

文章编号: 1001-0920(2013)02-0247-06

具有相似节点的耦合时滞复杂网络的稳定性与同步控制分析

范永青¹, 王银河¹, 王青云², 章云¹

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广州 510006; 2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘要: 讨论具有相似节点的耦合时滞复杂网络的稳定和同步问题, 且网络模型的外部耦合满足耗散条件. 对于不同维数节点的复杂网络, 根据节点之间相似参量的信息, 利用线性矩阵不等式方法设计出含有相似参量的分散控制器, 给出耦合复杂网络实现稳定的时滞独立判定准则. 定义了含有相似参量的同步流形的概念, 并设计了相应的分散控制器, 给出了能使整个复杂网络同步的时滞独立判定条件. 数值算例表明了所提出设计方法的有效性.

关键词: 复杂动态网络; 稳定性; 同步; 分散控制; 时滞

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Control analysis of the stabilization and synchronization of coupling time-delay complex dynamical networks with similar nodes

FAN Yong-qing¹, WANG Yin-he¹, WANG Qing-yun², ZHANG Yun¹

(1. Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China; 2. Department of Dynamics and Control, Beihang University, Beijing 100191, China. Correspondent: FAN Yong-qing, E-mail: yongq-f@163.com)

Abstract: The stabilization and synchronization of complex dynamical networks with similar nodes and coupling time-delay are investigated, and the out-coupling satisfies the condition of the dissipation. For the complex dynamical network of different dimension node, the decentralized control strategies are designed in term of the information of the similar parameters in complex dynamical networks by using the method of linear matrix inequality. A synchronization criterion time delay independent of this model is given by the decentralized controller with similar parameters. The definition of the synchronization manifold is proposed, and the time delay independent criterion of the synchronization of the complex dynamical networks is derived. Finally, a numerical example is given to show the effectiveness of the designed method.

Key words: complex dynamical network; stabilization; synchronization; decentralized control; time-delay

0 引言

复杂网络广泛存在于自然界的各种现象中, 自人们提出各节点间相互线性耦合且耦合强度一致的网络^[1-2]以来, 很多学者对动态节点的耦合复杂网络作了进一步的拓展研究, 并取得了大量成果^[3-6]. 近几年, 有关动态复杂网络的稳定性和同步分析也引起了学者们的关注. 在对复杂网络的稳定和同步研究中, 文献[6]针对一类外部耦合满足耗散条件的线性和非线性复杂网络, 分析给出了复杂网络稳定性的判据条件, 并给出了设计分散控制器的方法, 以使整个网络镇定. 文献[7]针对一致连接的复杂网络模型的同步问题, 给出了一种自适应控制器设计方法. 然而, 上述

文献并没有讨论带有时滞的复杂网络, 而时滞问题是自然界和人类社会存在的一种普遍现象. 在动态复杂网络中, 节点间耦合关系的不同将导致每个节点之间的传递信息与接收信息存在差异, 整个复杂网络的稳定和同步会出现时滞现象, 继而节点间的耦合时滞会对整个网络的稳定性和同步能力产生影响, 因此讨论时滞复杂网络的控制镇定问题非常重要. 文献[8]讨论了Lur'e系统组成的多种耦合时滞的加权复杂动态网络, 对网络的同步问题提出牵制控制器的设计方法; 文献[9]对一类带有耦合一致时滞含有非线性项的动态复杂网络, 设计了同步条件的牵制控制器, 但没有考虑节点的稳定性问题; 文献[10]提出的同步标准可以有效地估计时滞的范围. 然而, 这些已有成果

收稿日期: 2011-08-27; 修回日期: 2011-12-09.

基金项目: 广东省自然科学基金项目(8151009001000061); 广东省自然科学基金团队项目(8351009001000002).

作者简介: 范永青(1978—), 女, 博士生, 从事复杂网络同步控制的研究; 王银河(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与工程等研究.

的共同特点是每个节点内部状态维数都是相同的,如果一个动态复杂网络中的每个节点的内部状态维数各不相同,则上述文献提出的稳定或同步控制器设计方法便不再有效.此时,针对这种动态复杂网络,如何设计控制器使网络节点得以镇定或同步是值得讨论的问题.

