

文章编号: 1001-0920(2013)01-0061-06

## 时变周期系统鲁棒重复控制设计

周 兰<sup>1</sup>, 吴 敏<sup>2</sup>, 余锦华<sup>3</sup>

(1. 湖南科技大学 信息与电气工程学院, 湖南 湘潭 411201; 2. 中南大学  
信息科学与工程学院, 长沙 410083; 3. 日本东京工科大学 计算机学部, 东京 192-0928)

**摘 要:** 针对一类具有周期不确定性的线性系统, 提出基于二维模型的鲁棒改进型重复控制系统设计方法. 在改进型重复控制系统中, 低通滤波器的嵌入将控制和学习耦合在一起. 通过运用“连续提升”方法, 建立连续-离散二维模型, 获得能够分别优先调节控制和学习二维反馈控制律. 运用 Lyapunov 稳定性理论, 推导出系统鲁棒稳定的线性矩阵不等式(LMI)条件, 包含在 LMI 中的两个可调参数可以实现对控制和学习的分别优先调节. 数值仿真实例验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 重复控制; 低通滤波器; 连续-离散二维系统; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13

**文献标志码:** A

### Robust repetitive control design of periodically time-varying plants

ZHOU Lan<sup>1</sup>, WU Min<sup>2</sup>, SHE Jin-hua<sup>3</sup>

(1. School of Information and Electrical Engineering, Hu'nan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China; 2. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 3. School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan. Correspondent: ZHOU Lan, E-mail: zly98@yahoo.cn)

**Abstract:** A method of designing a robust modified repetitive-control system based on a continuous-discrete two-dimensional(2D) model is proposed for a class of strictly proper plants with time-varying periodic uncertainties. In the modified repetitive-control system, the insertion of a low-pass filter makes control and learning coupled together. Employing a continuous lifting technique, a continuous-discrete 2D model is established, where the 2D control law is in the form of direct sum of control and learning effects. Then, the Lyapunov stability theory is used to derive a linear-matrix-inequality(LMI) based sufficient robust stability condition. Two tuning parameters in the LMI enable the preferential adjustment of the control and learning actions. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** repetitive control; low-pass filter; continuous-discrete 2D system; linear matrix inequality

### 0 引 言

在工业应用中, 很多伺服系统都要处理周期信号跟踪和周期扰动抑制问题, 如逆变电源质量控制、电力系统周期负荷扰动补偿和硬盘/光盘驱动等. 20世纪80年代, Inoue等<sup>[1-2]</sup>将人类学习机制引入到控制系统, 提出了重复控制方法. 从控制理论的观点来看, 重复控制的自学习机制实际上是将周期信号的内部模型植入到重复控制器中, 它是这样进行“学习”的: 通过纯滞后正反馈环节将上一个周期的控制输入信号添加到本周期的控制输入中, 调节并产生本周期的控制输入. 如此循序渐进, 最终实现对任意周期信号的高精度跟踪或抑制. 重复控制因为控制精度高、实现

简单, 一经提出, 便在运动控制<sup>[3]</sup>、过程控制<sup>[4]</sup>等领域得到了广泛应用.

重复控制过程具有独特的二维特性: 同时包含一个周期之内的连续控制和相邻周期之间的离散学习. 如果重复控制规律能够实现对控制和学习的分别调节, 则可以从根本上改善系统的过渡过程性能. 以往提出的一维时域方法均主要着眼于系统的稳定性, 综合考虑控制和学习的作用效果, 从而存在控制对象要求较严、控制性能的提高受到限制等问题<sup>[5-6]</sup>.

对于一类输出直达项不为零的正则线性系统, 文献[7]提出了基于连续-离散二维模型的重复控制方

收稿日期: 2011-09-08; 修回日期: 2012-03-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974045, 61203010); 湖南省自然科学基金青年基金项目(11JJ4059, 09JJ3117).

作者简介: 周兰(1975-), 女, 副教授, 博士, 从事鲁棒控制、重复控制的研究; 吴敏(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、智能控制、过程控制等研究.

