

文章编号: 1001-0920(2013)01-0067-06

分布阶次系统时域子空间辨识

王永, 廖增, 彭程, 梁舒, 朱竹婷

(中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230027)

摘要: 研究线性时不变分布阶次系统的时域辨识问题, 提出一种基于主元分析的子空间辨识算法. 该算法采用分数阶滤波器重构基本输入输出方程, 利用主元分析辨识分布阶次系统的各项系数矩阵, 通过代价函数将系统的各项分数阶微分阶次辨识问题转化为多变量参数优化问题, 设计了辅助变量消除辨识过程中随机噪声的不利影响. 数值仿真实例表明了算法的有效性.

关键词: 分布阶次系统; 子空间方法; 主元分析; 系统辨识

中图分类号: O231

文献标志码: A

Subspace identification of distributed order systems in time-domain

WANG Yong, LIAO Zeng, PENG Cheng, LIANG Shu, ZHU Zhu-ting

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China. Correspondent: WANG Yong, E-mail: yongwang@ustc.edu.cn)

Abstract: The problem of the identification of linear time invariant(LTI) distributed order systems in time-domain is firstly discussed, and a subspace identification algorithm based on principle component analysis(PCA) is proposed. The fractional order filter is designed to reconstruct the basic input and output equation. The principle component analysis is used to identify coefficient matrixes of distributed order systems. The cost function is utilized to transform the identification of fractional differential orders into multivariable optimization problem. An instrumental variable is chosen to eliminate the bad influence of random noises during the identification process. A numerical example is given to show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: distributed order systems; subspace method; principle component analysis; system identification

0 引言

分数阶系统采用分数阶微积分对实际对象或系统进行数学描述. 研究表明, 分数阶微积分综合考虑了历史的和非局部的分布式信息, 其表示的不再是局部或点的性质^[1], 因此分数阶微积分可以比传统的整数阶微积分更好地反映出实际对象或系统的真实属性. 近年来, 关于分数阶系统的研究已成为控制领域的一个研究热点^[2-4].

分布阶次系统是一类具有更广泛意义的系统, 分数阶系统和传统的整数阶系统均可认为是分布阶次系统的特殊情况^[5]. Caputo^[6]最早研究了分布阶次微分方程的相关问题, 并对方程进行了求解. 在对一些实际系统的建模和分析中, 分布阶次微分方程已有所应用, 例如超慢径向扩散过程^[7]、具有流变特性的复合材料^[5]、多维随机游走模型^[8]等. 在控制领域, 国

内外学者对分布阶次系统进行了深入研究, 包括分布阶次系统的时域响应、稳定性分析、离散化方法等^[9-11]. 系统辨识是控制系统研究的重要问题. 目前国内外关于分布阶次系统辨识的研究主要集中在频域方面^[12-13], 而时域辨识的相关研究成果较少. 本文首次对状态空间形式描述的线性时不变(LTI)分布阶次系统的时域辨识问题进行了研究.

子空间方法可以准确辨识系统状态空间模型, 在系统辨识中应用广泛^[14-20]. 本文将子空间方法推广到分布阶次系统, 提出了一种基于主元分析的分布阶次系统时域辨识算法. 该算法通过分数阶滤波对基本输入输出方程进行重构, 利用主元分析法辨识出分布阶次系统的各项系数矩阵, 通过代价函数将分数阶微分阶次的辨识问题转化为多变量参数优化问题, 设计辅助变量消除了随机噪声对辨识结果的影响.

收稿日期: 2011-09-08; 修回日期: 2011-12-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61004017, 60974103).

作者简介: 王永(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事振动主动控制、线性系统理论等研究; 廖增(1985-), 男, 硕士, 从事分数阶系统建模与控制的研究.