在复杂网络中,不论节点的状态维数是否相同,节点状态间均可能具有某种相似关系,这种相似现象也发生在大系统的子系统之间^[11].例如,文献[12]中电力系统的服务节点由相互连接的同步电机组成,多个工厂中具有相同单元的电网系统^[13],文献[14-16]讨论的对称和相似组合大系统.值得注意的是,大系统分析不同于复杂网络,复杂网络分析更加注意外部连接关系对整个网络动态性质的影响.因此,借鉴大系统的研究方法,根据节点状态之间的相似性质设计控制器,使得含有相似节点的动态复杂网络能够得以镇定和同步是很有意义的.

综合以上分析,本文假设动态复杂网络中各节点的状态维数互不相同,但其状态之间以及互联关系满足某种相似关系.当外部耦合关系满足耗散条件且互联项中含有耦合时滞时,利用线性矩阵不等式方法分别设计含有相似参量的分散控制器,可以使得具有相似节点的复杂网络得以镇定和同步.最后通过仿真算例表明了该方法的有效性.

1 复杂网络模型与假设

考虑复杂网络的时滞模型为

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} [H_{ij} x_j(t - \tau) - H_{ii} x_i(t - \tau)] + B_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中:第*i*个节点满足 $x_i \in R^{n_i}$; $A_i \in R^{n_i \times n_i}$, $B_i \in R^{n_i \times m}$ 为已知矩阵; $H_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$) 为内部耦合矩阵; $u_i \in R^{m \times n_i}$ 为控制输入; $0 < \tau < t$ 为已知时滞常数; $c_{ij} \in R$ 为外部耦合矩阵并满足条件 $c_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}$, 如果节点*i*与*j*相连($i \neq j$), 则有 $c_{ij} > 0$, 反之 $c_{ij} = 0$; 记 $C = (c_{ij})_{N \times N}$.

假设 1 对于有*N*个节点的网络(1), 存在*N*个矩阵 $F_i \in R^{n_i \times n_i}$ ($F_i \neq 0$) 和*N*个矩阵 $K_i \in R^{m_i \times n_i}$ 满足 $F_i(A_i + B_i K_i) = (A_1 + B_1 K_1)F_i$, $F_i B_i = B_1$.

假设 2 在假设 1 满足的条件下, 存在矩阵 $\tilde{H}_i \in R^{n_i \times n_i}$ 满足 $F_i H_{ij} = \tilde{H}_i F_j$.

注 1 假设 1 中的条件 $F_i(A_i + B_i K_i) = (A_1 + B_1 K_1)F_i$ 表明*N*个矩阵 $A_i + B_i K_i$ 具有部分相同的特征值, 这说明复杂网络(1)节点状态间的动态行为具有相似性. 由假设 2 可知, 如果能找到一个矩阵 ψ_i

满足 $H_{ij} = \psi_i F_j$, 则有 $\tilde{H}_i = F_i \psi_i$.

引理 1^[17] 对于向量 $x, y \in R^{n \times n}$ 和正定矩阵 $W \in R^{n \times n}$, 存在 $2x^T y \leq x^T W x + y^T W^{-1} y$.

引理 2^[18] 对于给定对称矩阵

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12}^T & s_{22} \end{bmatrix},$$

以下 3 个条件是等价的:

- 1) $S < 0$;
- 2) $s_{11} < 0, s_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $s_{22} < 0, s_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

2 复杂网络的镇定控制

本节考虑如下形式的分散控制器:

$$u_i = K_i x_i(t) + v_i, \quad v_i = (\tilde{K} - K_1) F_i x_i(t). \quad (2)$$

其中: F_i 和 K_i 是相似参量, \tilde{K} 是待设计的增益矩阵. 令 $z_i(t) = F_i x_i(t)$, 由假设 1、假设 2 和控制器(2), 闭环系统(1)可以改写为

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= (A_1 + B_1 \tilde{K}) z_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} \tilde{H}_i [F_j x_j(t - \tau) - F_i x_i(t - \tau)], \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

令

$$\begin{aligned} z(t) &= (z_1^T(t), z_2^T(t), \dots, z_N^T(t))^T, \\ x(t - \tau) &= (x_1^T(t - \tau), x_2^T(t - \tau), \dots, x_N^T(t - \tau))^T, \\ \tilde{A} &= A_1 + B_1 \tilde{K}, \quad H = \text{diag}(\tilde{H}_1 \quad \tilde{H}_2 \quad \dots \quad \tilde{H}_N), \\ F &= \text{diag}(F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_N). \end{aligned}$$

式(3)等价于

$$\dot{z}(t) = (I \otimes \tilde{A}) z(t) + H(C \otimes I) F x(t - \tau). \quad (4)$$

其中: $I \in R^{n_1 \times n_1}$ 是单位矩阵, \otimes 是 Kronecker 乘积.