法, 与一维时域方法相比较, 所设计的重复控制系统具有更好的暂态性能和稳态跟踪性能, 但是该方法不能直接推广到一般线性系统. 因为, 对于相对度大于零的严真线性系统, 为了保障系统稳定, 必须在重复控制器的时滞环节中插入低通滤波器, 低通滤波器的嵌入使得控制和学习耦合在一起, 不能运用微分方程和差分方程来分别描述这两种行为, 从而不能应用文献[7]中的二维 Lyapunov 泛函推导出系统的稳定性条件. 同时, 在实际控制系统中, 由于建模误差和工作环境的变化, 系统中常常存在着不确定性因素, 并且在许多具有重复性操作的系统中, 其不确定性都呈现出周期性特点. 此时, 如文献[8]所指出的那样, 即使参考输入仅为正弦或余弦形式的基频信号, 不确定系统都会产生无数个频率为基频整数倍的谐波信号, 如果在控制系统中引进重复控制器(亦即周期信号发生器), 则可以抵消这种谐波信号的干扰作用, 这是传统的内部模型无法保证的. 针对难切削材料切削时发生的参数振动控制问题, 文献[9]讨论了系统矩阵含有周期不确定性的严真线性系统鲁棒改进型重复控制设计方法, 通过定量分析控制和学习的调节对系统性能的影响, 给出了可调参数的选取规则和系统设计步骤. 但是, 对于一般的线性系统, 不确定性往往同时存在于系统矩阵和控制输入矩阵中. 此时, 系统中控制和学习的耦合程度更复杂, 如何调节控制和学习来改善系统性能是一个具有挑战性的新问题.

针对含有时变周期不确定性的一般线性系统, 本文提出一种能够改善系统收敛性和稳态跟踪性能的鲁棒改进型重复控制系统设计方法. 首先, 建立与连续改进型重复控制系统等距同构的连续-离散二维模型, 获得关于控制和学习行为直和的二维反馈控制律; 然后, 利用重复控制的连续性和时滞系统稳定性定理, 推导出线性矩阵不等式(LMI)形式的二维系统鲁棒稳定性条件. LMI条件中包含两个可调参数, 通过调节这两个参数来实现对控制和学习的分别优先调节; 最后, 通过仿真实例演示参数调节过程, 引入性能评价指标和灵敏度函数, 分别从时域和频域角度分析说明调节作用以及参数的选取规则, 验证了所提方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如图 1 所示的状态反馈改进型重复控制系

统, 虚线所示部分为改进型重复控制器  $C_{MR}(s)$ , 时滞常数  $T$  等于参考输入信号  $r(t)$  的周期, 一阶低通滤波器为

$$q(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad (1)$$

其中  $\omega_c(t)$  为低通滤波器的剪切频率, 由系统的工作频率范围确定. 改进型重复控制器的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = -\omega_c x_c(t) + \omega_c x_c(t - T) + \omega_c e(t), \\ v(t) = e(t) + x_c(t - T). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $x_c(t)$  为低通滤波器状态变量,  $e(t) = r(t) - y(t)$  为跟踪误差,  $v(t)$  为重复控制器输出. 图 1 中, 补偿后的控制对象为单输入单输出线性系统, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = [A_p + \Delta A_p(t)]x_p(t) + [B_p + \Delta B_p(t)]u(t), \\ y(t) = C_p x_p(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $x_p(t) \in \mathbf{R}^n$  为状态变量;  $u(t), y(t) \in \mathbf{R}$  分别为控制输入与输出;  $A_p, B_p$  和  $C_p$  为具有合适维数的常数矩阵;  $\Delta A_p(t), \Delta B_p(t)$  为时变周期不确定性, 满足

$$\Delta A_p(t + T) = \Delta A_p(t), \Delta B_p(t + T) = \Delta B_p(t). \quad (4)$$

设定不确定性的形式为

$$[\Delta A_p(t) \ \Delta B_p(t)] = MF(t)[N_0 \ N_1]. \quad (5)$$

其中:  $M, N_0$  和  $N_1$  为具有适当维数的常数实矩阵;  $F(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为未知的矩阵函数, 满足

$$F^T(t)F(t) \leq I, \forall t \geq 0. \quad (6)$$

建立基于重复控制器前馈补偿和系统状态反馈的线性控制规律

$$u(t) = K_e v(t) + K_p x_p(t), \quad K_e \in \mathbf{R}, K_p \in \mathbf{R}^{1 \times n}. \quad (7)$$

其中:  $K_e$  为重复控制器前馈增益,  $K_p$  为状态反馈增益.