1 分数阶微积分

分数阶微积分算子定义如下:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0; \\ 1, \operatorname{Re}(\alpha) = 0; \\ {}_a I_t^{-\alpha} = \int_a^t (d\tau)^{-\alpha}, \operatorname{Re}(\alpha) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: ${}_a D_t^\alpha$ 表示分数阶微分, ${}_a I_t^\alpha$ 表示分数阶积分, α 为分数阶微积分的阶次, $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示实部, a 为初始时刻. 实际问题中一般初始时刻为 0, 分数阶微积分算子可以简记为 D^α 或 I^α . 由上述定义可以看出, 分数阶微积分算子事实上是将微分算子和积分算子统一起来.

定义 1 (Riemann-Liouville)^[2] 设函数 $f(t)$ 在定义域上 n 阶可导, $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbf{N}$, 则有

$$D_R^\alpha f(t) = D^n I^{n-\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \right]. \quad (2)$$

定义 2 (Caputo)^[2] 设函数 $f(t)$ 在定义域上 n 阶可导, $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbf{N}$, 则有

$$D_C^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau. \quad (3)$$

定义 1 和定义 2 在微分和积分运算的先后次序上有所不同, 但在数学上是完全等价的^[3]. 分数阶微积分的 Laplace 变换如下:

1) 分数阶积分的 Laplace 变换为

$$L\{I^\alpha f(t)\} = L\{D^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (4)$$

其中: $\alpha > 0, L\{f(t)\} = F(s)$.

2) 分数阶微分 RL 定义的 Laplace 变换为

$$L\{D_R^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_R^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}. \quad (5)$$

3) 分数阶微分 Caputo 定义的 Laplace 变换为

$$L\{D_C^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (6)$$

零初始条件下, 分数阶微分算子 RL 定义与 Caputo 定义的 Laplace 变换结果相同, 均为 $s^\alpha (\alpha > 0)$. Bode 图上对应直线斜率 $20\alpha \text{ dB}/+$, 在频率范围 (ω_b, ω_h) 内可以采用有限阶次滤波器进行拟合. 改进的 Oustaloup 递推滤波器算法拟合效果较好, 容易实现, 运用广泛, 其形式如下^[21]:

$$s^\alpha = \left(\frac{d\omega_h}{b}\right)^\alpha \frac{ds^2 + b\omega_h s}{d(1-\alpha)s^2 + b\omega_h s + d\alpha} \prod_{k=-N}^N \frac{s + \bar{\omega}_k}{s + \omega_k}. \quad (7)$$

其中: $\bar{\omega}_k = (d\omega_b/b)^{\frac{\alpha-2k}{2N+1}}, \omega_k = (b\omega_h/d)^{\frac{\alpha+2k}{2N+1}}$. 考虑到实际的拟合效果, 一般取 $b = 10, d = 9, \omega_b = 10^{-3}$,

$\omega_h = 10^3$.

2 分布阶次系统

分数阶微积分算子 D^α 的阶次 α 可以认为是一个连续变量, 以阶次作为积分变量对分数阶微积分算子进行积分运算即可得到分布阶次算子, 记为 $\int_b^c \omega(\alpha) D^\alpha (d\alpha)$. 其中: $\omega(\alpha)$ 为核函数, $[b, c]$ 为积分区间. 通过函数映射可将其转换到 $[0, 1]$ 区间, 因此上述算子可简记为 $\int_0^1 \omega(\alpha) D^\alpha (d\alpha)$. 利用分布阶次算子, 线性时不变分布阶次系统的状态空间方程描述为

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(\alpha) D^\alpha x(t) d\alpha &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (8)$$

核函数 $\omega(\alpha)$ 会对分布阶次系统的特性产生较大影响. 文献 [10-11] 研究了不同核函数情况下分布阶次系统的 BIBO 稳定性问题. 本文所研究的分布阶次系统的核函数为

$$\omega(\alpha) = \sum_{k=1}^n \delta(\alpha - \beta_k).$$

设 $v(t)$ 为随机扰动或采样误差等在系统输出方程出端的综合反映, 则其状态空间方程为

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=1}^n \delta(\alpha - \beta_k) D^\alpha x(t) d\alpha &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + v(t). \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $0 < \beta_k < 2, u \in \mathbf{R}^m$ 为输入向量, $y \in \mathbf{R}^l$ 为输出向量, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}, B \in \mathbf{R}^{n \times m}, C \in \mathbf{R}^{l \times n}, D \in \mathbf{R}^{l \times m}$.

