文章编号: 1001-0920 (2012) 12-1793-07

基于模糊结构元的模糊数直觉模糊多准则决策方法

汪新凡[1,2], 王坚强[2], 杨小娟[1]

(1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 中南大学 商学院，长沙 410083)

摘　要: 针对准则权重信息不完全确定的模糊数直觉模糊多准则决策问题, 采用模糊结构元方法进行处理. 基于模糊数直觉模糊集的模糊结构元表示、模糊数比较和排序的模糊结构元方法以及直觉模糊数的记分函数和距离测度, 定义了模糊数直觉模糊数的记分函数和距离测度, 进而提出两种准则权重信息不完全确定而准则值为模糊数直觉模糊数的多准则决策方法: 记分函数法和逼近理想解排序 (TOPSIS) 法. 实例分析表明了这两种方法的可行性和有效性.

关键词: 多准则决策；模糊数直觉模糊集；模糊结构元；记分函数；距离测度；逼近理想解排序

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

Approach to fuzzy number intuitionistic fuzzy multi-criteria decision making based on fuzzy structured element

WANG Xin-fan[1,2], *WANG Jian-qiang*[2], *YANG Xiao-juan*[1]

(1. School of Science，Hu'nan University of Technology，Zhuzhou 412007，China；2. School of Business，Central South University，Changsha 410083，China. Correspondent：WANG Xin-fan，E-mail：zzwxfydm@126.com)

Abstract: A fuzzy structured element method is applied to deal with fuzzy number intuitionistic fuzzy multi-criteria decision making problems with incomplete certain information on criteria's weights. Based on the representation of fuzzy structured element of fuzzy number intuitionistic fuzzy set, the method of fuzzy structured element of fuzzy numbers' comparison and sequencing, and the score function and distance measure of intuitionistic fuzzy numbers, the score function and distance measure of fuzzy number intuitionistic fuzzy numbers are defined. Furthermore, two multi-criteria decision making approaches are proposed, such as the score function method, and the technique for order preference by similarity to ideal solution(TOPSIS) method, in which the criteria values are fuzzy number intuitionistic fuzzy numbers, and the criteria weight information is incompletely certain. Finally, an example is given to show the feasibility and effectiveness of the proposed methods.

Key words: multi-criteria decision making；fuzzy number intuitionistic fuzzy set；fuzzy structured element；score function；distance measure；technique for order preference by similarity to ideal solution(TOPSIS)

1 引　言

1986 年, Atanassov[1]将模糊集[2]进行扩展, 提出了直觉模糊集的概念. 1993 年, Gau 等[3]提出了 Vague 集的概念, 之后文献 [4] 指出 Vague 集即为直觉模糊集. 直觉模糊集同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个方面的信息, 能够更加细腻地刻画客观世界的模糊性和不确定性, 在处理不确定性方面比传统模糊集更具有灵活性和实用性, 因而引起众多学者的关注, 已被广泛应用于决策分析、人工智能、模式识别和智能信息处理等领域[5-7]. 文献 [8] 用区间数表示隶属度和非隶属度, 将直觉模糊集扩展至区间直觉模糊集. 文献 [9] 用三角模糊数表示隶属度和非隶属度, 将直觉模糊集进一步扩展至模糊数直觉模糊集. 文献 [10-11] 给出了几种模糊数直觉模糊信息集成算子, 并提出了准则值为模糊数直觉模糊数的群决策方法.

文献 [12] 提出了模糊结构元的概念, 并且给出了模糊数的结构元表示方法. 文献 [13] 得到了有界实模糊数与 $[-1, 1]$ 上同序单调有界函数类同胚的性质, 这表明对有界实模糊数的研究可以转化为对 $[-1, 1]$ 上的同序单调有界函数的研究. 文献 [14] 考

收稿日期: 2011-08-23；**修回日期:** 2012-01-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71271218, 70921001, 61174075)；教育部人文社科基金项目 (10YJC630338, 12YJA630114)；湖南省社会科学基金项目 (09YBB120)；湖南省自然科学基金项目 (11JJ6068).

作者简介: 汪新凡(1966−), 男, 教授, 博士生, 从事不确定决策、集成算子等研究; 王坚强(1963−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究.

虑到文献 [9] 中用三角模糊数表示隶属度和非隶属度的局限性, 用模糊结构元方法将直觉模糊集扩展至一般模糊数直觉模糊集, 即用一般模糊数表示隶属度和非隶属度, 所定义的模糊数直觉模糊集的概念更加具有普遍性和应用性 (文献 [14] 中称一般模糊数直觉模糊集为模糊数直觉模糊集, 以后本文中均这样处理, 并将文献 [9] 中的模糊数直觉模糊集作为其特例, 称为三角模糊数直觉模糊集). 文献 [15] 给出了基于模糊结构元的模糊数直觉模糊集的相关运算和性质. 虽然模糊结构元理论为模糊数直觉模糊多准则决策问题的研究提供了新的思路和方法, 但尚未见到相关文献报道. 本文针对准则权重信息不完全确定而准则值为模糊数直觉模糊数的多准则决策问题, 利用模糊结构元方法进行处理. 基于模糊数直觉模糊集的模糊结构元表示、模糊数比较的元序以及直觉模糊数的记分函数和距离测度定义了模糊数直觉模糊数的记分函数和距离测度. 基于该记分函数和距离测度提出了两种准则权重信息不完全确定的模糊数直觉模糊多准则决策方法: 记分函数法和 TOPSIS 法. 最后进行了实例分析, 表明了两种方法的有效性.