根据上述描述, 本文的重复控制设计问题是: 寻找控制增益  $K_e$  和  $K_p$ , 使得如图 1 所示的重复控制系统在控制律(7)的作用下鲁棒稳定, 并使跟踪误差快速趋向于零.

在控制律(7)中, 由于重复控制器输出,  $v(t)$  同时包含上一个周期的状态  $[x_c(t - T)]$  和本周期的控制结果  $[e(t)]$ , 从而直接调节控制律(7)中的控制增益  $K_e$  或  $K_p$  都不能分别调节重复控制过程中的控制和学习. 为了解决该问题, 本文考虑如图 1 所示的重

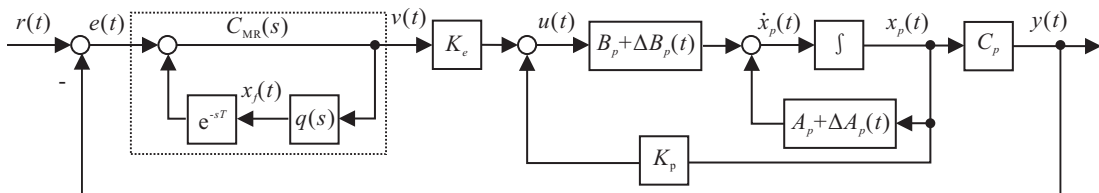


图 1 改进型重复控制系统结构



成立, 其中

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= \alpha A_p X_1 + \alpha B_p W_1 + \alpha X_1^T A_p^T + \alpha W_1^T B_p^T, \\ \Phi_{12} &= -\alpha \omega_c X_1 C_p^T, \quad \Phi_{14} = \beta B_p W_2, \\ \Phi_{17} &= \alpha X_1, \quad \Phi_{19} = \alpha X_1^T N_0^T + \alpha W_1^T N_1^T, \\ \Phi_{22} &= -2\omega_c X_2, \quad \Phi_{24} = \beta \omega_c Y_2, \\ \Phi_{210} &= W_3^T N_1^T, \quad \Phi_{44} = \Phi_{88} = -\beta Y_2.\end{aligned}$$

则连续-离散二维系统(13)鲁棒稳定, 且二维反馈控制律(10)中的控制增益为

$$F_p = W_1 X_1^{-1}, \quad F_e = W_2 Y_2^{-1}. \quad (15)$$

**证明** 设定

$$P_1 = X_1^{-1}, \quad P_2 = X_2^{-1}, \quad Q_1 = Y_1^{-1}, \quad Q_2 = Y_2^{-1},$$

对于任意整数  $k \in \{0, 1, \dots\}$ , 选取 Lyapunov 泛函

$$V(k, \tau) = x^T(k, \tau) P x(k, \tau) + \int_{\tau-T}^{\tau} x^T(k, s) Q x(k, s) ds. \quad (16)$$

其中

$$P = \text{diag}\left\{\frac{1}{\alpha} P_1, P_2\right\}, \quad Q = \text{diag}\left\{Q_1, \frac{1}{\beta} Q_2\right\}. \quad (17)$$

沿着闭环系统(13), 泛函增量为

$$\begin{aligned}\frac{dV(k, \tau)}{d\tau} &= 2x^T(k, \tau) P \dot{x}(k, \tau) + x^T(k, \tau) Q x(k, \tau) - \\ & x^T(k-1, \tau) Q x(k-1, \tau) = \eta^T(k, \tau) \Xi \eta(k, \tau).\end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\eta^T(k, \tau) = [x^T(k, \tau), x^T(k-1, \tau), \Gamma_l^T(k, \tau), \Gamma_{l1}^T(k, \tau)],$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} \\ * & \Xi_{22} & 0 & P_2 \omega_c & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\beta} Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{11} = \frac{1}{\alpha} \{P_1(A_p + B_p F_p) + (A_p^T + F_p^T B_p^T) P_1\} + Q_1,$$

$$\Xi_{12} = -\omega_c C_p^T P_2^T, \quad \Xi_{14} = \frac{1}{\alpha} P_1 B_p F_e,$$

$$\Xi_{15} = \Xi_{16} = \frac{1}{\alpha} P_1 M, \quad \Xi_{22} = -2P_2 \omega_c + \frac{1}{\beta} Q_2.$$