本文的前提条件和假设如下:

- 1) 辨识输入信号 $u(t_k)$ 持续激励;
- 2) 分布阶次系统是稳定的, 且 $\{A, C\}$ 能观;
- 3) 系数矩阵 A 的维数 n 已知;
- 4) $v(t_k)$ 满足离散随机噪声模型, 与输入信号 $u(t_k)$ 不相关, 其中 $k = 1, 2, \dots, N$.

所研究的问题是从一组输入输出数据 $\{u(t_k), y(t_k)\}_{k=1}^N$ 中辨识系统模型. 其中: $t_k = kT_s, T_s$ 为采样时间. 待辨识参数为分布阶次系统的各项系数矩阵和分数阶微分阶次, 即 $\{A, B, C, D, \beta_k, k = 1, 2, \dots, n\}$.

3 辨识算法

3.1 方程重构

分布阶次系统辨识需要辨识状态空间方程的各项系数矩阵和分数阶微分阶次. 分数阶微分阶次 β_k 的存在使得系统输出关于参数空间呈现非线性关系, 因此本文将整个辨识过程分解为两个问题: 一是分布阶次系统的分数阶微分阶次已知情况下的各项系数矩阵的辨识问题, 二是分数阶微分阶次未知情况下的阶次估计问题.

考虑分布阶次系统的各项分数阶微分阶次已知

的情况. 设计如下分数阶滤波器:

$$G(s) = \left(\sum_{k=1}^n s^{\beta_k} + 1 \right)^{-1}, \quad (11)$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{ \left(\sum_{k=1}^n s^{\beta_k} + 1 \right)^{-1} \right\}. \quad (12)$$

令 $M\{\cdot\}$ 表示任意函数与 $g(t)$ 的卷积, 零初始条件下, 对式(9)进行 Laplace 变换. 注意到, 存在

$$L\left\{ \int_0^1 \sum_{k=0}^n \delta(\alpha - \beta_k) D^\alpha x(t) d\alpha \right\} = \sum_{k=1}^n s^{\beta_k} X(s), \quad (13)$$

因此有

$$X(s) = \bar{A}G(s)X(s) + BG(s)U(s), \quad (14)$$

即

$$x(t) = \bar{A}M\{x(t)\} + BM\{u(t)\}, \quad (15)$$

其中 $\bar{A} = A + I$. 将式(15)代入(10), 则有

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) + v(t) = \\ C\bar{A}M\{x(t)\} + CBM\{u(t)\} + Du(t) + v(t) &= \\ \vdots & \\ C\bar{A}^k M^k\{x(t)\} + \sum_{j=1}^k C\bar{A}^{k-j} BM^{k-j+1}\{u(t)\} + & \\ Du(t) + v(t), & \end{aligned}$$

其中 $k \in \mathbf{N}$, $M^k\{\cdot\}$ 表示进行 k 次卷积计算, 等价于对信号进行了 k 次分数阶滤波. 同理, 可以对 $y(t)$ 计算 l 次卷积, $l \leq k$, $l \in \mathbf{N}$, 有

$$\begin{aligned} M^l\{y(t)\} &= \\ C\bar{A}^{k-l} M^k\{x(t)\} + \sum_{j=1}^{k-l} C\bar{A}^{k-j-l} BM^{k-j+1}\{u(t)\} + & \\ DM^l\{u(t)\} + M^l\{v(t)\}. & \quad (16) \end{aligned}$$