定理 1 对于复杂网络系统(1), 如果假设 1 和假设 2 成立, 且相似参量 F_i 是列满秩的矩阵, 则一定存在矩阵 Y , 正定矩阵 X , 正定矩阵 $Q \leq \delta I$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 如下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} \theta & H(C \otimes I) & I \otimes X & I \otimes X \\ * & -(I \otimes Q) & 0 & 0 \\ * & * & -(I \otimes \delta I)^{-1} e^{-\tau} & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon^{-1} (I \otimes I) \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

其中: $\theta = I \otimes (X + X A_1^T + A_1 X + B_1 Y + Y^T B_1)$, $\delta > 0$ 为可调参数. 分散控制器(2)使得系统(1)是指数稳定的, 控制器增益 $\tilde{K} = Y X^{-1}$.

证明 取 Lyapunov 函数

$$V(t) = e^t z^T(t) (I \otimes P) z(t) +$$

$$\int_{t-\tau}^t x(t)^T F^T (I \otimes Q) F x(t) e^{\alpha+\tau} d\alpha, \quad (6)$$

则式(6)沿系统(4)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & e^t z^T(t) (I \otimes P) z(t) + e^t \{ z^T(t) [(I \otimes \tilde{A})^T (I \otimes P) + \\ & (I \otimes P) (I \otimes \tilde{A})] z(t) + \\ & z^T(t) (I \otimes P) H (C \otimes I) F x(t - \tau) + \\ & x^T(t - \tau) F^T (C \otimes I)^T H^T (I \otimes P) z(t) \} + \\ & x^T(t) F^T (I \otimes Q) F x(t) e^{t+\tau} - \\ & x^T(t - \tau) F^T (I \otimes Q) F x(t - \tau) e^t. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)、引理1和定理1可知

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq e^t \{ z^T(t) [(I \otimes P) + (I \otimes \tilde{A}^T P) + (I \otimes P \tilde{A}) + \\ (I \otimes \delta I) e^\tau + (I \otimes P) H (C \otimes I) (I \otimes Q)^{-1} \times \\ (C \otimes I)^T H^T (I \otimes P)] z(t) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$\begin{aligned} (I \otimes P) + (I \otimes \tilde{A}^T P) + (I \otimes P \tilde{A}) + (I \otimes \delta I) e^\tau + \\ (I \otimes P) H (C \otimes I) (I \otimes Q)^{-1} (C \otimes I)^T H^T (I \otimes P) \leq \\ -\varepsilon (I \otimes I), \end{aligned} \quad (9)$$

由式(8)和(9)可知

$$\dot{V} \leq -\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(I \otimes P) + e^\tau \lambda_{\max}(I \otimes Q)} V(t). \quad (10)$$

由式(10)可知, 复杂网络在控制器(2)的作用下可以达到指数稳定. 在不等式(9)两边同时左乘以 $I \otimes P^{-1}$, 右乘以 $I \otimes P^{-1}$, 则下式成立:

$$\begin{aligned} I \otimes (P^{-1} + P^{-1} \tilde{A}^T + \tilde{A} P^{-1}) + \\ (I \otimes P^{-1}) (I \otimes \delta I) (I \otimes P^{-1}) e^\tau + \\ H (C \otimes I) (I \otimes Q)^{-1} (C \otimes I)^T H^T + \\ \varepsilon (I \otimes P^{-1}) (I \otimes I) (I \otimes P^{-1}) < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

令 $P^{-1} = X$, $Y = \tilde{K} P^{-1}$, 由引理2可知, 式(11)等价于线性矩阵不等式(5). \square

3 复杂网络的同步控制

首先定义具有相似节点的复杂网络的同步概念.

定义1 在假设1成立的情况下, 定义复杂网络(1)同步流形为 $S = \{x(t) | F_i x_i(t) = F_j x_j(t), i, j = 1, 2, \dots, N\}$, 其中 $x(t) = (x_1^T(t) \ x_2^T(t) \ \dots \ x_N^T(t))^T \in R^{n_1} \times R^{n_2} \times \dots \times R^{n_N}$.

