

文章编号: 1001-0920(2013)02-0279-06

随机跳变摄动系统的鲁棒 H_∞ 控制

陈佳¹, 方洋旺², 楼顺天¹

(1. 西安电子科技大学 电子工程学院, 西安 710071; 2. 空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

摘要: 针对具有独立马尔科夫结构的线性随机跳变摄动系统, 在小时间参数不为零的基础上研究了系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 首先提出具有线性矩阵不等式形式的鲁棒 H_∞ 稳定判据; 进而, 在计算相应小时间参数上界的基础上给出线性随机跳变摄动系统的状态反馈鲁棒 H_∞ 控制方法. 对于任意处于小时间参数上界范围内的数值, 所提出的方法均可确保相应的闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能.

关键词: 摄动系统; 随机系统; 独立马尔科夫结构; 线性矩阵不等式; 鲁棒 H_∞ 稳定

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Investigation about H_∞ stability of linear singular perturbed system with Markovian jumping structure

CHEN Jia¹, FANG Yang-wang², LOU Shun-tian¹

(1. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China. Correspondent: CHEN Jia, E-mail: jackiechan1985@126.com)

Abstract: For the linear random jumping system with the independent Markovian structure, the robust H_∞ control about such system that the small time parameter is not neglected is investigated. Firstly, the H_∞ stability criterion with the framework of linear matrix inequalities is given. Then based on the max of the small time parameter that has been computed, the design of state feedback controller about H_∞ stability is listed. For each small time parameter that is less than the upper bound, this method can ensure the closed loop random system H_∞ performance.

Key words: singular perturbed system; random system; independent Markovian structure; linear matrix inequalities; robust H_∞ stability

0 引言

在实际工程问题的研究中, 伴随着如温度、风速等环境条件的改变以及互联子系统的变化, 非线性系统线性化之后工作点迁移等随机突变现象的发生, 系统的模态常常会产生跳变现象. 大量的研究表明, 这些系统模态跳变的规律常常遵循 Markov 过程. 自 20 世纪 60 年代二次型控制问题被提出以来, 这一类系统的研究和应用越来越广泛^[1], 而建立在摄动系统基础上的奇异系统作为更广泛的动力学系统模型, 越来越多地应用于动力学研究和工程上工业控制系统的各个领域^[2-4]. 文献 [5] 将奇异系统与随机系统相结合, 并在随机稳定、鲁棒稳定和有限滤波器设计方面进行了大量研究, 得到了很多很好的结果.

现有针对奇异系统的分析大都建立在退化的摄

动系统的基础上, 即将摄动系统中的小时间参数忽略为零, 得到一个简化的系统模型, 然后对其进行分析, 得到相应的结果. 这样做可以在一定程度上简化分析时的计算量, 但相应地会造成原系统高频动态的缺失, 得到的结论也只保留了低频部分的近似结果^[6]. 事实上, 很多情况下无法忽略小时间参数在系统分析时造成的影响. 因此, 近年来越来越多的学者认识到小时间参数对系统稳定有着不可忽视的作用, 在对摄动系统的分析中不再将其简化为零^[7-9], 从时域和频域分别对容许系统稳定的小时间参数上界进行分析计算^[10-11], 得到的结果也与退化后的奇异系统存在很大的差异.

大多关于摄动系统的分析都建立在快慢分割的基础上. 但是, 经快慢分割解耦后的子系统会带有无

收稿日期: 2011-08-28; 修回日期: 2012-01-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674040).

作者简介: 陈佳(1985—), 男, 博士生, 从事基于马尔科夫参数跳变系统控制理论的研究; 方洋旺(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事导弹制导与控制、随机最优控制理论与应用等研究.

法用显式表示的关于小时间参数的高阶无穷小,为系统的稳定性分析造成巨大的困难. 鉴于此, 本文在文献[5]对奇异随机跳变系统鲁棒 H_∞ 理论分析所得结果的基础上, 着重考虑了小时间参数不为零的摄动系统模型, 给出了具有线性矩阵不等式形式的鲁棒 H_∞ 稳定性判据, 推导了相应的状态反馈控制器设计方法, 并计算了容许闭环系统具有鲁棒 H_∞ 稳定性性能的小时间参数上界. 所采取的方法避免了快慢分割, 简化了计算量. 最后给出的数值算例表明, 不忽略小时间参数的摄动系统稳定性判据与退化后的奇异系统有着较大的差异, 与原有的结论相比, 本文的结果具有更高的工程应用价值.