记 $u(k) \triangleq u(t_k) = u(kT_s)$, $y(k) \triangleq y(t_k) = y(kT_s)$, 则由式(16)可得

$$Y_q(k) = \Gamma_q M^{q-1}\{x(t)\} + H_q U_q(k) + V_q(k). \quad (17)$$

其中: Γ_q 为广义能观性矩阵, q 为预先设定的常数, 满足 $q > n$, 且有

$$\Gamma_q = [C^T, (C\bar{A})^T, \dots, (C\bar{A}^{q-1})^T]^T;$$

$$Y_q(k) = \begin{bmatrix} M^{q-1}\{y(k)\} \\ M^{q-2}\{y(k)\} \\ \vdots \\ M^0\{y(k)\} \end{bmatrix}, \quad U_q(k) = \begin{bmatrix} M^{q-1}\{u(k)\} \\ M^{q-2}\{u(k)\} \\ \vdots \\ M^0\{u(k)\} \end{bmatrix},$$

$$H_q = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\bar{A}^{q-2}B & C\bar{A}^{q-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}.$$

$V_q(k)$ 的形式与 $Y_q(k)$, $U_q(k)$ 类似, 约定 $M^0\{\cdot\}$ 为单位算子. 由式(17)可得到如下基本输入输出方程:

$$\begin{aligned} Y_{q,N-k+1} &= \\ \Gamma_q X_{N-k+1} + H_q U_{q,N-k+1} + V_{q,N-k+1}. & \quad (18) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Y_{q,N-k+1} &= [Y_q(k), Y_q(k+1), \dots, Y_q(N)], \\ U_{q,N-k+1} &= [U_q(k), U_q(k+1), \dots, U_q(N)], \\ X_{N-k+1} &= [M^{q-1}\{x(k)\}, M^{q-1}\{x(k+1)\}, \dots, \\ & \quad M^{q-1}\{x(N)\}]. \end{aligned}$$

3.2 子空间方法

矩阵 Γ_q, H_q 含有分布阶次系统各项系数矩阵的信息, 因此子空间方法的目的即是通过矩阵投影, SVD 分解等线性代数工具从输入输出数据信息中辨识上述两个矩阵. 由式(18)可得

$$[I \quad -H_q] \begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} = \Gamma_q X_{N-k+1} + V_{q,N-k+1}. \quad (19)$$

令 Γ_q^\perp 为广义能观性矩阵 Γ_q 行空间的正交补空间, 式(19)两侧同时左乘 Γ_q^\perp , 有

$$\begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} = (\Gamma_q^\perp)^T V_{q,N-k+1}. \quad (20)$$

$[\Gamma_q^\perp \quad -H_q^T \Gamma_q^\perp]$ 含有矩阵 Γ_q, H_q 的全部信息, 因此成为辨识算法的关键. 理想情况下不考虑 $v(t_k)$ 的影响, 则式(20)右侧为零, 因此有

$$\left[\text{span}_{\text{col}} \left(\begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} \right) \right]^\perp = \text{span}_{\text{col}} \left(\begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix} \right). \quad (21)$$

式(21)表明, $\begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix}^T$ 的列空间与 $\begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix}$ 列空间的正交补空间相同. 对 $[\Gamma_q^\perp \quad -H_q^T \Gamma_q^\perp]$ 采用主元分析, 有

$$\begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix}^T = K_1 Q = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} Q. \quad (22)$$

其中: K_1 为负载矩阵; Q 为非奇异矩阵, 通常可取单位阵. 对 $[Y_{q,N-k+1} \quad U_{q,N-k+1}]^T$ 进行 SVD 分解, 有

$$\begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} = [\bar{U}_1 \quad \bar{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

在理想情况下, Σ_2 为零矩阵, 因此 $\text{rank}(\Sigma_1) = lq + n$. 联立式(22)和(23), 有 $K_1 = \bar{U}_2$, 即

$$\hat{\Gamma}_q = K_{11}^\perp, \quad (24)$$

$$\hat{H}_q = (K_{12} K_{11}^\perp)^T. \quad (25)$$

由 $\hat{\Gamma}_q, \hat{H}_q$ 容易计算出系统的各项系数矩阵, 详细计算

方法见第 3.4 节.