考虑如下分散控制器:

$$u_i = K_i x_i(t) + v_i, \bar{v}_i = (\hat{K} - K_i) F_i x_i(t), \quad (12)$$

其中 \hat{K} 是待设计的增益矩阵. 记 $\hat{A} = A_1 + B_1 \hat{K}$, 若假设1和假设2成立, 则动态复杂网络(1)可以改写为

$$\dot{z}_i(t) = \hat{A} z_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} \tilde{H}_i [F_j x_j(t - \tau) -$$

$$F_i x_i(t - \tau)]. \quad (13)$$

引入误差

$$\begin{aligned} e_i = z_i(t) - z_1(t) = F_i x_i(t) - F_1 x_1(t), \\ e(t) = (e_1^T(t) \ e_2^T(t) \ \dots \ e_N^T(t))^T, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} S = \{x(t) | e(t) = 0, x(t) \in R^{n_1} \times \dots \times R^{n_N}\}, \\ e_{ij}(t) = z_i(t) - z_j(t) = -e_{ji}(t), \\ \bar{e}_i(t - \tau) = F_i x_i(t - \tau) - F_1 x_1(t - \tau), \\ \bar{e}_{ij}(t - \tau) = \bar{e}_i(t - \tau) - \bar{e}_j(t - \tau) = -\bar{e}_{ji}(t - \tau). \end{aligned}$$

由于耗散条件 $\sum_{k=1}^N c_{ik} = \sum_{k=1}^N c_{jk} = 0$, 记 $E_1 = (e_{ij}(t)) \in R^{n_1 N \times n_1 N}$, $E_2 = (\bar{e}_{ij}(t - \tau)) \in R^{n_1 N \times n_1 N}$, $I \in R^{n_1 \times n_1}$, 则误差为

$$\dot{E}_1 = (I \otimes \hat{A}) E_1 + S_1 - S_2. \quad (14)$$

其中

$$S_1 = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1[(C \otimes I) E_2]_{11} & \dots & \tilde{H}_1[(C \otimes I) E_2]_{1N} \\ \tilde{H}_2[(C \otimes I) E_2]_{21} & \dots & \tilde{H}_2[(C \otimes I) E_2]_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_N[(C \otimes I) E_2]_{N1} & \dots & \tilde{H}_N[(C \otimes I) E_2]_{NN} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1[(C \otimes I) E_2]_{11} & \dots & \tilde{H}_N[(C \otimes I) E_2]_{N1} \\ \tilde{H}_1[(C \otimes I) E_2]_{12} & \dots & \tilde{H}_N[(C \otimes I) E_2]_{N2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_1[(C \otimes I) E_2]_{1N} & \dots & \tilde{H}_N[(C \otimes I) E_2]_{NN} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

由于 $S_1 = H(C \otimes I) E_2$, 式(14)可以表示为

$$\dot{E}_1 = (I \otimes \hat{A}) E_1 + H(C \otimes I) E_2 - S_2. \quad (17)$$

定理2 对于复杂网络系统(1), 如果假设1和假设2成立, 则一定存在正定矩阵 \bar{X} (且 $\gamma^{-1} I \leq \bar{X}$) 和正定矩阵 \bar{Y} , $\bar{Q} \leq \mu I$, 对于任意 $\beta > 0$, 有如下LMI成立:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & H(C \otimes I) & I \otimes \bar{X} & I \otimes \bar{X} \\ * & \phi_{22} & 0 & 0 \\ * & * & \phi_{33} & 0 \\ * & * & * & \phi_{44} \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{11} = I \otimes (\bar{X} + \bar{X} A_1^T + A_1 \bar{X} + B_1 \bar{Y} + \bar{Y}^T B_1), \\ \phi_{22} = -\frac{1}{2} (I \otimes \bar{Q}), \phi_{33} = -\frac{1}{2} (I \otimes \mu I)^{-1} e^{-\tau}, \\ \phi_{44} = -\beta^{-1} (I \otimes I), \end{aligned}$$

分散控制器(12)可以使耦合时滞复杂网络(1)指数同步, 其中控制器增益 $\hat{K} = \bar{Y} \bar{X}^{-1}$.