1 问题描述

考虑具有如下形式的线性摄动跳变系统:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon_i I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f(t) \\ \dot{x}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} B_{w1i} \\ B_{w2i} \end{bmatrix} w(t), \quad (1)$$

$$z(t) = [C_{z1i} \quad C_{z2i}] \begin{bmatrix} x_f(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} + D_{zi} u(t) + B_{zi} w(t). \quad (2)$$

其中: 下角标 i 为当前时刻处于工作状态的结构参数, 假设 $r(t)$ 为系统离散的结构参数过程, 则 $\{r(t) = i, t \in T\}$ 为 Markov 链, 在有限维状态空间 $S = 1, 2, \dots, N$ 中取值; $x_f(t) \in R^m, x_s(t) \in R^n$ 分别为系统的快变子向量和慢变子向量; $u(t)$ 为系统的输入控制向量; $z(t)$ 为系统的测量输出; $w(t)$ 为能量有限的系统内部或外部扰动, 满足 $\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt < \infty$; 小时间参数 ε_i 满足 $0 < \varepsilon_i \ll 1$; 系统的转移概率用下式描述:

$$P[r(t+h) = j | r(t) = i] = \begin{cases} \lambda_{ij} h + o(h), & i \neq j; \\ 1 - \lambda_{ij} h + o(h), & i = j. \end{cases}$$

式中 $o(h)$ 代表 h 的高阶无穷小, 满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0,$$

且 λ_{ij} 为系统模态的转移率(又称转移强度), 满足

$$\lambda_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}.$$

令式(1)和(2)中的 $u(t) = 0$, 可得到原摄动系统相应的自治系统, 再令 $y(t)^T = [x_f(t)^T \quad x_s(t)^T]^T$, 则可给出相应自治系统随机稳定的定义如下.

定义 1 对于式(1)所示随机跳变系统, 令 $w(t) = 0$, 如果对于任意给定的系统初值 y_0 和系统初始模态 i_0 , 如下不等式均成立:

$$E \left[\int_0^\infty \|y(t)\|^2 dt | y_0, i_0 \right] \leq T(y_0, i_0),$$

则系统是随机稳定的, 其中 $T(y_0, i_0)$ 是与 (y_0, i_0) 有关的常数值.

当系统存在外部扰动 $w(t)$ 时, 系统具有如下鲁棒 H_∞ 稳定性性能的定义.

定义 2 具有式(1)和(2)形式的跳变系统随机稳定, 且对于给定的正实参数 r , 满足

$$\|z(t)\|_2 \triangleq \left\{ E \left[\int_0^\infty z(t)^T z(t) dt | (z_0, i_0) \right] \right\}^{1/2} \leq r [\|w(t)\|_2^2 + m(t_0, i_0)]^{1/2},$$

则称系统具有鲁棒 H_∞ 稳定性性能, 其中 $m(t_0, i_0)$ 是与系统初值有关的常数.

假设

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11i} &= \begin{bmatrix} A_{11i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{12i} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{21i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{22i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22i} \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{w1i} &= \begin{bmatrix} B_{w1i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{w2i} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{w2i} \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_{z1i} &= [C_{z1i} \quad 0], \quad \tilde{C}_{z2i} = [0 \quad C_{z2i}], \end{aligned}$$

则可以将原系统改写成如下形式:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \dot{y}(t) &= (\varepsilon_i \tilde{A}_{11i} + \varepsilon_i \tilde{A}_{12i} + \tilde{A}_{21i} + \tilde{A}_{22i}) y(t) + \\ & (\varepsilon_i \tilde{B}_{w1i} + \tilde{B}_{w2i}) w(t), \quad (3) \end{aligned}$$

$$z(t) = (\tilde{C}_{z1i} + \tilde{C}_{z2i}) y(t) + B_{zi} w(t). \quad (4)$$

注 1 文献[6]中介绍的快慢子系统分割是分析奇异摄动系统普遍采用的方法, 假设式(1)中 $u(t)$ 和 $w(t)$ 均为零, 如果 A_{22i} 是可逆的, 则可以将式(1)化为下面的形式:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon_i I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f(t) \\ \dot{x}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{0i} + o(\varepsilon_i) & 0 \\ 0 & A_{22i} + o(\varepsilon_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix}.$$

其中: $A_{0i} = A_{11i} - A_{12i} A_{22i}^{-1} A_{21i}$, $o(\varepsilon_i)$ 为关于小时间参数 ε_i 的高阶无穷小. 此时, 系统虽被解耦为快慢两个子系统, 但高阶无穷小 $o(\varepsilon_i)$ 无法用显式表示, 它的存在使得无法用传统的 LMI 方法对所得到的跳变系统进行稳定性分析.