2 模糊结构元与模糊数直觉模糊集

定义 1[12] 设 E 为实数域 R 上的模糊集, 隶属函数记为 $E(x), x\in R$. 如果 $E(x)$ 满足如下性质: 1) $E(0)=1$; 2) 在 $[-1,0)$ 上 $E(x)$ 是单增右连续函数, 在 $(0,1]$ 上是单减左连续函数; 3) 在 $(-\infty,-1)$ 或 $(1,+\infty)$ 上, $E(x)=0$. 则称 E 为 R 上的模糊结构元.

定义 2[12] 设 E 为 R 上的模糊结构元, 具有隶属函数 $E(x)$, 如果 $E(x)$ 满足: 1) $\forall x\in(-1,1)$, $E(x)>0$; 2) $E(x)$ 连续, 且在 $[-1,0)$ 上严格单调递增, 在 $(0,1]$ 上严格单调递减. 则称 E 为正则模糊结构元. 如果 $E(x)$ 满足 $E(-x)=E(x)$, 则称 E 为对称模糊结构元.

定理 1[12] 设 E 为 R 上的任意模糊结构元, 具有隶属函数 $E(x)$, 又设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调有界, 则 $f(E)$ 是 R 上的有界闭模糊数, 且 $f(E)$ 的隶属函数为 $E(f^{-1}(x))$, 这里 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 关于变量 x 和 y 的轮换对称函数 (若 $f(x)$ 是连续严格单调的, 则 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数).

定理 2[12] 对于给定的正则模糊结构元 E 和任意的有界闭模糊数 $\tilde{A}$, 总存在一个 $[-1,1]$ 上的单调有界函数 $f(x)$, 使得 $\tilde{A}=f(E)$, 并称模糊数 $\tilde{A}$ 是由模糊结构元 E 生成的.

例如, 对于三角模糊数 $\tilde{A}=(a,b,c)$, 其隶属函数

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}(x-a)/(b-a),\ a\leqslant x\leqslant b;\\(x-c)/(b-c),\ b\leqslant x\leqslant c;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

对于三角模糊结构元 E, 其隶属函数为

$$E(x)=\begin{cases}1+x,\ -1\leqslant x\leqslant 0;\\1-x,\ 0<x\leqslant 1;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}\tag{1}$$

以及在 $[-1,1]$ 上单调的有界函数

$$f(x)=\begin{cases}(b-a)x+b,\ -1\leqslant x\leqslant 0;\\(c-b)x+b,\ 0<x\leqslant 1.\end{cases}\tag{2}$$

则模糊数 $\tilde{A}$ 可用模糊结构元 E 表示为 $\tilde{A}=f(E)$.

定义 3[14] 设论域 Y 是一个非空有限集合, 称

$$A=\{(y,\langle\tilde{M}(y),\tilde{N}(y)\rangle)|y\in Y\}\tag{3}$$

为 Y 上的一个模糊数直觉模糊集, 其中 $\tilde{M}(y)$ 和 $\tilde{N}(y)$ 为 $[0,1]$ 上的两个一般模糊数 (其隶属函数分别为 $\mu_{\tilde{M}(y)}(x)$ 和 $\mu_{\tilde{N}(y)}(x)$, $x\in[0,1]$), $\tilde{M}(y)$ 表示 Y 中元素 y 属于 A 的程度, $\tilde{N}(y)$ 表示 Y 中元素 y 不属于 A 的程度, 且满足条件 $0\leqslant\sup\tilde{M}(y)+\sup\tilde{N}(y)\leqslant 1, \forall y\in Y$. 当 $\tilde{M}(y)$ 和 $\tilde{N}(y)$ 为 $[0,1]$ 上的两个实数时, 模糊数直觉模糊集退化为直觉模糊集[1].

取正则模糊结构元 E, 则模糊数直觉模糊集 (3) 可用模糊结构元表示为

$$A=\{(y,\langle f_y(E),g_y(E)\rangle)\,|y\in Y\}.\tag{4}$$

其中: $\tilde{M}(y)=f_y(E)$, $\tilde{N}(y)=g_y(E)$, $f_y(x)$ 和 $g_y(x)$ 均为 $[-1,1]$ 到 $[0,1]$ 上的同序单调函数. 由模糊数直觉模糊集的定义可知, 模糊数 $f_y(E)$ 和 $g_y(E)$ 均为正模糊数.