证明 取函数

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) = e^t \text{tr}(E_1^T(t)(I \otimes \bar{P})E_1) + \\ 2 \int_{t-\tau}^t \text{tr}(E_1^T(I \otimes \bar{Q})E_1)e^{\beta+\tau} d\beta. \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)沿系统(17)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(t) = e^t \text{tr}\{E_1^T[I \otimes (\bar{P} + \hat{A}^T \bar{P} + \bar{P} \hat{A})]E_1 + \\ E_2^T(C \otimes I)^T H^T(I \otimes \bar{P})E_1 + \\ E_1^T(I \otimes \bar{P})H(C \otimes I)E_2 - \\ S_2^T(I \otimes \bar{P})E_1 - E_1^T(I \otimes \bar{P})S_2 + \\ 2E_1^T(I \otimes \bar{Q})E_1 e^\tau - 2E_2^T(I \otimes \bar{Q})E_2\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}\{E_1^T(I \otimes \bar{P})S_2\} = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N [(E_1^T)_{ik}] \sum_{j=1}^N (I \otimes \bar{P})_{kj} (S_2)_{ji} = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N e_{ki}^T(t) \bar{P} \tilde{H}_i [(C \otimes I)E_2]_{ik}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}\{E_1^T(I \otimes \bar{P})H(C \otimes I)E_2\} = \\ \sum_{i=1}^N [E_1^T(I \otimes \bar{P})H(C \otimes I)E_2]_{ii} = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N e_{ki}^T(t) \bar{P} \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N (H)_{kr} [(C \otimes I)]_{rj} e_{ji}(t-\tau) = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N e_{ki}^T(t) \bar{P} H_k [(C \otimes I)E_2]_{ki}. \end{aligned} \quad (22)$$

由式(21)和(22)可知

$$\text{tr}\{E_1^T(I \otimes \bar{P})S_2\} = -\text{tr}\{E_1^T(I \otimes \bar{P})H(C \otimes I)E_2\}. \quad (23)$$

由引理1和定理2中 $\bar{Q} \leq \mu I$ 可知

$$\dot{\tilde{V}}(t) \leq e^t \text{tr}\{E_1^T \Omega E_1\} \quad (24)$$

成立, 其中

$$\begin{aligned} \Omega = I \otimes (\bar{P} + \hat{A}^T \bar{P} + \bar{P} \hat{A}) + 2(I \otimes \mu I)e^\tau + \\ 2(I \otimes \bar{P})H(C \otimes I)(I \otimes \bar{Q})^{-1} \times \\ (C \otimes I)^T H^T(I \otimes \bar{P}). \end{aligned}$$

令

$$\Omega < -\beta(I \otimes I), \quad (25)$$

则有

$$\dot{\tilde{V}}(t) < -n_1^2 \beta e^t \|E_1\|^2 \leq -\frac{\beta}{\gamma + 2\mu e^\tau} \tilde{V}(t). \quad (26)$$

由式(26)可知, 系统(1)在控制器(12)的作用下可达到指数同步. 在式(25)两边同时左乘 $I \otimes \bar{P}^{-1}$ 右乘 $I \otimes \bar{P}^{-1}$ 得到

$$\begin{aligned} I \otimes (\bar{P}^{-1} + \bar{P}^{-1} \hat{A}^T + \hat{A} \bar{P}^{-1}) + \\ 2(I \otimes \bar{P}^{-1})(I \otimes \mu I)(I \otimes \bar{P}^{-1})e^\tau + \\ 2H(C \otimes I)(I \otimes \bar{Q})^{-1}(C \otimes I)^T H^T < \\ -\beta(I \otimes \bar{P}^{-1})(I \otimes I)(I \otimes \bar{P}^{-1}). \end{aligned} \quad (27)$$

令 $\bar{P}^{-1} = \bar{X}$, $Y = K\bar{P}^{-1}$, 由引理2, 式(27)等价于(18). \square

4 数值算例

考虑具有9个节点的复杂网络, 定义第1个节点为中心节点, 动态微分方程为

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1. \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 = \begin{bmatrix} A_1^{11} & A_1^{12} \\ A_1^{21} & A_1^{22} \end{bmatrix}, \quad A_1^{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \\ A_1^{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 & -1.2 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & -7 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1^{21} = O_{7 \times 2}, \\ A_1^{22} = \text{diag}\{-3, -2, -7, -2.2, -1, -4.1, -6\}, \\ B_1 = [0 \ 1 \ O_{1 \times 7}]^T. \end{aligned}$$