假设小时间参数 $\varepsilon_i \neq 0$, 对式(3)左右两端同时乘以 ε_i^{-1} , 则可以将式(3)化为下面的形式:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (\tilde{A}_{11i} + \tilde{A}_{12i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{21i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{22i}) y(t) + \\ & (\tilde{B}_{w1i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{B}_{w2i}) w(t). \quad (5) \end{aligned}$$

式(5)与文献[1]中所分析的非奇异跳变系统在形式上是等价的, 所不同的是等式右边的系数矩阵包

含了小时间参数 ε_i . 因此, 经过上述数学变换, 可以将摄动系统 (1) 转化为等价的具有非奇异跳变系统形式的系统 (5).

下面给出本文将要用到的两个重要引理.

引理 1^[1] 对于一个具有 $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ 形式的随机系统, 当存在一组正定对称矩阵 P_i 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0, \quad (6)$$

则该随机系统是随机稳定的.

引理 2^[5](Schur 补引理) 假设对称矩阵 M 可以分块表示成 $M = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}$, 则下面的 2 个结论是等价的:

- 1) $M > 0$, 当且仅当 $C > 0$ 且 $A - B^T C^{-1} B > 0$;
- 2) $M > 0$, 当且仅当 $A > 0$ 且 $C - B^T A^{-1} B > 0$.

2 随机跳变摄动系统的鲁棒 H_∞ 稳定性判据

在给出随机跳变摄动系统 H_∞ 鲁棒稳定性判据之前, 先给出一个关于无扰动的自治随机跳变摄动系统随机稳定的推论.

推论 1 对于具有式 (1) 形式的随机跳变摄动系统, 给定小时间参数为正实常数 ε_i , 令 $u(t)$ 和 $w(t)$ 都为零, 则相应的无扰动自治系统随机稳定的条件是存在一组正定对称的矩阵 P_i , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$(\varepsilon_i \tilde{A}_{11i} + \varepsilon_i \tilde{A}_{12i} + \tilde{A}_{21i} + \tilde{A}_{22i})^T P_i + P_i (\varepsilon_i \tilde{A}_{11i} + \varepsilon_i \tilde{A}_{12i} + \tilde{A}_{21i} + \tilde{A}_{22i}) + \varepsilon_i \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0.$$

证明 令式 (5) 中的 $w(t) = 0$, 再用 $(\tilde{A}_{11i} + \tilde{A}_{12i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{21i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{22i})$ 代替式 (6) 中的 A_i , 则相应的随机稳定判定矩阵不等式变为

$$(\tilde{A}_{11i} + \tilde{A}_{12i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{21i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{22i})^T P_i + P_i (\tilde{A}_{11i} + \tilde{A}_{12i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{21i} + \varepsilon_i^{-1} \tilde{A}_{22i}) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0.$$

注意到 ε_i 是正实常数, 不等式左右两边同时乘以 ε_i , 不等号方向不改变, 所以上述矩阵不等式等价于推论 1 中的形式. \square

在推论 1 的基础上, 下面给出判断随机跳变摄动系统鲁棒 H_∞ 稳定的判定定理.

定理 1 对于具有式 (1) 和 (2) 形式的摄动系统, 给定一个正实常数 ε_i 作为摄动系统的小时间参数, 当 $u(t) = 0$ 时, 系统随机稳定, 且满足对于给定正实参数 r 的鲁棒 H_∞ 稳定性性能的条件是存在一组正定对称矩

阵 P_i , 使得具有如下形式的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} A_{\varepsilon_i}^T P_i + P_i A_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j + C_{z_i}^T C_{z_i} & \rightarrow \\ B_{w\varepsilon_i}^T P_i + C_{z_i}^T B_{z_i} & \\ \leftarrow P_i B_{w\varepsilon_i} + C_{z_i} B_{z_i}^T & \\ B_{z_i}^T B_{z_i} - r^2 I & \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

其中: $C_{z_i} = [C_{z_1i} \ C_{z_2i}]$, 且

$$A_{\varepsilon_i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_i A_{11i} & \varepsilon_i A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix}, \quad B_{w\varepsilon_i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_i B_{w1i} \\ B_{w2i} \end{bmatrix}.$$