参照直觉模糊数和区间直觉模糊数[7]的定义, 称 $\tilde{\beta}=\langle\tilde{M}_{\tilde{\beta}},\tilde{N}_{\tilde{\beta}}\rangle$ 为模糊数直觉模糊数, 用模糊结构元表示为 $\tilde{\beta}=\langle f_{\tilde{\beta}}(E),g_{\tilde{\beta}}(E)\rangle$, 并设 Ω 为所有这种模糊数直觉模糊数组成的集合.

3 模糊数直觉模糊数的记分函数和距离测度

为了对直觉模糊数进行比较和排序, 文献 [16] 定义了一个记分函数来表示决策方案满足决策者要求的程度, 文献 [17] 分析了记分函数的不足之后, 追加精确函数以表示直觉模糊数所反映出的隶属情况的精确度.

定义 4[16-17] 设 $\tilde{\alpha}=(\mu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\alpha}})$ 为直觉模糊数, 则其记分函数 $s(\tilde{\alpha})$ 和精确函数 $h(\tilde{\alpha})$ 分别为

$$s(\tilde{\alpha})=\mu_{\tilde{\alpha}}-\nu_{\tilde{\alpha}},\tag{5}$$

$$h(\tilde{\alpha})=\mu_{\tilde{\alpha}}+\nu_{\tilde{\alpha}}.\tag{6}$$

由定义 4 可知, 直觉模糊数 $\tilde{\alpha}$ 的记分值 $s(\tilde{\alpha})$ 和精确度 $h(\tilde{\alpha})$ 均与 $\tilde{\alpha}$ 的隶属度 $\mu_{\tilde{\alpha}}$ 和非隶属度 $\nu_{\tilde{\alpha}}$ 直接相关. $\mu_{\tilde{\alpha}}$ 和 $\nu_{\tilde{\alpha}}$ 的差值越大, $s(\tilde{\alpha})$ 越大, 从而直觉模糊数 $\tilde{\alpha}$ 越大. 若 $s(\tilde{\alpha})=1$, 则 $\tilde{\alpha}$ 取最大值 $(1,0)$; 若 $s(\tilde{\alpha})=-1$,

则 $\tilde{\alpha}$ 取最小值 $(0,1)$. 同时, $\mu_{\tilde{\alpha}}$ 与 $\nu_{\tilde{\alpha}}$ 的和值越大, $h(\tilde{\alpha})$ 越大, 直觉模糊数 $\tilde{\alpha}$ 的精确度越高. 进一步, 由文献 [17] 可知, 记分函数和精确函数类似于统计学中的均值和方差, 因此, 基于均值-方差准则 (即先按均值收益选取方案, 若均值收益相同则选取方差最小方案), 文献 [18] 定义了直觉模糊数的一种比较与排序方法, 即先根据记分值对直觉模糊数进行比较和排序, 记分值越大, 直觉模糊数越大; 在直觉模糊数的记分值相等的情况下, 再利用精确度对直觉模糊数进行比较和排序, 精确度越高, 相应的直觉模糊数越大.

文献 [10-11,19] 将这两个函数进行拓展, 分别定义了区间直觉模糊数和三角模糊数直觉模糊数的记分函数和精确函数, 以便对它们进行比较和排序.

文献 [20] 利用模糊数的结构元加权序, 对模糊数进行比较和排序.

定义 5[20] 设 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 为任意两个有界闭模糊数, 其模糊结构元表达形式分别为 $\tilde{A}_1 = f_1(E)$, $\tilde{A}_2 = f_2(E)$, 其中 E 为某个给定的正则模糊结构元, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 均为 $[-1,1]$ 上的同序单调有界函数, 则称由下式:

$$\tilde{A}_1 \leqslant \tilde{A}_2 \Leftrightarrow$$

$$d_E(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2) = \int_{-1}^{1} E(x)\,[f_1(x) - f_2(x)]\mathrm{d}x \leqslant 0 \quad (7)$$

确定的关系 "$\leqslant$" 为模糊数的结构元加权序.

文献 [21] 则指出: 结构元加权序为全序, 解决了遍历性的困扰问题, 使模糊数的比较与排序非常简便; 不足的是, 其比较的结果有时不符合理性人的决策准则 (即均值-方差准则). 为克服此不足, 文献 [21] 定义了模糊数的元序, 以便更好地对模糊数进行比较和排序.

定义 6[21] 设 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 为任意两个有界闭模糊数, 其模糊结构元表达形式分别为 $\tilde{A}_1 = f_1(E)$, $\tilde{A}_2 = f_2(E)$, 其中 E 为某个给定的正则模糊结构元, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 均为 $[-1,1]$ 上的同序单调有界函数, 则称由下式:

$$\tilde{A}_1 \leqslant \tilde{A}_2 \Leftrightarrow$$

$$d_E(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2) = \int_{-1}^{1} (1-x)\,[f_1(x) - f_2(x)]\mathrm{d}x \leqslant 0 \quad (8)$$

确定的关系 "$\leqslant$" 为模糊数的元序.

基于以上分析, 本文将模糊数的元序和直觉模糊数的记分函数、精确函数进行整合拓展, 定义基于模糊结构元的模糊数直觉模糊数的记分函数, 以便对模糊数直觉模糊数进行比较和排序.