其他节点的动态方程为

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k u_k, \quad k = 2, 3, \dots, 9. \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} A_2 = \begin{bmatrix} A_2^{11} & A_2^{12} \\ A_2^{21} & A_2^{22} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} A_3^{11} & A_3^{12} \\ A_3^{21} & A_3^{22} \end{bmatrix}, \\ A_4 = \begin{bmatrix} A_4^{11} & A_4^{12} \\ A_4^{21} & A_4^{22} \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} A_5^{11} & A_5^{12} \\ A_5^{21} & A_5^{22} \end{bmatrix}, \\ A_6 = \begin{bmatrix} A_6^{11} & A_6^{12} \\ A_6^{21} & A_6^{22} \end{bmatrix}, \quad A_7 = \begin{bmatrix} A_7^{11} & A_7^{12} \\ A_7^{21} & A_7^{22} \end{bmatrix}, \\ A_8 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_9 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \\ A_2^{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2^{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 & -1.2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_2^{21} = O_{6 \times 2}, \quad A_2^{22} = \text{diag}\{-3, -2, -7, -2.2, -1, -4.1\}, \\ A_3^{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3^{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 & -1.2 \\ -1 & -1 & 1 & -7 & -3 \end{bmatrix}, \\ A_3^{21} = O_{5 \times 2}, \quad A_3^{22} = \text{diag}\{-3, -2, -7, -2.2, -1\}, \\ A_4^{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4^{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \\ A_4^{21} = O_{4 \times 2}, \quad A_4^{22} = \text{diag}\{-3, -2, -7, -2.2\}, \\ A_5^{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_5^{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \\ A_5^{21} = O_{3 \times 2}, \quad A_5^{22} = \text{diag}\{-3, -2, -7\}, \\ A_6^{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_6^{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_6^{21} = O_{2 \times 2}, \quad A_6^{22} = \text{diag}\{-3, -2\}, \\ A_7^{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_7^{12} = [1 \ 6]^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_7^{21} &= 0, A_7^{22} = -3, B_2 = [0 \ 1 \ O_{1 \times 6}]^T, \\
 B_3 &= [0 \ 1 \ O_{1 \times 5}]^T, B_4 = [0 \ 1 \ O_{1 \times 4}]^T, \\
 B_5 &= [0 \ 1 \ O_{1 \times 3}]^T, B_6 = [0 \ 1 \ O_{1 \times 2}]^T, \\
 B_7 &= [0 \ 1 \ 0]^T, B_8 = [0 \ 1]^T = B_9.
 \end{aligned}$$

如果节点的初值取为

$$\begin{aligned}
 x_1^0 &= (-1, -1.4, -6.7, 3, 9, -3, 1, 5, -9.5)^T, \\
 x_2^0 &= (-7, -15, -2, -4.9, 6.4, 5, 14, 8.8)^T, \\
 x_3^0 &= (-13, -2, 5.1, -4.3, -2, 2.6)^T, \\
 x_4^0 &= (-5.1, 5, -7, 1, -6, 2.4)^T, \\
 x_5^0 &= (-1, 3, -2, 5.2, 1.1)^T, \\
 x_6^0 &= (-15, 8, 3, -6)^T, x_7^0 = (-3.7, 10, -17)^T, \\
 x_8^0 &= (-6.2, 5.4)^T, x_9^0 = (-8.5, -4.5)^T,
 \end{aligned}$$

则复杂网络(28)~(29)中孤立节点随时间的变化情况如图1所示. 节点间的相似参量分别为

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_9, F_2 = [I_8 \ O_{8 \times 1}]^T, F_3 = [I_7 \ O_{7 \times 2}]^T, \\
 F_4 &= [I_6 \ O_{6 \times 3}]^T, F_5 = [I_5 \ O_{5 \times 4}]^T, \\
 F_6 &= [I_4 \ O_{4 \times 5}]^T, F_7 = [I_3 \ O_{3 \times 6}]^T, \\
 F_8 &= [I_2 \ O_{2 \times 7}]^T, F_9 = [I_2 \ O_{2 \times 7}]^T, \\
 K_1 &= [2 \ -5 \ 1 \ -4 \ 4 \ -1 \ 2 \ -5 \ 0], \\
 K_2 &= [7 \ -7 \ 6 \ 1 \ 1 \ -3 \ 0 \ -4], \\
 K_3 &= [6 \ -11 \ 8 \ -1 \ 2 \ -1 \ 4], \\
 K_4 &= [8 \ -10 \ 12 \ -1 \ 2 \ -5], \\
 K_5 &= [4 \ -7 \ 3 \ -3 \ -3], \\
 K_6 &= [6 \ -11 \ 10 \ -1], K_7 = [1 \ -11 \ 1], \\
 K_8 &= [0 \ -11], K_9 = [5 \ -12].
 \end{aligned}$$

如果考虑网络的连接方式为星形耦合方式, 则耦合矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{9 \times 9}. \quad (30)$$