证明 首先证明系统随机稳定. 明显可以看到

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_i}^T P_i + P_i A_{\varepsilon_i} = & (\varepsilon_i \tilde{A}_{11i} + \varepsilon_i \tilde{A}_{12i} + \tilde{A}_{21i} + \tilde{A}_{22i})^T P_i + \\ & P_i (\varepsilon_i \tilde{A}_{11i} + \varepsilon_i \tilde{A}_{12i} + \tilde{A}_{21i} + \tilde{A}_{22i}), \end{aligned}$$

所以当式 (7) 成立时, 不等式

$$(\varepsilon_i \tilde{A}_{11i} + \varepsilon_i \tilde{A}_{12i} + \tilde{A}_{21i} + \tilde{A}_{22i})^T P_i + P_i (\varepsilon_i \tilde{A}_{11i} + \varepsilon_i \tilde{A}_{12i} + \tilde{A}_{21i} + \tilde{A}_{22i}) + \varepsilon_i \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j + C_{z_i}^T C_{z_i} < 0$$

也成立. 又因为 $C_{z_i}^T C_{z_i}$ 是半正定的, 根据推论 1, 此时的系统是随机稳定的.

根据式 (3), 建立相应的 Lyapunov 方程为 $V(y, i) = \varepsilon_i y(t)^T P_i y(t)$, 其中 P_i 是正定对称的, 则根据弱微分算子的定义, $V(y, i)$ 的一阶弱微分算子 $\Delta V(y, i)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \Delta V(y, i) = & y(t)^T \left(A_{\varepsilon_i}^T P_i + P_i A_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \right) y(t) + \\ & y(t)^T P_i B_{w\varepsilon_i} w(t) + w(t)^T B_{w\varepsilon_i}^T P_i y(t). \end{aligned}$$

同时, 根据式 (4), 有

$$\begin{aligned} z(t)^T z(t) - r^2 w(t)^T w(t) + \Delta V(y, i) = & \eta(t)^T \theta(t, i) \eta(t). \end{aligned}$$

其中: $\theta(t, i)$ 如式 (7) 不等号的左边所示, 而

$$\eta(t)^T = [y(t)^T \quad w(t)^T].$$

令 $J_t = E \left[\int_0^t [z(\tau)^T z(\tau) - r^2 w(\tau)^T w(\tau)] d\tau \right]$, 并将 J_t 改写为下面的形式:

$$\begin{aligned} J_t = & E \left[\int_0^t [z(\tau)^T z(\tau) - r^2 w(\tau)^T w(\tau) + \Delta V(y, i)] d\tau \right] - \\ & E \left[\int_0^t \Delta V(y, i) d\tau \right]. \end{aligned}$$

根据 Dynkin's formula, 有

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^t \Delta V(y, i) d\tau | y_0, i_0 \right] = & \\ E[V(y(t), i(t))] - V(y_0, i_0). & \end{aligned}$$

所以

$$J_t = E \left[\int_0^t \eta(\tau)^T \theta(\tau, i) \eta(\tau) d\tau \right] - E[V(y(t), i(t))] + V(y_0, i_0).$$

显然, $E[V(y(t), i(t))] \geq 0$, 故当 $\theta(t, i) < 0$ 时, $J_t < V(y_0, i_0)$. 令 $t \rightarrow \infty$, 则 $J_\infty < V(y_0, i_0)$ 等价于下面的式子:

$$\|z(t)\|_2^2 - r^2 \|w(t)\|_2^2 \leq y_0^T P_{i_0} y_0 = m(t_0, i_0).$$

再根据定义 1, 此时系统是鲁棒 H_∞ 稳定的. \square

根据引理 2, 式(7)成立等价于下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} A_{\varepsilon_i}^T P_i + P_i A_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j & P_i B_{w\varepsilon_i} & C_{zi}^T \\ B_{w\varepsilon_i}^T P_i & -r^2 I & B_{zi}^T \\ C_{zi} & B_{zi} & -I \end{bmatrix} < 0.$$