由式(18)推导出

$$\begin{aligned}\frac{dV(k, \tau)}{d\tau} &- \{ \Gamma_l^T(k, \tau) \Gamma_l(k, \tau) - x^T(k, \tau) \Psi_l^T \Psi_l x(k, \tau) + \\ & \Gamma_{l1}^T(k, \tau) \Gamma_{l1}(k, \tau) - x^T(k-1, \tau) \Psi_{l1}^T \Psi_{l1} x(k-1, \tau) \} = \\ & \eta^T(k, \tau) \Theta \eta(k, \tau).\end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\Theta = \Xi + \text{diag}\{0, 0, 0, 0, -I, -I\} + \tilde{\Psi}_l^T \tilde{\Psi}_l + \tilde{\Psi}_{l1}^T \tilde{\Psi}_{l1},$$

$$\tilde{\Psi}_l = [N_0 + N_1 F_p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\tilde{\Psi}_{l1} = [0 \quad N_1 F_e \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

将引理2应用到式(19)可知: 当  $\Theta < 0$  时, 有

$$\frac{dV(k, \tau)}{d\tau} < 0, \quad \forall \eta(k, \tau) \neq 0. \quad (20)$$

由 Schur 补引理1,  $\Theta < 0$  等价于

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14} & A_{15} & A_{16} & Q_1 & 0 & A_{19} & 0 \\ * & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & 0 & 0 & A_{28} & 0 & A_{210} \\ * & * & -Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & A_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & A_{88} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

其中

$$A_{11} = \Xi_{11} - Q_1, \quad A_{12} = \Xi_{12}, \quad A_{14} = \Xi_{14},$$

$$A_{15} = A_{16} = \Xi_{15}, \quad A_{19} = N_0^T + F_p^T N_1^T,$$

$$A_{22} = \Xi_{22} - \frac{1}{\beta} Q_2, \quad A_{24} = P_2 \omega_c, \quad A_{28} = \frac{1}{\beta} Q_2,$$

$$A_{210} = F_e^T N_1^T, \quad A_{44} = A_{88} = -\frac{1}{\beta} Q_2.$$

将式(21)的左边矩阵分别左乘、右乘对角矩阵  $\text{diag}\{\alpha X_1, X_2, Y_1, \beta Y_2, I, I, Y_1, \beta Y_2, I, I\}$ , 且设定

$$W_1 = F_p X_1, \quad W_2 = F_e Y_2, \quad W_3 = F_e X_2, \quad (22)$$

得到与之等价的 LMI(14), 且由式(22)可得到反馈控制增益(15).  $\square$

图1所示的连续改进型重复控制系统控制增益与二维反馈控制增益的关系为

$$K_e = F_e, \quad K_p = F_e C_p. \quad (23)$$

**注1** 定理1给出了图1所示的改进型重复控制系统鲁棒稳定的 LMI 条件, 条件中含有两个可调参数  $\alpha$  和  $\beta$ , 用来实现对控制和学习的分别优先调节. 具体而言,  $\alpha$  调节关联控制性能的权矩阵  $P_1$ , 改变 LMI(14) 的可行解  $X_1$  和  $W_1$ , 相应调节反馈增益  $F_p$ ;  $\beta$  调节关联学习性能的权矩阵  $Q_2$ , 改变 LMI(14) 的可行解  $Y_2$  和  $W_2$ , 相应调节反馈增益  $F_e$ . 同时, 应用定理1可以直接推导出如下连续-离散二维标称系统的稳定性条件:

$$\dot{x}(k, \tau) = A_l x(k, \tau) + A_{l1} x(k-1, \tau), \quad (24)$$

其中  $A_l$  和  $A_{l1}$  与式(13)相同.

**推论1** 给定正数  $\alpha$  和  $\beta$ , 如果存在正定对称矩阵  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  和合适维数的  $W_1, W_2$ , 使得

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 & \beta B_p W_2 & \alpha X_1 & 0 \\ * & \Phi_{22} & 0 & \beta \omega_c Y_2 & 0 & X_2 \\ * & * & -Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta Y_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Y_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta Y_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

成立, 其中  $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}$  与 LMI(14) 相同. 则连续-离散二维系统(24)渐近稳定, 并且式(10)中的反馈控制增益为

$$F_p = W_1 X_1^{-1}, F_e = W_2 Y_2^{-1}. \quad (26)$$

### 3 调节与仿真

基于定理 1 和推论 1 所给出的控制器设计算法, 通过引入性能指标和灵敏度函数, 分别从时域和频域两方面说明控制和学习的调节对系统性能的影响, 并推导出参数选取规则和系统设计步骤.