节点间的内部耦合矩阵 H_{ij} 满足 $H_{ij} = \psi_i F_j$, 由前面的假设条件, 选取

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= a \times \text{randn}(9, 9), \varphi_h = a \times \text{randn}(9 - m, 9), \\
 h &= 2, 3, \dots, 9, m = 1, 2, \dots, 7, \quad (31)
 \end{aligned}$$

其中 a 是一可调的正常数并满足 $0 < a < 1$. 由式(28)~(31), 整个复杂动态网络可以表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^9 c_{ij} [H_{ij} x_j(t - \tau) - \\
 &H_{ii} x_i(t - \tau)] + B_i u_i. \quad (32)
 \end{aligned}$$

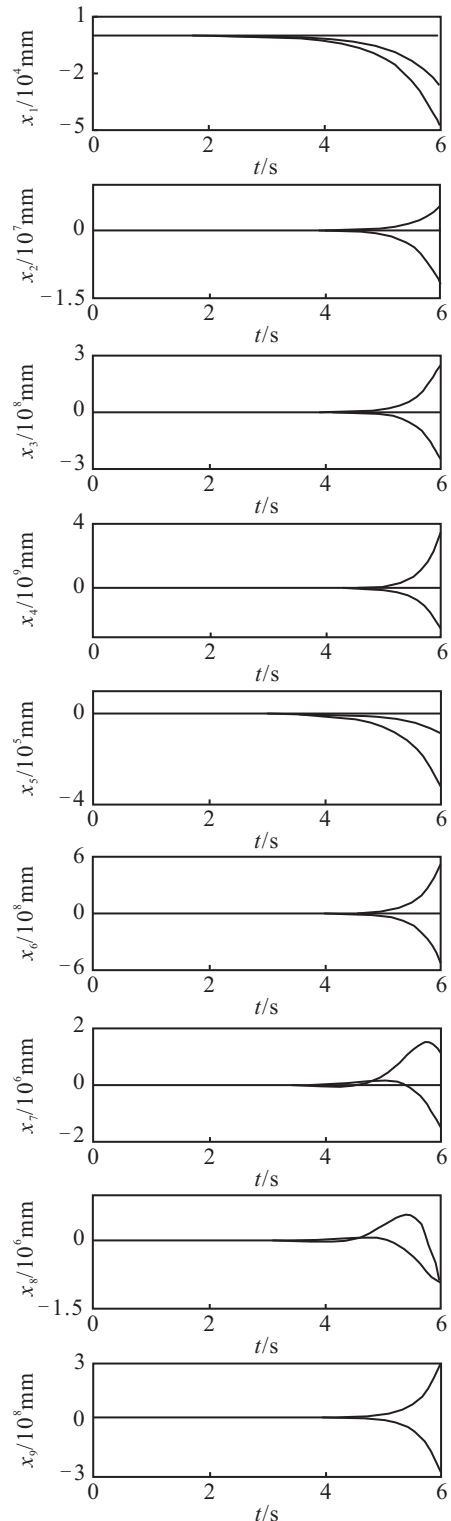


图1 复杂网络(28)和(29)中孤立节点的状态

首先考虑时滞复杂网络(32)的稳定问题. 如果取参数 $a = 0.001$, 耦合时滞取 $\tau = 0.5$, 根据定理1设计控制器(2)使得带有耦合时滞的复杂网络是稳定的. 仿真中选取参数 $\delta = 1, \varepsilon = 2$, 带有耦合时滞的复杂网络(32)中的状态反应曲线如图2所示.

下面考虑时滞复杂网络(32)的同步问题. 同步误差定义为 $e_{ij}(t) = z_i(t) - z_j(t)$, 由于 $e_{ij}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ 等价于 $e_{i1}(t) = z_i(t) - z_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, 为了简单起见, 引入同

步误差 $\bar{e} = \sqrt{\sum_{i=1}^9 e_{i1}^T e_{i1}}$ 来衡量整个耦合时滞网络 (32).

根据定理 2, 采用 LMI 方法设计控制器 (12), 使得复杂网络 (32) 是同步的. 选取参数 $\mu = 0.01$, $\beta = 0.02$, $\gamma = 10$, 仿真结果如图 3 所示. 可以看出, 复杂网络的所有节点状态实现了同步.