考虑分布阶次系统的分数阶微分阶次未知的情况. 设计准则函数将分数阶微分阶次辨识转化为普通的多变量参数寻优问题, 即

$$\begin{aligned} [\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n] &= \arg \min_{\substack{0 < \beta_k < 2 \\ k=1,2,\dots,n}} J(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \\ &\arg \min_{\substack{0 < \beta_k < 2 \\ k=1,2,\dots,n}} \|y - \hat{y}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\|_F^2. \end{aligned} \quad (26)$$

其中: $\|\cdot\|_F$ 是 Frobenius 范数, y 是系统的实际输出, $\hat{y}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 是在分数阶微分阶次确定情况下的辨识模型的输出. 依据式 (26) 可以计算 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 取不同值时的代价函数值, 寻找使得 $J(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 最小的一组 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 作为分数阶微分阶次的估计值. 多变量参数寻优方法很多, 这里不作详述.

3.3 辅助变量

事实上, $v(t_k)$ 的存在使得最终辨识结果有偏, 因此需要设计辅助变量来消除其影响. 本文选择过去的输入信号作为辅助变量, 即

$$U_p = \begin{bmatrix} u(k-p) & u(k+1-p) & \cdots & u(N-p) \\ u(k+1-p) & u(k+2-p) & \cdots & u(N+1-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k-1) & u(k) & \cdots & u(N-1) \end{bmatrix},$$

其中 $p < k$, $p \in \mathbf{N}$, 此处取 $p = k - 1$.

定义矩阵正交投影算子 Π_M , 表示将任意矩阵的行空间投影到矩阵 M 的行空间上, 即

$$\Pi_M \triangleq M^T(MM^T)^+M. \quad (27)$$

将式 (20) 两侧矩阵行空间正交投影到辅助变量 U_p 的行空间上, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} \Pi_{U_p} &= \\ (\Gamma_q^\perp)^T V_{q,N-k+1} U_p^T (U_p U_p^T)^{-1} U_p. \end{aligned} \quad (28)$$

考察 $V_{q,N-k+1} U_p^T$ 矩阵的第 h 行和第 r 列块元素, 由于 $v(t_k)$ 与输入信号 $u(t_k)$ 不相关, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (V_{q,N-k+1} U_p^T)_{h,r} &= \\ \frac{1}{N} \sum_{j=k}^N M^{q-h} \{v(t_j)\} u^T(t_{j+r-p-1}) &\rightarrow 0 (N \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (29)$$

故有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\Gamma_q^\perp)^T V_{q,N-k+1} \Pi_{U_p} = 0, \quad (30)$$

所以有

$$\begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix}^T \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} \Pi_{U_p} = 0. \quad (31)$$

因此

$$\begin{aligned} \left[\text{span}_{\text{col}} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} \Pi_{U_p} \right) \right]^\perp &= \\ \text{span}_{\text{col}} \left(\begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix}^T \right), \end{aligned} \quad (32)$$

即 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} \Pi_{U_p}$ 列空间的正交补空间与 $[\Gamma_q^\perp \quad -H_q^T \Gamma_q^\perp]$ 列空间相同. 当辨识数据充分时, $v(t_k)$ 对辨识结果的影响事实上已被消除. SVD 分解有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} Y_{q,N-k+1} \\ U_{q,N-k+1} \end{bmatrix} \Pi_{U_p} &= \\ [\bar{U}_1 \quad \bar{U}_2] \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (33)$$

其中 $\text{rank}(\bar{\Sigma}_1) = lq + n$. 此时采用子空间方法所得的辨识结果是无偏的^[20].

