) \equiv 0$ 时, $L^2(t)/K(t) = M(t)$.

证明 1) 由引理 2 可知, 对于任意 $t \in [0, T]$, $\gamma(t) \geq 0$, 又因为 $v(t) = \bar{B}'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\bar{B}(t) > 0$, 从而有

$$M(t) = 1 - \int_t^T e^{-\int_z^T (v(s)+\gamma(s))ds} v(z) dz < 1.$$

另一方面, 由于 $\gamma(t) \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} M(t) &\geq 1 - \int_t^T e^{-\int_z^T (v(s)+\gamma(s))ds} (v(z) + \gamma(z)) dz = \\ e^{-\int_t^T (v(s)+\gamma(s))ds} &= \frac{L^2(t)}{K(t)} > 0. \end{aligned}$$

2) 由于 $\gamma(t) \geq 0$, 容易证明当且仅当 $\gamma(t) \equiv 0$ 时, $L^2(t)/K(t) = M(t)$. \square

引理 3 表明, $0 < M(0) < 1$, 最优化问题 (24) 的最优解是存在的, 关于 a 求一阶条件得到最优解为

$$a^* = \frac{L(0)x_0 - u}{1 - M(0)}, \quad (25)$$

代入式 (23), 得到最优控制问题 (7) 的最优策略, 即有

效投资策略为

$$\begin{aligned} \pi^*(t, \bar{x}) &= \\ - \left(1 + \frac{(L(0)\bar{x}_0 - u)L(t)}{(1 - M(0))K(t)\bar{x}(t)} \right) &(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\bar{B}(t). \end{aligned} \quad (26)$$

将式 (25) 代入 (24) 得到最优控制问题 (7) 的最优值, 即最小方差为

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{x}(T)] &= \\ \frac{M(0)}{1 - M(0)} \left(u - \frac{L(0)\bar{x}_0}{M(0)} \right)^2 &+ \frac{K(0)M(0) - L^2(0)}{M(0)} \bar{x}_0^2. \end{aligned} \quad (27)$$

由引理 2 可知, $M(0)/(1 - M(0)) > 0$, 当投资者设定真实终端财富的期望为 $u_{\sigma_{\min}} := L(0)\bar{x}_0/M(0)$ 时, 可得所有可行投资策略中的全局最小方差为

$$\text{Var}_{\min}[\bar{x}(T)] = \frac{K(0)M(0) - L^2(0)}{M(0)} \bar{x}_0^2. \quad (28)$$

由引理 2 可知, $(K(0)M(0) - L^2(0))/M(0) \geq 0$, 从而全局最小差 $\text{Var}_{\min}[\bar{x}(T)] \geq 0$. 显然投资者不会设定真实终端财富的期望小于 $u_{\sigma_{\min}}$ 来选择投资策略, 所以以下定理成立.

定理 1 考虑通货膨胀因素, 连续时间均值-方差投资组合选择模型相对于真实终端财富期望 $E[\bar{x}(T)] = u$ 的有效投资策略由式 (26) 给出, 有效边界由式 (27) 给出, 其中 $u \geq u_{\sigma_{\min}}$.

令 $\sigma_{\bar{x}(T)} = \sqrt{\text{Var}[\bar{x}(T)]}$ 表示真实终端财富的标准差, 若 $(K(0)M(0) - L^2(0))/M(0) > 0$, 则有效边界可进一步表示为

$$\frac{\sigma_{\bar{x}(T)}^2}{a^2} - \frac{(u - u_{\sigma_{\min}})^2}{b^2} = 1, \quad u \geq u_{\sigma_{\min}}.$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{K(0)M(0) - L^2(0)\bar{x}_0^2}{M(0)}}, \\ b &= \sqrt{\frac{[K(0)M(0) - L^2(0)\bar{x}_0^2](1 - M(0))}{M^2(0)}}. \end{aligned}$$

此时有效边界为标准差-均值坐标平面上双曲线的右上支, 不再是一条直线, 这与不考虑通货膨胀因素是不同的^[3].

定理 2 当且仅当 $\gamma(t) \equiv 0$ 时, 全局最小方差都为零, 此时连续时间均值-方差模型的有效边界为

$$E[\bar{x}(T)] = \bar{x}_0 e^{\int_0^T \bar{r}(s)ds} + \sqrt{\frac{1 - e^{-\int_0^T v(s)ds}}{e^{-\int_0^T v(s)ds}}} \sigma_{\bar{x}(T)}, \quad (29)$$

即仍为标准差-均值坐标平面的一条直线.

证明 由引理 3 及其证明可知, 当且仅当对于任意 $t \in [0, T]$, $\gamma(t) = 0$ 时, 有 $L^2(0)/K(0) = M(0)$, 此时有

$$K(0) = e^{-\int_0^T (v(s) - 2\bar{r}(s))ds},$$

$$L(0) = e^{-\int_0^T (v(s) - \bar{r}(s))ds}, M(0) = e^{-\int_0^T v(s)ds}.$$

代入式 (28) 可得全局最小方差均为零, 代入式 (27) 可得 (29). \square

注 3 当 $\xi(t) = 0, I(t) = 0$ 时, 有 $\bar{r}(t) = r(t), v(t) = B'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}B(t), \gamma(t) = 0$, 此时有效边界 (29) 与文献 [3] 的结果是完全一致的.