进行简单的代数变换, 上式可表示为

$$\varepsilon_i \Xi_{1i} + (1 - \varepsilon_i) \Xi_{2i} < 0. \quad (8)$$

其中

$$\Xi_{1i} = \begin{bmatrix} J_0 & P_i B_{wi} & C_{zi}^T \\ B_{wi}^T P_i & -r^2 I & B_{zi}^T \\ C_{zi} & B_{zi} & -I \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{2i} = \begin{bmatrix} J_1 & P_i E_1 B_{wi} & C_{zi}^T \\ B_{wi}^T E_1 P_i & -r^2 I & B_{zi}^T \\ C_{zi} & B_{zi} & -I \end{bmatrix},$$

$$J_0 = A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j,$$

$$J_1 = (E_1 A_i)^T P_i + P_i (E_1 A_i),$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix},$$

$$B_{wi} = \begin{bmatrix} B_{w1i} \\ B_{w2i} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

又因为小时间参数大于零, 所以式(8)等价于

$$\Xi_{1i} + (\varepsilon_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0. \quad (9)$$

注 2 文献[5]中的推论表明, 随机跳变摄动系统的鲁棒 H_∞ 稳定性条件是存在正定的 P_i 使得 $\Xi_{1i} < 0$. 但是, 对于非退化的摄动系统, 式(9)不等号左边第 2 项的存在会导致原摄动系统的稳定性条件与退化后奇异系统的稳定性条件不一致, 即使 Ξ_{1i} 负定, 也不一定能够保证式(9)成立, 亦或者虽然式(9)小于零, 此时 Ξ_{1i} 也存在正的特征值.

3 具有鲁棒 H_∞ 控制的闭环稳定的容许小时间参数上界

对于摄动系统而言, 要精确得到小时间参数 ε_i 非常困难, 一般情况下只能将其限定在一个区间之内, 即已知 $\varepsilon_i \in (0, \bar{\varepsilon}_i]$. 此时, 由于 ε_i 具体数值未知, 定理 1

中的矩阵不等式(7)无法求解.

注意到式(7)与(9)等价, 所以有如下推论.

推论 2 假设对于一个给定的小时间参数 $\bar{\varepsilon}_i$, 有矩阵不等式 $\Xi_{1i} + (\bar{\varepsilon}_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0$ 成立, 则当 $\Xi_{2i} < 0$ 时, 对每一个 $(0, \bar{\varepsilon}_i]$ 区间内的 ε_i , 不等式 $\Xi_{1i} + (\varepsilon_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0$ 也是成立的.

证明 将 $\Xi_{1i} + (\varepsilon_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0$ 改写成如下形式:

$$\begin{aligned} & \Xi_{1i} + (\varepsilon_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} = \\ & \Xi_{1i} + (\bar{\varepsilon}_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} + (\varepsilon_i^{-1} - \bar{\varepsilon}_i^{-1}) \Xi_{2i}. \end{aligned}$$

因为 $0 < \varepsilon_i < \bar{\varepsilon}_i < 1$, 所以 $\varepsilon_i^{-1} > \bar{\varepsilon}_i^{-1} > 0$, 且已知 $\Xi_{1i} + (\bar{\varepsilon}_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0$, 则当 $\Xi_{2i} < 0$ 时, 有

$$\Xi_{1i} + (\varepsilon_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < \Xi_{1i} + (\bar{\varepsilon}_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0. \quad \square$$

推论 2 表明, 对于一个摄动系统而言, 当 $\Xi_{2i} < 0$ 时, 该摄动系统的鲁棒 H_∞ 稳定容许小时间参数上界 $\bar{\varepsilon}_i$ 是存在的, 这时定理 1 可以表述成如下形式: 假如存在一个正实常数 $\bar{\varepsilon}_i \in (0, 1)$ 和正定矩阵 P_i , 使得矩阵不等式 $\Xi_{1i} + (\bar{\varepsilon}_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0$ 成立, 则对于每一个 $0 < \varepsilon_i < \bar{\varepsilon}_i < 1$ 的 ε_i , 原摄动系统都是鲁棒 H_∞ 稳定的. 但是, 注意到该矩阵不等式不等号的左边是一个关于 $\bar{\varepsilon}_i$ 和 P_i 的非线性矩阵不等式, 通常对这样的矩阵不等式求解非常困难, 相应的小参数上界 $\bar{\varepsilon}_i$ 也不容易得到.