3.4 算法流程

Step 1: 选择合适的多变量参数寻优方法, 初始化分布阶次系统的分数阶微分阶次的初值.

Step 2: 选择合适参数 p , 构造辅助变量 U_p .

Step 3: 按式 (11) 构造分数阶滤波器, 对输入输出数据进行分数阶滤波处理. 选择合适参数 q , 构造基本输入输出矩阵 $Y_{q,N-k+1}$, $U_{q,N-k+1}$.

Step 4: 计算 SVD 分解, 计算 K_1 , 由式 (24) 和 (25) 确定 $\hat{\Gamma}_q$ 和 \hat{H}_q .

Step 5: 计算 \hat{A} , \hat{C} , 有

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}_q^+ (1 : \text{end} - l, :) \hat{\Gamma}_q (l + 1 : \text{end}, :) - I, \quad (34)$$

$$\hat{C} = \hat{\Gamma}_q (1 : l, :). \quad (35)$$

Step 6: 计算 \hat{B} , \hat{D} 的最小二乘解^[20]为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_q \\ \Phi_2 & \Phi_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{\Gamma}_q (1 : l(q-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} &= \\ [\Psi_1^T & \Psi_2^T & \cdots & \Psi_q^T]^T. \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} -K_{11}^T &= [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_q], \quad \Phi_k \in \mathbf{R}^{(lq-m) \times l}, \\ K_{12}^T &= [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \cdots \quad \Psi_q], \quad \Psi_k \in \mathbf{R}^{(lq-m) \times m}, \\ &k = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Step 7: 计算辨识模型的输出和代价函数值.

Step 8: 选择使得代价函数最小的一组参数作为最后估计值 $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{\beta}_k, k = 1, 2, \dots, n\}$, 算法结

束, 否则按选定的参数寻优方法选择下一组分数阶微分阶次的值, 返回 Step 3.

4 数值仿真

考虑如下分数阶系统:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.9.$$

选择采样时间 $T_s = 0.1$ s, 输入信号 $u(t_k)$ 为伪随机二位式序列 (PRBS), 序列长度 $N = 2047$. 辨识算法参数选择为 $p = 500, q = 3$. $v(t_k)$ 设为零均值高斯白噪声序列, 信噪比 SNR = 20 dB. 选择模拟退火算法进行多变量参数寻优, 最大迭代次数设定为 100. 采用本文算法进行辨识, 其辨识结果如下:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.0362 & 0.2653 \\ -0.4053 & -0.2374 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.7139 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0.5122 & -0.0023 \\ 0.0927 & 0.6931 \end{bmatrix}, \hat{D} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0011 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.4036, \hat{\beta}_2 = 0.8980.$$

图 1 为代价函数的三维分布, 点 A 的坐标值 (X, Y, Z) 为 (0.4, 0.9, -0.6156), 点 B 的坐标值 (X, Y, Z) 为 (0.9, 0.4, -0.6156). 从图 1 中可以看到, 代价函数存在两个极小点, 其关于平面 $\beta_1 = \beta_2$ 对称分布. 由于模型中 β_k 不存在大小约束, 其辨识结果不唯一并不会影响最终辨识结果. 在实际辨识过程中, 不妨增加一个对 β_k 的约束条件, 即 $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$, 此时得到的 β_k 的辨识结果是唯一的. 辨识模型与原始模型特征值对比如表 1 所示. 图 2 为采用本文算法所得到的辨识模型与原始模型的输出曲线. 图 3 为辨识模型的输出误差曲线.