注 3 中, $\gamma(t)$ 和 $\bar{r}(t)$ 的经济含义如下: 由定理 2 可知, 当 $\gamma(t) \equiv 0$ 时, 全局最小方差为零, 此时, 由式 (29) 可以构造出无风险真实财富过程 $\bar{x}(T) = \bar{x}_0 e^{\int_0^T \bar{r}(s)ds}$, $\bar{r}(t)$ 即为相应收益率; 当 $\gamma(t) > 0$ 时, 全局最小方差严格大于零, 此时不能构造出无风险财富过程. 所以, $\gamma(t)$ 可理解为全局最小方差对应真实财富过程的波动率, $\bar{r}(t)$ 可理解为等效真实无风险利率.

推论 1 当 $\xi(t) \equiv 0$, 或 $\rho(t)'\rho(t) \equiv 1$ 且对于任意 $t \in [0, T)$, $\sigma(t)$ 可逆时, 全局最小方差均为零, 此时连续时间均值-方差模型的有效边界为直线, 由式 (29) 给出.

推论 1 的经济解释如下: 1) 当 $\xi(t) = 0$ 时, 由式 (3) 可知, 物价水平过程并没有受随机因素影响, 是一个确定的过程, 完全可以被投资者预测到, 所以能够构造出无风险真实财富过程, 即全局最小方差为 0; 2) 当 $\rho(t)'\rho(t) = 1$ 且 $\sigma(t)$ 可逆时, 物价水平的随机因素 $W_I(t)$ 完全可由市场风险资产的随机因素 $W(t)$ 所解释, 而且市场是完备的, 物价水平的随机因素可通过市场上的资产组合来完全对冲, 所以, 此时也可以构造出无风险真实财富过程, 全局最小方差也为 0.

4 实证分析

选取中国深沪证券交易所上市的 5 支股票: 靖远煤电 (000552)、泰山石油 (000554)、平庄能源 (000780)、江钻股份 (000852)、西山煤电 (000983). 分析从 2010 年 5 月 4 日至 2011 年 6 月 1 日所有交易日的原始数据, 得到 $T = 262$ 个日毛收益率样本数据 $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$. 另外, 本文采用的是连续时间模型, 需要对原始数据作取对数变换. 根据数据计算出 5 支股票年化 (即以年为单位时间, 将计算结果扩大 365 倍) 漂移 (期望) 向量和波动 (协方差) 矩阵分别为

$$b(t) = (0.2259, 0.3376, 0.3800, 0.2600, 0.0280)',$$

$$\sigma(t)\sigma'(t) =$$

$$\begin{bmatrix} 0.2611 & 0.0923 & 0.1892 & 0.1364 & 0.1886 \\ 0.0923 & 0.2174 & 0.0863 & 0.1086 & 0.0914 \\ 0.1892 & 0.0863 & 0.2221 & 0.1179 & 0.1779 \\ 0.1364 & 0.1086 & 0.1179 & 0.2756 & 0.1097 \\ 0.1886 & 0.0914 & 0.1779 & 0.1097 & 0.2391 \end{bmatrix}.$$

需要说明的是, 根据式 (2) 和随机分析理论, 5 支股票收益率 (取对数后) 的协方差矩阵等于 $\sigma(t)\sigma'(t)$, 并不等于 $\sigma(t)$. 根据矩阵的 Cholesky 分解可得

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} 0.5110 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1805 & 0.4299 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3703 & 0.0452 & 0.2880 & 0 & 0 \\ 0.2670 & 0.1405 & 0.0441 & 0.4274 & 0 \\ 0.3692 & 0.0576 & 0.1342 & -0.0066 & 0.2855 \end{bmatrix}.$$

取我国当前一年期银行存款利率为无风险年利率, 即 $r(t) = 3.5\% = 0.035$. 从凤凰网“财经”栏搜集 2010 年 5 月 4 日至 2011 年 6 月 1 日我国的物价指数数据 (取对数), 并结合以上股票数据, 估计出关于通货膨胀的相关年化参数值为

$$I(t) = 0.0439, \xi(t) = 0.5060,$$

$$\rho(t) = (0.2458, 0.0908, 0.2900, -0.1077, -0.6735)'$$

将数据代入式 (26) 和 (27), 得有效投资策略为

$$\pi^*(t, \bar{x}) = \begin{bmatrix} -0.4327 \\ 1.0945 \\ 2.5883 \\ 0.2084 \\ -2.0079 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\frac{(u - e^{-0.8376T}\bar{x}_0)e^{-0.1478(T-t)}}{0.9007(1 - e^{-0.9854T})\bar{x}(t)} - 1 \right)$$