这里假设 Ξ_{1i} 和 Ξ_{2i} 的最大特征值分别可以用 $\lambda_{\max}(\Xi_{1i})$ 和 $\lambda_{\max}(\Xi_{2i})$ 表示, 则对于 ε_i , 当代数不等式

$$\lambda_{\max}(\Xi_{1i}) + (\varepsilon_i^{-1} - 1) \lambda_{\max}(\Xi_{2i}) \leq 0$$

成立时, $\Xi_{1i} + (\varepsilon_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} \leq 0$ 也成立, 此时摄动系统具有鲁棒 H_∞ 稳定性能. 又注意到, 明显有 $\lambda_{\max}(\Xi_{2i}) < 0$ 且 $0 < \varepsilon_i < 1$, 故此时小时间参数应满足

$$\varepsilon_i < 1 + \lambda_{\max}^{-1}(\Xi_{1i}) \lambda_{\max}(\Xi_{2i}), \quad (10)$$

而 $\lambda_{\max}(\Xi_{1i})$ 和 $\lambda_{\max}(\Xi_{2i})$ 应该满足

$$\lambda_{\max}(\Xi_{1i}) + \lambda_{\max}(\Xi_{2i}) < 0. \quad (11)$$

式(11)成立的条件是 $\Xi_{1i} + \Xi_{2i} < 0$.

令式(10)不等号左端的数值为 X_i , 则显然如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \Xi_{1i} + (X_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < \\ & [\lambda_{\max}(\Xi_{1i}) + (X_i^{-1} - 1) \lambda_{\max}(\Xi_{2i})] I, \end{aligned}$$

其中 I 为单位矩阵. 而当 $\Xi_{1i} + \Xi_{2i} < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \lambda_{\max}(\Xi_{1i}) + (X_i^{-1} - 1) \lambda_{\max}(\Xi_{2i}) = \\ & \lambda_{\max}^{-2}(\Xi_{1i}) [\lambda_{\max}(\Xi_{1i}) + \lambda_{\max}(\Xi_{2i})] < 0, \end{aligned}$$

所以 $\Xi_{1i} + (X_i^{-1} - 1) \Xi_{2i} < 0$ 成立, 从而可以得到如下定理.

定理 2 对于如式(1)和(2)所示的随机跳变摄动系统, 当 $u(t) = 0$ 时, 如果存在一组正定对称的矩阵

P_i , 使得 $\Xi_{2i} < 0$ 且 $\Xi_{1i} + \Xi_{2i} < 0$, 则此时对于每一个区间 $(0, \bar{\varepsilon}_i)$ 内的 ε_i , 摄动系统都是随机稳定且满足鲁棒 H_∞ 稳定性能的, 此时小时间参数上界 $\bar{\varepsilon}_i$ 用下式计算:

$$\bar{\varepsilon}_i = 1 + \lambda_{\max}^{-1}(\Xi_{1i})\lambda_{\max}(\Xi_{2i}),$$

其中 Ξ_{1i} 和 Ξ_{2i} 如式 (8) 中所示.

证明略.

注 3 当 $\lambda_{\max}(\Xi_{1i}) > 0$ 时, 由于 Ξ_{1i} 存在正的特征值, 此时退化后的奇异系统并不是鲁棒 H_∞ 稳定的, 而对于存在于区间 $(0, \bar{\varepsilon}_i)$ 的 ε_i 而言, 相应的摄动系统则是鲁棒 H_∞ 稳定的; 当 $\lambda_{\max}(\Xi_{1i}) < 0$ 时, 表明摄动系统和退化后的奇异系统均鲁棒 H_∞ 稳定, 此时 $\bar{\varepsilon}_i = 1$.

4 鲁棒 H_∞ 反馈控制器设计

下面考虑随机跳变摄动系统的状态反馈控制器设计. 令

$$B_i^T = [B_{1i}^T \ B_{2i}^T], \ E_2 = \text{diag}[I \ 2I],$$

且反馈控制器 $u(t) = K_i y(t)$, 则有下列的定理成立, 该定理可用于设计相应的鲁棒 H_∞ 反馈控制器.

定理 3 对于式 (1) 和 (2) 所示的摄动跳变系统, 满足鲁棒 H_∞ 稳定性能的条件是存在一组正定对称矩阵 Q_i 和具有适当维数的矩阵 Y_i , 使得如下所示的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_0 & E_1 B_{wi} & Q_i C_{zi}^T + Y_i^T D_{zi}^T \\ B_{wi}^T E_1 & -r^2 I & B_{zi}^T \\ C_{zi} Q_i + D_{zi} Y_i & B_{zi} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_1 & E_2 B_{wi} \\ B_{wi}^T E_2 & -2r^2 I \\ 2(C_{zi} Q_i + D_{zi} Y_i) & 2B_{zi} \\ S_i^T(Q) & 0 \\ 2(Q_i C_{zi}^T + Y_i^T D_{zi}^T) & S_i(Q) \\ 2B_{zi}^T & 0 \\ -2I & 0 \\ 0 & -X_i(Q) \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