定义 7 设 $\tilde{\beta} = \langle f_{\tilde{\beta}}(E), g_{\tilde{\beta}}(E)\rangle$ 为任意的模糊数直觉模糊数, 则称

$$s(\tilde{\beta}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x)[f_{\tilde{\beta}}(x) - g_{\tilde{\beta}}(x)]\mathrm{d}x \quad (9)$$

为 $\tilde{\beta}$ 的记分函数. 显然, $s(\tilde{\beta})$ 越大, $\tilde{\beta}$ 越大.

进一步, 基于模糊数的元序和文献 [22] 给出的直觉模糊集之间的距离公式, 定义基于模糊结构元的模糊数直觉模糊数之间的两种距离测度.

定义 8 设 $\tilde{\beta}_1$ 和 $\tilde{\beta}_2$ 为两个模糊数直觉模糊数, d 是一个映射, 即 $d: \Omega \times \Omega \to R$. 如果 $d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2)$ 满足: 1) $d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2) \geqslant 0$; 2) $d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2$; 3) $d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2) = d(\tilde{\beta}_2,\tilde{\beta}_1)$; 4) 若 $\tilde{\beta}_3$ 是任一模糊数直觉模糊数, 有 $d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_3) \leqslant d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2) + d(\tilde{\beta}_2,\tilde{\beta}_3)$, 则 $d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2)$ 为模糊数直觉模糊数 $\tilde{\beta}_1$ 和 $\tilde{\beta}_2$ 之间的距离.

定义 9 设 $\tilde{\beta}_1 = \langle f_{\tilde{\beta}_1}(E),\ g_{\tilde{\beta}_1}(E)\rangle$, $\tilde{\beta}_2 = \langle f_{\tilde{\beta}_2}(E), g_{\tilde{\beta}_2}(E)\rangle$ 为任意的两个模糊数直觉模糊数, 则:

1) $\tilde{\beta}_1$ 和 $\tilde{\beta}_2$ 的 Hamming 距离为

$$d(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x)(|f_{\tilde{\beta}_1}(x) - f_{\tilde{\beta}_2}(x)| + |g_{\tilde{\beta}_1}(x) - g_{\tilde{\beta}_2}(x)|)\mathrm{d}x; \quad (10)$$

2) $\tilde{\beta}_1$ 和 $\tilde{\beta}_2$ 的 Euclidean 距离为

$$\tilde{d}(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x)((f_{\tilde{\beta}_1}(x) - f_{\tilde{\beta}_2}(x))^2 + (g_{\tilde{\beta}_1}(x) - g_{\tilde{\beta}_2}(x))^2)^{1/2}\mathrm{d}x. \quad (11)$$

容易证明, 上述 Hamming 距离和 Euclidean 距离均满足定义 8 中的 4 个条件.

4 信息不完全的模糊数直觉模糊多准则决策方法

4.1 问题描述

对于某个模糊多准则决策问题, 设 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为方案集, $I = \{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ 为准则集. 设决策者用模糊数直觉模糊数 $\tilde{\beta}_{ij} = \langle \tilde{M}_{ij}, \tilde{N}_{ij}\rangle$ 表示决策方案 $A_i \in A\,(i = 1,2,\cdots,m)$ 在准则 $I_j \in I\,(j = 1,2,\cdots,n)$ 下的准则值信息, 得到决策矩阵 $R = (\tilde{\beta}_{ij})_{m\times n}$, 其中 $\tilde{M}_{ij}$ 和 $\tilde{N}_{ij}$ 均为 [0,1] 上的一般模糊数, $\tilde{M}_{ij}$ 表示方案 A_i 满足准则 I_j 的程度, $\tilde{N}_{ij}$ 表示方案 A_i 不满足准则 I_j 的程度, 且满足 $0 \leqslant \sup \tilde{M}_{ij} + \sup \tilde{N}_{ij} \leqslant 1$. 试确定方案的排序并择优.

4.2 准则权重的不完全确定信息

在实际的多准则决策中, 决策者很难准确给出准则权重的确定值, 或不能对准则间的重要性程度进行两两比较, 进而不能由 AHP 和 ANP 等方法确定准则权重. 但是通常能以不完全确定信息的形式给出准则权重之间的关系, 如某一准则的权重在某一区间内变化, 一个准则比另一个准则更重要, 等等. 不完全确定形式的权重信息 (线性不等式) 一般分成如下 5 类[23]:

$$\{w_r \geqslant w_k\}; \quad (12)$$

$$\{w_r - w_k \geqslant \xi_r\},\ 0 \leqslant \xi_r \leqslant 1; \quad (13)$$

$$\{w_r - w_k \geqslant w_t - w_l\},\ k \neq t \neq l; \quad (14)$$

$$\{w_r \geqslant \xi_r w_k\},\ 0 \leqslant \xi_r \leqslant 1; \tag{15}$$

$$\{\xi_r \leqslant w_r \leqslant \xi_r + \varepsilon_r\},\ 0 \leqslant \xi_r < \xi_r + \varepsilon_r \leqslant 1. \tag{16}$$

已知的部分权重信息可为上述5种情形中任意一种或多种的组合. 文献[24]则将其分为如下3类:

$$\{w : Zw \geqslant z, w > 0, z \geqslant 0\}, \tag{17}$$

$$\{w : Zw \leqslant z, w > 0, z \geqslant 0\}, \tag{18}$$

$$\{w : Zw = z, w > 0, z \geqslant 0\}. \tag{19}$$

其中: $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$, Z 是 $1 \times n$ 矩阵. 式(12)～(16)为线性不等式形式, 它包含在式(17)和(18)所表示的类中. 设 Θ 表示决策者给出的准则权重的不完全确定信息的集合.