有效边界为

$$\text{Var}[\bar{x}(T)] = \frac{0.1102 + e^{-0.9854T}}{1 - e^{-0.9854T}} \times \left(u - \frac{e^{-0.8376T}\bar{x}_0}{0.0993 + 0.9007e^{-0.9854T}} \right)^2 + \frac{e^{-0.6898T} - e^{-1.6752T}}{1 + 9.0743e^{-0.9854T}} \bar{x}_0^2.$$

若设初始物价水平和初始财富都为 1, 即初始真实财富 $\bar{x}_0 = 1, T = 3$, 则此时有效投资策略为

$$\pi^*(t, \bar{x}) = \begin{bmatrix} -0.4327 \\ 1.0945 \\ 2.5883 \\ 0.2084 \\ -2.0079 \end{bmatrix},$$

$$\left(\frac{(0.7516u - 0.0609)e^{0.1673T}}{\bar{x}(t)} - 1 \right)$$

有效边界为

$$\text{Var}[x(3)] = 0.0794(E[x(3)] - 0.7374)^2 + 0.0496.$$

显然, 此时全局最小方差 $0.0496 > 0$, 且对应的期望真实财富 $0.7374 < \bar{x}_0 = 1$. 表明在高通胀时期, 太保守的投资策略 (如银行存款) 会导致真实财富变小 (贬值). 这与直观理解也是一致的, 原因是期望通货膨胀率 $I(t) = 0.0439$ 大于无风险年利率 $r(t) = 0.035$.

令 $\sigma_{\bar{x}(T)} = \sqrt{\text{Var}[\bar{x}(T)]}$, 有效边界可表示为

$$\frac{\sigma_{\bar{x}(3)}^2}{0.0496} - \frac{(u - 0.7374)^2}{0.6246} = 1,$$

此时有效边界为标准差-均值坐标平面上的双曲线。

注 4 本算例的数据和计算结果均取 4 位有效数字, 所有的计算均在 Matlab 上完成。

5 结 论

在考虑通货膨胀因素下, 本文研究了连续时间均值-方差投资组合选择问题. 利用 Lagrange 乘子技术和动态规划方法得到了有效投资策略及均值-方差有效边界的解析表达式. 研究结论表明, 与文献 [3] 不考虑通货膨胀情形不同, 此时有效边界一般不再是标准差-均值平面上的直线, 而是双曲线的一支, 并且给出了有效边界是直线的充要条件. 最后, 用一个实证分析表明了本文的结论.

参考文献(References)

- [1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. J of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [2] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387-406.
- [3] Zhou X Y, Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework[J]. Applied Mathematics Optimization, 2000, 42(1): 19-33.
- [4] Zhu S S, Li D, Wang S Y. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(3): 447-457.
- [5] Wei S Z, Ye Z X. Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186(1): 414-425.
- [6] Oswaldo L V C, Michael V A. A generalized multi-period mean-variance portfolio optimization with Markov switching parameters[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2487-2497.
- [7] Li X, Zhou X Y, Lim A E B. Dynamic mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2002, 40(5): 1540-1555.
- [8] 闫伟, 李树荣, 孙焕泉. 基于风险价值约束的动态均值-方差投资组合的研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 169-173.
(Yan W, Li S R, Sun H Q. Research on dynamic mean-variance portfolio selection under a value at risk constraint[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 169-173.)
- [9] Chen P, Yang H L, Yin G. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: A continuous-time model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43(3): 456-465.
- [10] Xie S X, Li Z F, Wang S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: Mean-variance model and stochastic LQ approach[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 943-953.
- [11] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time model[J]. Review of Economic and Statistics, 1969, 51(3): 247-256.
- [12] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. J of Economic Theory, 1971, 3(4): 373-413.
- [13] Lucie T. Optimal portfolio policies with borrowing and shortsale constraints[J]. J of Economic Dynamics and Control, 2000, 24(12): 1623-1639.
- [14] Lakner P, Nygren L M. Portfolio optimization with downside constraints[J]. Mathematical Finance, 2006, 16(2): 283-299.
- [15] Yuan H L, Hu Y J. Optimal consumption and portfolio policies with the consumption habit constraints and the terminal wealth downside constraints[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45(3): 405-409.
- [16] Brennan M J, Xia Y. Dynamic asset allocation under inflation[J]. The J of Finance, 2002, 57(3): 1201-1238.
- [17] Bensoussan A, Keppo J, Sethi S P. Optimal consumption and portfolio decisions with partially observed real prices[J]. Mathematical Finance, 2009, 19(2): 215-236.
- [18] Luenberger D G. Optimization by vector space methods[M]. New York: Wiley, 1968: 223-225.
- [16] Nørgaard M, Poulsen N K, Ravn O. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems[R]. Copenhagen: Technical University of Denmark, 2000: 1-33.
- [17] Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking: Dynamic models[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(4): 1333-1364.
- [18] Schuhmacher D, Vo B T, Vo B N. A consistent metric for performance evaluation of multi-object filters[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(8): 3447-3457.

(上接第42页)