其中

$$\bar{J}_0 = (Q_i A_i^T + Y_i^T B_i^T) E_1 + E_1 (A_i Q_i + B_i Y_i),$$

$$\bar{J}_1 =$$

$$(Q_i A_i^T + Y_i^T B_i^T) E_2 + E_2 (A_i Q_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii} Q_i,$$

$$S_i(Q) =$$

$$[\sqrt{\lambda_{i1}} Q_i \ \cdots \ \sqrt{\lambda_{ii-1}} Q_i \ \sqrt{\lambda_{ii+1}} Q_i \ \cdots \ \sqrt{\lambda_{iN}} Q_i],$$

$$X_i(Q) = \text{diag}[Q_1 \ \cdots \ Q_{i-1} \ Q_{i+1} \ \cdots \ Q_N].$$

此时, 状态反馈控制器 $K_i = Y_i Q_i^{-1}$, 而鲁棒 H_∞ 稳定容许的小时间参数上界 $\bar{\varepsilon}_i$ 可用下式计算:

$$\bar{\varepsilon}_i = 1 + \lambda_{\max}^{-1}(\Xi_{1i})\lambda_{\max}(\Xi_{2i}).$$

其中: $P_i = Q_i^{-1}$, 且 $\lambda_{\max}(\Xi_{1i})$ 和 $\lambda_{\max}(\Xi_{2i})$ 分别代表 Ξ_{1i} 和 Ξ_{2i} 的最大特征值, Ξ_{1i} 和 Ξ_{2i} 如式 (8) 中所示.

证明 令 $u(t) = K_i y(t)$, 则摄动系统 (1) 和 (2) 可以表示如下:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon_i I \end{bmatrix} y(t) = (A_i + B_i K_i) y(t) + B_{wi} w(t),$$

$$z(t) = (C_{zi} + D_{zi} K_i) y(t) + B_{zi} w(t).$$

用 $A_i + B_i K_i$ 和 $C_{zi} + D_{zi} K_i$ 代替定理 2 中 Ξ_{2i} 之 A_i 和 C_{zi} , 可得到下面的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_2 & P_i E_1 B_{wi} & C_{zi}^T + K_i^T D_{zi}^T \\ B_{wi}^T E_1 P_i & -r^2 I & B_{zi}^T \\ C_{zi} + D_{zi} K_i & B_{zi} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中

$$\bar{J}_2 = [E_1(A_i + B_i K_i)]^T P_i + P_i [E_1(A_i + B_i K_i)].$$

对式 (14) 左右两端分别乘以 $\text{diag}[P_i^{-1} \ I \ I]$, 再令 $P_i^{-1} = Q_i, K_i Q_i = Y_i$, 可以得到式 (14) 的等价形式如式 (12) 所示.

同样, 用 $A_i + B_i K_i$ 和 $C_{zi} + D_{zi} K_i$ 代替定理 2 中 $\Xi_{1i} + \Xi_{2i}$ 之 A_i 和 C_{zi} , 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_3 & P_i E_2 B_{wi} & 2(C_{zi}^T + K_i^T D_{zi}^T) \\ B_{wi}^T E_2 P_i & -2r^2 I & 2B_{zi}^T \\ 2(C_{zi} + D_{zi} K_i) & 2B_{zi} & -2I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

其中

$$\bar{J}_3 = [E_2(A_i + B_i K_i)]^T P_i + P_i [E_2(A_i + B_i K_i)] + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j.$$

再对式 (15) 左右两边同时乘以 $\text{diag}[P_i^{-1} \ I \ I]$, 则式 (15) 可以写成下面的形式:

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_4 & E_2 B_{wi} & 2P_i^{-1}(C_{zi}^T + K_i^T D_{zi}^T) \\ B_{wi}^T E_2 & -2r^2 I & 2B_{zi}^T \\ 2(C_{zi} + D_{zi} K_i) P_i^{-1} & 2B_{zi} & -2I \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

其中

$$\bar{J}_4 = P_i^{-1} [E_2(A_i + B_i K_i)]^T +$$

$$P_i^{-1} [E_2(A_i + B_i K_i)] P_i^{-1} + P_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \right) P_i^{-1}.$$

对式 (16) 的左端使用引理 2, 同样令 $P_i^{-1} = Q_i, K_i Q_i = Y_i$, 则可以得到式 (16) 的等价形式为定理 3 中式 (13) 的形式. \square

5 数值算例

考虑如下的随机跳变摄动系统, 假设系统参数矩

阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.03 & -0.25 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.0 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B_{w2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{z1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C_{z2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_{z1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 2 \end{bmatrix}, B_{z2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$D_{z1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{z2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}.$$

给出转移概率强度矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 正实常数 $r = 5$.