4.3 决策方法的具体步骤

基于模糊结构元理论, 以下给出两种准则权重信息不完全确定的模糊数直觉模糊多准则决策方法, 即记分函数法和TOPSIS法.

4.3.1 记分函数法

Step 1 取正则模糊结构元 E, 将 $\tilde{\beta}_{ij} = \langle \tilde{M}_{ij}, \tilde{N}_{ij} \rangle$ 用模糊结构元表示为 $\tilde{\beta}_{ij} = \langle f_{ij}(E),\ g_{ij}(E) \rangle$, 其中 $f_{ij}(x)$ 和 $g_{ij}(x)$ 均为 $[-1, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的同序单调函数, 满足 $\tilde{M}_{ij} = f_{ij}(E)$, $\tilde{N}_{ij} = g_{ij}(E)$.

Step 2 利用式(9)构造 $R = (\tilde{\beta}_{ij})_{m\times n}$ 的记分矩阵 $S = (s_{ij})_{m\times n}$.

Step 3 根据准则值记分与理想点记分之间的总偏差与准则权重的随机性构建优化模型, 求解最优准则权重. 假设根据准则权重的不完全确定信息求出的最优准则权重为 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$, 则基于记分矩阵, 每个方案的综合准则值记分为

$$s_i(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m. \tag{20}$$

显然, $s_i(w)$ 越大, 方案 A_i 越优.

设 $\tilde{\beta}_j^+ = \langle f_j^+(E), g_j^+(E) \rangle\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 个最大的模糊数直觉模糊数, 则称

$$A^+ = (\tilde{\beta}_1^+, \tilde{\beta}_2^+, \cdots, \tilde{\beta}_n^+)^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

为模糊数直觉模糊理想点, 且称

$$s(A^+) = (s(\tilde{\beta}_1^+), s(\tilde{\beta}_2^+), \cdots, s(\tilde{\beta}_n^+))^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

为模糊数直觉模糊理想点的记分向量, 其中

$$f_j^+(x) = 1,\ g_j^+(x) = 0,$$

$$s(\tilde{\beta}_j^+) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x)(1-0)\mathrm{d}x = 1. \tag{23}$$

考虑记分矩阵 $S = (s_{ij})_{m\times n}$, 则合理的准则权重应该使得所有方案 $A_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 与理想点 A^+ 的记分总偏差最小, 即极小化

$$\min\ D(w) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_j(1 - s_{ij});$$

$$\text{s.t. } w \in \Theta,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1,\ w_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{24}$$

同时, 考虑到各准则的真实权重是一个随机变量, 具有不确定性. 为了描述这种不确定性, 可将准则权重 w_j 理解为第 j 个指标 I_j 在准则集中所占比重("概率"), 这样, 可以用Shannon信息熵[25]

$$H = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{25}$$

表示准则权重的不确定性. 根据Jaynes最大熵原理, 合理的准则权重应使Jaynes熵极大, 即极大化

$$\max\ H = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j;$$

$$\text{s.t. } w \in \Theta,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1,\ w_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{26}$$

为达到上述两个目的, 求解最优准则权重等价于求解如下最优化问题:

$$\min\ \mu\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_j(1 - s_{ij}) + (1-\mu)\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j;$$

$$\text{s.t. } w \in \Theta,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, w_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{27}$$

其中参数 $\mu\ (\mu \in (0, 1))$ 表示上述两个目标之间的平衡系数, 可根据实际问题预先给出.

Step 4 根据Step 3得到的最优准则权重, 利用式(20)计算方案 A_i 的综合准则值记分 $s_i(w)$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

Step 5 利用 $s_i(w)\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 对方案进行排序并择优.

4.3.2 TOPSIS法

Step 1 同记分函数法的Step 1.