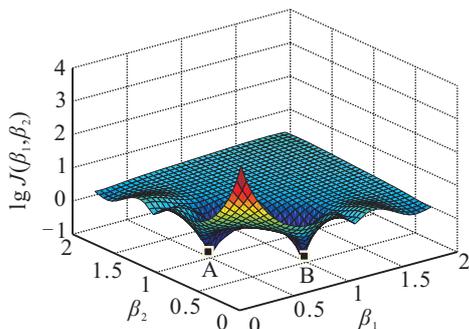


图 1 代价函数三维分布

表 1 辨识模型与理想模型特征值对比

| 原始模型 | 辨识模型 |
|-------------------|-------------------|
| -0.1000 + 0.3000i | -0.1006 + 0.2981i |
| -0.1000 - 0.3000i | -0.1006 + 0.2981i |

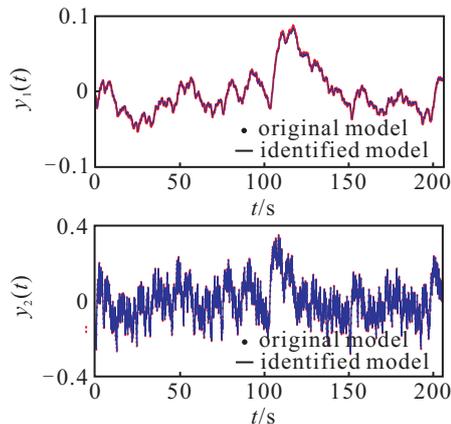


图 2 辨识模型与原始模型的输出曲线

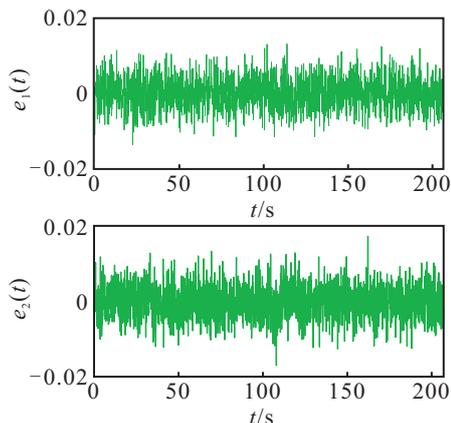


图 3 辨识模型输出误差曲线

由于子空间方法辨识出的各项系数矩阵与原系数矩阵是相似的, 结果无法直接对比. 为此, 先将其转化为传递函数形式, 然后比较传递函数的各项系数. 原系统的传递函数形式如下:

$$G_k(s) = \frac{e_k(s^{\beta_1} + s^{\beta_2})^2 + d_k(s^{\beta_1} + s^{\beta_2}) + c_k}{(s^{\beta_1} + s^{\beta_2})^2 + b(s^{\beta_1} + s^{\beta_2}) + a},$$

$$k = 1, 2. \tag{37}$$

传递函数的各项系数辨识结果与理论值对比如表 2 所示. 采用本算法进行 300 次蒙特卡罗实验, 计算辨识结果的均值和方差如表 3 所示. 仿真结果表明, 本文所提算法可以有效辨识分布阶次系统, 所得辨识结果是无偏的.

表 2 传递函数系数辨识结果与理论值对比

| 参数 | 理论值 | 辨识结果 |
|-----------|-----|---------|
| β_1 | 0.4 | 0.4036 |
| β_2 | 0.9 | 0.8980 |
| a | 0.1 | 0.0990 |
| b | 0.2 | 0.2012 |
| c_1 | 0.1 | 0.0976 |
| d_1 | 0 | 0.0005 |
| e_1 | 0 | 0.0003 |
| c_2 | 0 | -0.0013 |
| d_2 | 0.5 | 0.4954 |
| e_2 | 0 | 0.0011 |