求解式(12)和(13)所示的矩阵不等式, 可得到如下一组可行性解:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.3806 & -2.1759 \\ -2.1759 & 7.3426 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.2971 & 0.3241 \\ 0.3241 & 3.0409 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -0.7952 & 3.9028 \\ -0.5854 & -3.4130 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -0.5943 & 0.0253 \\ 0.0540 & -0.7830 \end{bmatrix}.$$

计算相应的状态反馈控制器增益

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.4910 & 0.6770 \\ -2.1700 & -1.1079 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.2734 & 0.2507 \\ 0.5236 & -0.3133 \end{bmatrix}.$$

同时还可以求得

$$\lambda_{\max}(\Xi_{11}) = 1.4267, \lambda_{\max}(\Xi_{21}) = -2.7748;$$

$$\lambda_{\max}(\Xi_{12}) = 0.5499, \lambda_{\max}(\Xi_{22}) = -0.9850.$$

因此, 计算出的鲁棒 H_∞ 稳定容许的小时间参数上界为 $\bar{\varepsilon}_1 = 0.4858, \bar{\varepsilon}_2 = 0.4417$.

6 结 论

本文基于已有的奇异系统鲁棒 H_∞ 稳定的矩阵不等式条件, 着重考虑了摄动系统中小时间参数不为

零时对整个系统稳定性的影响, 推导了摄动系统满足鲁棒 H_∞ 稳定的矩阵不等式条件, 给出了鲁棒 H_∞ 稳定性能容许的小时间参数上界计算方法, 同时设计了状态反馈鲁棒 H_∞ 控制器. 文中的主要结果表明, 在忽略小时间参数的情况下可能造成奇异系统和相应原摄动系统的鲁棒 H_∞ 稳定不一致. 从最后给出的数值算例也可以看到, $\lambda_{\max}(\Xi_{11})$ 和 $\lambda_{\max}(\Xi_{12})$ 均大于零, 即退化后的奇异系统不满足鲁棒 H_∞ 稳定的矩阵不等式条件, 而未退化的摄动系统却是稳定的. 与文献[5]相比, 本文所得到的结果具有更高的实际工程应用价值.

参考文献(References)

- [1] El-Kebir B. Stochastic switching systems: Analysis and design[M]. Basel: Birkhauser, 2005: 180-215.
- [2] Lu R, Dai X, Su H. Delay-dependant robust stability and stabilization conditions for a class of singular time-delay systems[J]. Asian J of Control, 2008, 10(4): 462-469.
- [3] Xu S, Lam J. Robust admissibility of time-varying singular systems with commensurate time delays[J]. Automatic, 2009, 45(11): 2714-2717.
- [4] El-Kebir B, Ahmad H. Exponential stability of singular systems with multiple time-varying delays[J]. Automatic, 2009, 45(2): 539-545.
- [5] El-Kebir B. Control of singular systems with random abrupt changes in series: Communications and control engineering[M]. Basel: Springer, 2008: 185-194.
- [6] 关肇直. 控制系统中的奇异摄动[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 9-25.
(Guan Z Z. The singular perturbation of control system[M]. Beijing: Science Press, 1986: 9-25.)
- [7] Mi Chin T, Wen Inne T, York Yih S. Robustness analysis of singular perturbed system[C]. Proceeding of the 30th Conf on Decision and Control. Brighton, 1991, 1(1): 1075-1076.
- [8] J-W S, J-W L. Robust stability of nonlinear singular perturbed system with uncertained[J]. Control Theory, 2006, 153(1): 104-111.
- [9] Mohamad S Alwan, Liu X Z. Stability of singular perturbed switching system with time-delay[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(2): 4297-4308.
- [10] Bor Sen C, Lin C L. On the stability bound of singular perturbed systems[J]. Automatic Control, 1990, 11(35): 1265-1270.
- [11] Shao Z H. Stability of singular perturbed systems[J]. Control Theory, 2004, 151(5): 585-589.