Step 2 首先确定模糊数直觉模糊理想点, 方法见记分函数法Step 3. 又设 $\tilde{\beta}_j^- = \langle f_j^-(E),\ g_j^-(E) \rangle\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 个最小的模糊数直觉模糊数, 则称

$$A^- = (\tilde{\beta}_1^-, \tilde{\beta}_2^-, \cdots, \tilde{\beta}_n^-)^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

为模糊数直觉模糊负理想点, 其中

$$f_j^-(x) = 0,\ g_j^-(x) = 1. \tag{29}$$

Step 3 利用相对贴近度构建优化模型, 求解最优准则权重. 方案与理想点和负理想点的距离分别为

$$d_i^+ = d(A_i, A^+) = \sum_{j=1}^{n} w_j d(\tilde{\beta}_{ij}, \tilde{\beta}_j^+), \tag{30}$$

$$d_i^- = d(A_i, A^-) = \sum_{j=1}^{n} w_j d(\tilde{\beta}_{ij}, \tilde{\beta}_j^-). \tag{31}$$

因为方案 A_i 与理想点 A^+ 越近, 方案越优, 同时, 方案 A_i 与负理想点 A^- 越远, 方案也越优, 所以对每个方案 A_i 建立如下的优化模型:

$$\min\ d_i^+ = d(A_i, A^+);$$
$$\text{s.t. } w \in \Theta,$$
$$\sum_{j=1}^n w_j = 1,\ w_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{32}$$

$$\max\ d_i^- = d(A_i, A^-);$$
$$\text{s.t. } w \in \Theta,$$
$$\sum_{j=1}^n w_j = 1,\ w_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{33}$$

因为各个方案都是公平竞争的, 每个方案与理想点和负理想点的距离应来自于同一组准则权重, 所以对上面两式进行综合可得

$$\max\ d = \sum_{i=1}^m \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-};$$
$$\text{s.t. } w \in \Theta,$$
$$\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{34}$$

求解模型 (34), 可得到最优准则权重 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$.

Step 4　根据 Step 3 得到的最优准则权重, 利用式 (35) 计算每个方案与理想点和负理想点的距离 d_i^+ 和 d_i^-, 并求得相对贴近度

$$d_i^* = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-},\ \ i = 1, 2, \cdots, m. \tag{35}$$

Step 5　根据 $d_i^*\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的大小对方案进行排序并择优, d_i^* 越大, 方案越优.

5　实例分析

考虑大学学院评估问题. 通常, 一些大学采用教学 (I_1)、科研 (I_2) 和服务 (I_3) 这 3 个准则作为评估的一级指标 (准则), 准则权重满足条件 $0.33 \leqslant w_1 \leqslant 0.36$, $0.30 \leqslant w_2 \leqslant 0.33$, $w_3 \geqslant 0.31$. 现有决策者依照评估标准对 5 个学院 $A_k (k = 1, 2, \cdots, 5)$ 进行评估, 各指标下的评估信息用模糊数直觉模糊数表示, 决策矩阵 R_1 见表 1, 试确定最佳学院.

方法 1　利用记分函数法求解.

Step 1: 取三角模糊结构元 E, 利用式 (2) 将 R_1 中的评估信息用模糊结构元表示, 见表 2.

表 1　决策矩阵 R_1

方案	准则		
	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle(0.5, 0.6, 0.7), (0.1, 0.2, 0.3)\rangle$	$\langle(0.3, 0.4, 0.5), (0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	$\langle(0.3, 0.4, 0.5), (0.2, 0.3, 0.4)\rangle$
A_2	$\langle(0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	$\langle(0.3, 0.5, 0.7), (0.1, 0.2, 0.3)\rangle$	$\langle(0.6, 0.7, 0.8), (0.0, 0.1, 0.2)\rangle$
A_3	$\langle(0.6, 0.7, 0.8), (0.0, 0.1, 0.2)\rangle$	$\langle(0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.3, 0.4)\rangle$	$\langle(0.5, 0.7, 0.9), (0.1, 0.1, 0.1)\rangle$
A_4	$\langle(0.5, 0.6, 0.7), (0.1, 0.2, 0.3)\rangle$	$\langle(0.3, 0.4, 0.5), (0.3, 0.4, 0.5)\rangle$	$\langle(0.5, 0.6, 0.7), (0.0, 0.1, 0.2)\rangle$
A_5	$\langle(0.7, 0.8, 0.9), (0.1, 0.1, 0.1)\rangle$	$\langle(0.6, 0.7, 0.8), (0.0, 0.1, 0.2)\rangle$	$\langle(0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.3, 0.4)\rangle$

表 2　决策矩阵 R_2

方案	准则		
	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle 0.1e{+}0.6, 0.1e{+}0.2\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.4, 0.1e{+}0.3\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.4, 0.1e{+}0.3\rangle$
A_2	$\langle 0.1e{+}0.5, 0.1e{+}0.3\rangle$	$\langle 0.2e{+}0.5, 0.1e{+}0.2\rangle$	$\langle 0.2e{+}0.7, 0.1\rangle$
A_3	$\langle 0.1e{+}0.7, 0.1e{+}0.1\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.5, 0.1e{+}0.3\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.6, 0.1e{+}0.1\rangle$
A_4	$\langle 0.1e{+}0.6, 0.1e{+}0.2\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.4, 0.1e{+}0.4\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.6, 0.1e{+}0.1\rangle$
A_5	$\langle 0.1e{+}0.8, 0.1\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.7, 0.1e + 0.1\rangle$	$\langle 0.1e{+}0.5, 0.1e{+}0.3\rangle$

Step 2: 利用优化模型 (27) (令 $\mu = 0.5$) 求得最优准则权重向量为 $w = (0.360\,0,\ 0.300\,0, 0.340\,0)^{\mathrm{T}}$.