表 3 传递函数系数辨识结果均值和方差

| 参数 | 理论值 | 均值 | 方差/ 10^{-4} |
|-----------|-----|----------|---------------|
| β_1 | 0.4 | 0.400 8 | 1.152 6 |
| β_2 | 0.9 | 0.899 6 | 0.373 6 |
| a | 0.1 | 0.098 5 | 0.166 4 |
| b | 0.2 | 0.200 9 | 7.346 4 |
| c_1 | 0.1 | 0.098 7 | 0.091 9 |
| d_1 | 0 | 0.001 5 | 0.227 7 |
| e_1 | 0 | -0.000 1 | 0.004 3 |
| c_2 | 0 | -0.002 1 | 0.198 1 |
| d_2 | 0.5 | 0.500 9 | 0.381 7 |
| e_2 | 0 | -0.000 2 | 0.024 9 |

5 结 论

本文提出了一种基于主元分析的分布阶次系统时域子空间辨识算法. 理论分析和数值仿真表明, 本算法能够有效地辨识分布阶次系统的系数矩阵和各项分数阶微分阶次. 但是算法涉及对输入输出信号反复进行分数阶滤波, 算法的计算量较大. 如何降低运算量, 提高算法的计算效率将是以后的研究方向.

参考文献(References)

- [1] Das S. Functional fractional calculus for system identification and controls[M]. Berlin: Springer, 2008: 1-2.
- [2] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999: 261-307.
- [3] Chen Y Q, Vinagre B M, Xue D, Feliu V. Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications[M]. London: Springer, 2010: 259-309.
- [4] Caponetto R, Dongola G, Fortuna L. Fractional order systems: Modeling and control applications[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2010: 127-139.
- [5] Lorenzo C F, Hartley T T. Variable order and distributed order fractional operators[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1-4): 57-98.
- [6] Caputo M. Mean fractional-order-derivatives differential equations and filters[J]. Annali Dell'Universita di Ferrara, 1995, 41(1): 73-84.
- [7] Kochubei A N. Distributed order calculus and equations of ultra slow diffusion[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 340(1): 252-281.
- [8] Umarov S, Steinberg S. Random walk models associated with distributed fractional order differential equations[J]. Lecture Notes-Monograph Series, 2006, 51: 117-127.
- [9] Li Y, Sheng H, Chen Y Q. On distributed order integrator/differentiator[J]. Signal Processing, 2010, 91(5): 1079-1084.
- [10] Jiao Z, Chen Y Q, Zhong Y S. Stability of fractional-order linear time-invariant system with noncommensurate orders[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 10: 1016.
- [11] Jiao Z, Chen Y Q, Zhong Y S. Stability analysis of linear time-invariant distributed-order systems[J]. Asian J of Control, 2012, 27(7): 1106.
- [12] Hartley T T, Lorenzo C F. Fractional-order system identification based on continuous order-distributions[J]. Signal Processing, 2003, 83(11): 2287-2300.
- [13] Hartley T T, Lorenzo C F. Fractional system identification: An approach using continuous order-distributions[J]. NASA Technical Memorandum, 1999, (209640): 1-22.
- [14] Viberg M, Wahlberg B, Ottersten B. Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting[J]. Automatica, 1997, 33(9): 1603-1616.
- [15] Mercère G, Ouvrard R, Gilson M, et al. Subspace based methods for continuous-time model identification of MIMO systems from filtered sampled data[C]. The 9th European Control Conf. Kos, 2007: 1-8.
- [16] Ohsumi A, Kameyama K, Yamaguchi K. Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution-based approach[J]. Automatica, 2002, 38(1): 63-79.
- [17] Overschee P V, Moor B D. Subspace identification for linear systems: Theory implementation applications[M]. Boston: Kluwer Academic, 1996: 1-228.
- [18] Thomassin M, Malti R. Multivariable identification of continuous time fractional System[C]. Proc of the ASME 2009 Int Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. San Diego, 2009: 1-16.
- [19] Bauer D. Order estimation for subspace methods[J]. Automatica, 2001, 37(10): 1561-1573.
- [20] Wang J, Qin S J. A new subspace identification approach based on principal component analysis[J]. J of Process Control, 2002, 12(8): 841-855.
- [21] Xue D. Computer aided control systems design using Matlab language[M]. The 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 342-355.