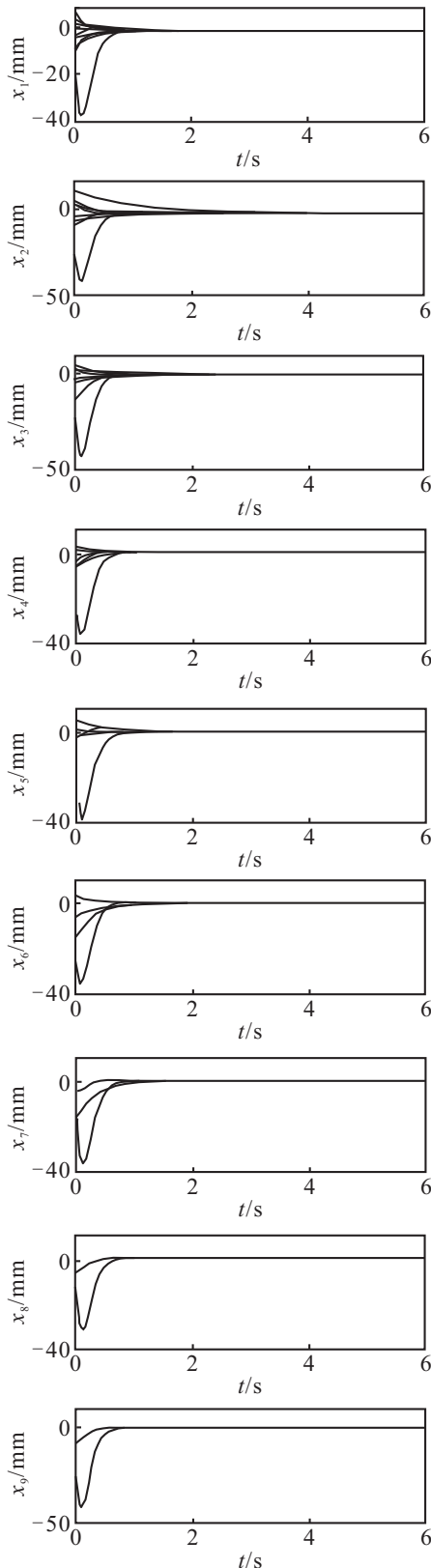


图 2 复杂网络 (32) 中状态的时间响应

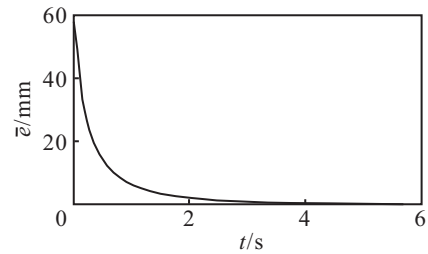


图 3 复杂网络 (32) 中状态同步误差 \bar{e} 的时间响应

以上仿真结果表明, 带有相似节点状态的时滞耦合复杂网络 (1), 通过定理 1 和定理 2 中设计的控制器能够较好地实现系统的镇定和同步.

5 结 论

本文针对具有相似结构的耦合时滞复杂网络, 分别给出了复杂网络的稳定性和同步的控制器设计方法. 从仿真结果可以看出, 含有不同维数节点的耦合时滞复杂网络, 只要这些节点之间满足相似的性质, 便可以通过设计相似参量的分散控制器使得网络达到稳定和同步, 从而有效解决其他参考文献中网络节点之间完全一致模型的设计问题.

参考文献(References)

- [1] Wang X F, Chen G R. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. Int J of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(1): 187-192.
- [2] Wang X F, Chen G R. Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility[J]. IEEE Trans on Circuit System, 2002, 49(1): 54-62.
- [3] Li Z, Chen G R. Robust adaptive synchronization of uncertain dynamical networks[J]. Physics Letters A, 2004, 324(2-3): 166-178.
- [4] Cao J D, Yu W W, Qu Y Z. A new complex network model and convergence dynamical for reputation computation in virtual organizations[J]. Physics Letters A, 2006, 356(6): 414-425.
- [5] Chai Wah Wu, Chua Leon O Chau. Application of kronecker products to the analysis of systems with uniform linear coupling[J]. IEEE Trans on Circuit System, 2004, 51(4): 787-796.
- [6] Duan Z S, Wang J Z, Chen G R, et al. Stability analysis and decentralized control of a class of complex dynamical networks[J]. Automatica, 2008, 44(4): 1028-1035.
- [7] 王磊, 戴华平, 孙优贤. 基于复杂网络模型的同步分析及控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(1): 8-12.
(Wang L, Dai H P, Sun Y X. Synchronization analysis and control based on complex network models[J]. Control and Decision, 2008, 23(1): 8-12.)