Step 3: 根据最优准则权重, 利用式 (20) 计算方案 A_i 的综合准则值记分, 有

$$s_1(w) = 0.208\,0,\ s_2(w) = 0.356\,0,\ s_3(w) = 0.457\,3,$$
$$s_4(w) = 0.314\,0,\ s_5(w) = 0.488\,0.$$

Step 4: 利用 $s_i(w)\ (i = 1, 2, \cdots, 5)$ 对方案进行排序, 有 $A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$. 因此, 最佳学院为 A_5.

一般而言, μ 值变化时对排序结果有一定影响. 本文实例中, 当 $\mu \geqslant 0.15$ 时得到的准则权重均相同, 并且对所有 μ 值得到的排序结果均相同 (见表 3).

表 3　μ 值变化对排序结果的影响

μ	准则权重	方案排序
$\mu \geqslant 0.15$	$w = (0.360\,0,\ 0.300\,0,\ 0.340\,0)^{\mathrm{T}}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$\mu = 0.14$	$w = (0.359\,3,\ 0.300\,4,\ 0.340\,3)^{\mathrm{T}}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$\mu = 0.12$	$w = (0.354\,9,\ 0.305\,8,\ 0.339\,3)^{\mathrm{T}}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$\mu = 0.10$	$w = (0.351\,0,\ 0.310\,7,\ 0.338\,3)^{\mathrm{T}}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$\mu = 0.05$	$w = (0.341\,7,\ 0.322\,5,\ 0.335\,8)^{\mathrm{T}}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$\mu = 0.01$	$w = (0.335\,6,\ 0.330\,0,\ 0.334\,4)^{\mathrm{T}}$	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$

方法 2　利用 TOPSIS 方法求解.

Step 1: 同方法 1.

Step 2: 利用 Hamming 距离 (10) 和优化模型 (34) 求得最优准则权重向量为 $w = (0.360\,0,\ 0.300\,0,\ 0.340\,0)^{\mathrm{T}}$.

Step 3: 根据最优准则权重, 利用式 (35) 计算每个方案的相对贴近度, 有

$$d_1^* = 0.604\,0,\ d_2^* = 0.678\,0,\ d_3^* = 0.728\,7,$$

$$d_4^* = 0.657\,0,\ d_5^* = 0.744\,0.$$

Step 4: 利用 $d_i^*\,(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 对方案进行排序, 有 $A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$, 因此, 最佳学院为 A_5.

TOPSIS 方法与记分函数法得到的结论一致. 进一步, 利用文献 [10-11] 的方法虽然不能得到最优准则权重, 但如果利用求得的准则权重 $w = (0.360\,0,\ 0.300\,0,\ 0.340\,0)^{\mathrm{T}}$, 则可以得到同样的结论, 并且从决策矩阵的数据分析可知结论是合理的.

6 结 论

用模糊结构元表示模糊数, 可将对有界实模糊数的研究转化为对 $[-1, 1]$ 上的同序单调有界函数的研究, 从而简化其相关变换和运算. 本文基于模糊数直觉模糊集的模糊结构元表示, 将模糊数的元序与直觉模糊数的记分函数和距离测度进行整合拓展, 定义了模糊数直觉模糊数的记分函数和距离测度, 进而提出了两种准则权重信息不完全确定而准则值为模糊数直觉模糊数的多准则决策方法: 记分函数法和 TOPSIS 法. 在记分函数法中, 利用准则值记分与理想点记分的总偏差和准则权重的随机性构建优化模型并确定最优准则权重, 利用各方案的综合准则值记分对方案进行排序, 并选择最优方案; 在 TOPSIS 法中, 利用各方案与理想点和负理想点的距离构建优化模型并确定最优准则权重, 利用各方案与理想点和负理想点的相对贴近度得到方案集的排序, 并选择最优方案. 本文方法思路清晰, 易于理解, 计算简捷, 具有较大的实用价值和广泛的应用价值, 为利用模糊结构元理论处理模糊多准则决策问题并应用于其他领域开拓了新的思路. 基于模糊结构元理论的模糊数直觉模糊信息集成算子及其在决策中的应用将是进一步研究的问题.

参考文献(References)

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(4): 338-356.

[3] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Trans on Systems Man, Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614.

[4] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3): 403-405.

[5] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets: Thoery and applications[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999.

[6] Bustince H, Herrera F, Montero J. Fuzzy sets and their extensions: Representation, aggregation and models[M]. Physica-Verlag, Heidelberg, 2007.

[7] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
(Xu Z S. Intuitionistic fuzzy information: Aggregation theory and application[M]. Beijing: Science Press, 2008.)

[8] Atanassov K T, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[9] 刘锋, 袁学海. 模糊数直觉模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88-91.
(Liu F, Yuan X H. Fuzzy number intuitionistic fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21 (1): 88-91.)

[10] Wang X F. Fuzzy number intuitionistic fuzzy arithmetic aggregation operators[J]. Int J of Fuzzy Systems, 2008, 10(2): 104-111.

[11] 汪新凡. 模糊数直觉模糊几何集成算子及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 607-612.
(Wang X F. Fuzzy number intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators and their application to decision making [J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 607-612.)

[12] 郭嗣琮. 基于结构元理论的模糊数学分析原理[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2004: 53-61.
(Guo S Z. Principle of fuzzy mathematical analysis based on structured element[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2004: 53-61.)

[13] 郭嗣琮. 模糊实数空间与上同序单调函数类的同胚[J]. 自然科学进展, 2004, 14(11): 1318-1321.
(Guo S Z. Homeomorphic property between fuzzy number space and family of standard bounded monotone function[J]. Advances in Natural Science, 2004, 14(11): 1318-1321.)

[14] Hu J H, Yang Y, Guo S Z. Fuzzy number intuitionistic fuzzy set and its representation of structured element[C]. Int Symposium on Intelligent Information Technology Application IITA Workshops 2008. Shanghai, 2008: 349-353.

[15] 杨洋, 郭嗣琮, 胡金辉．模糊数直觉模糊集运算的模糊结构元表示[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(6): 67-73.
(Yang Y, Guo S Z, Hu J H. The representation of fuzzy structured element for fuzzy number intuitionistic fuzzy set operations[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2009, 23(6): 67-73.)

[16] Chen S M, Tan J M．Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172．

[17] Hong D H, Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 103-113.

[18] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1-10.

[19] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
(Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.)

[20] 郭嗣琮. 模糊数比较与排序的结构元方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(3): 106-111.
(Guo S Z. Comparison and sequencing of fuzzy numbers based on the method of structured element[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2009, 29(3): 106-111.)

[21] 岳立柱, 闫艳, 仲维清. 基于结构元的模糊矩阵博弈求解[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(2): 272-276.
(Yue L Z, Yan Y, Zhong W Q. Solution of matrix fuzzy game based on structuring element theory[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2010, 30(2): 272-276.)

[22] Bustince H, Burillo P. Correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74(2): 237-244.

[23] Kim S H, Ahn B S. Interactive group decision making procedure under incomplete information[J]. European J of Operational Research, 1999, 116(3): 498-507.

[24] 王坚强, 任剑. 基于WC-OWA算子的随机多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1429-1432.
(Wang J Q, Ren J. Stochastic multi-criteria decision-making method based on WC-OWA operator[J]. Control and Decision, 2007, 22(12): 1429-1432.)

[25] 汪泽焱, 顾红芳, 益晓新. 一种基于熵的线性组合赋权法[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23 (3): 12-116.
(Wang Z Y, Gu H F, Yi X X, et al. A method of determining the linear combination weights based on entropy[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2003, 23(3): 112-116.)

(上接第1792页)

[14] Kelepouris T, Miliotis P, Pramatari K. The impact of replenishment parameters and information sharing on the bullwhip effect: A computational study[J]. Computers & Operations Research, 2008, 35(11): 3657-3670.

[15] Croson R, Donohue K. Behavioral causes of the bullwhip effect and the observed value of inventory information[J]. Management Science, 2006, 52(3): 323-336.

[16] Dejonckheere J, Disney S M, Lambrecht M R, et al. The impact of information enrichment on the bullwhip effect in supply chains: A control engineering perspective[J]. European J of Operational Research, 2004, 153(3): 727-750.

[17] 汪传旭, 崔建新. ARMA(1,1)需求条件下需求信息延迟对两级供应链牛鞭效应和平均成本的影响[J]. 系统管理学报, 2007, 16(3): 332-336.
(Wang C X, Cui J X. Impact of demand information delay on order variation and average cost in a two-stage supply chain with ARMA(1,1) demand[J]. J of Systems & Management, 2007, 16(3): 332-336.)

[18] 王伟钧, 唐小我, 倪得兵. 需求信息滞后下的零售商决策与牛鞭效应分析[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 84-89.
(Wang W J, Tang X W, Ni D B. Retails decision and the bullwhip effect on delayed demand information[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 84-89.)

[19] Chatfield D C, Kim J G, Harrison T P, et al. The bullwhip effect impact of stochastic lead time, information quality, and information sharing: A simulation study[J]. Production and Operations Management, 2004, 13(4): 340-353.

[20] Lai N O, Edwards C, Spurgeon S K. On output tracking using dynamic output feedback discrete-time sliding-mode controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(10): 1975-1981.

[21] Krishnamurthy P, Khorrami F. Decentralized control and disturbance attenuation for large-scale nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form[J]. Automatica, 2003, 39(11): 1923-1933.

[22] Hassibi A, Boyd S, How J P. Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events[C]. Proc of the IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix, 1999, 2: 1345-1351.

[23] Rabello A, Bhaya A. Stability of asynchronous dynamical systems with rates constraints and applications[J]. IEE Proc of Control Theory and Applications, 2003, 150(5): 546-550.