设控制对象(3)所对应的标称系统具有参数

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_p = [1 \ 1]. \quad (27)$$

考虑对参考输入信号

$$r(t) = \sin \pi t + 0.5 \sin 2\pi t + 0.5 \sin 3\pi t \quad (28)$$

的跟踪问题, 此时, 重复周期  $T = 2$  s. 设定剪切频率为

$$\omega_c = 200 \text{ rad/s}. \quad (29)$$

如第 2 节所述, 调节参数  $\alpha$  和  $\beta$  可以分别优先调节系统的控制和学习性能. 系统在第 1 个周期内没有学习行为, 从而第 1 个周期内的跟踪误差

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^T e^2(t) dt \quad (30)$$

反应系统的控制性能; 同时跟踪误差在时间轴上的收敛速度表征系统的学习效率.

基于以上分析, 引入性能指标

$$J_{10} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \int_{(k-1)T}^{kT} e^2(t) dt \quad (31)$$

来综合评价控制和学习的调节对系统性能的影响, 并且应用优化算法

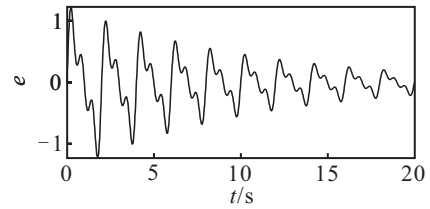
$$\min J_{10} > 0, \text{ s.t. } \tilde{\Phi} < 0, \text{ LMI(25)} \quad (32)$$

进行参数的选取和控制器参数的设计.

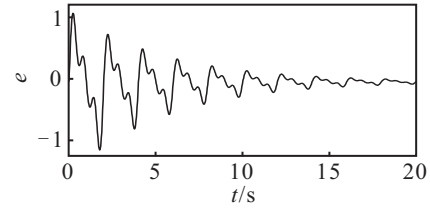
图 2 给出了 3 组参数下 (a 组  $\alpha = 1.0, \beta = 0.53$ ; b 组  $\alpha = 1.0, \beta = 0.05$ ; c 组  $\alpha = 0.2, \beta = 0.05$ ) 的仿真结果, 其性能指标值分别为

$$J_{10}^a = 1.5362, J_{10}^b = 0.6904, J_{10}^c = 0.2001. \quad (33)$$

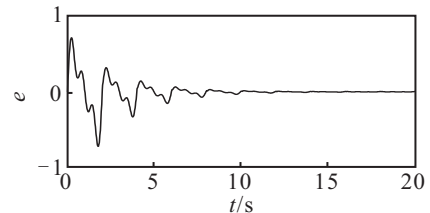
从图 2 可以看出参数调节对系统性能的影响. 具体地, 对于参数组 a, 系统在第 17 个周期进入稳定状态,  $J_1^a = 0.5074$ ; 改变  $\beta$  的取值, 参数组 b 的跟踪误差



(a)  $\alpha=1, \beta=0.53$



(b)  $\alpha=1, \beta=0.05$



(c)  $\alpha=0.2, \beta=0.05$

图 2 3 组参数对应的跟踪误差

差收敛速度明显加快, 系统在第 8 个周期进入稳态, 但是偏差信号的幅值改变较小; 进而调节  $\alpha$ , 参数组 c 对应的系统在第 5 个周期进入稳定状态, 且有  $J_1^c = 0.1585$ . 由此可见, 参数  $\alpha$  主要调节系统的控制性能, 同时也对系统的学习速度产生一定的影响; 参数  $\beta$  主要调节系统的学习性能. 在上述 3 组参数中, c 组同时具有最好的控制性能和学习性能. 另外, 对于标称系统(27), 图 1 所示的连续改进型重复控制系统的灵敏度函数为

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_e}{1 - q(s)e^{-sT}} C_p [sI - (A_p + B_p K_p)]^{-1} B_p}. \quad (34)$$

图 3 给出了同样 3 组参数的灵敏度函数波特图, 从频域方面表明了调节作用. 显然, 与其他两组相比较, c 组具有更好的鲁棒性.

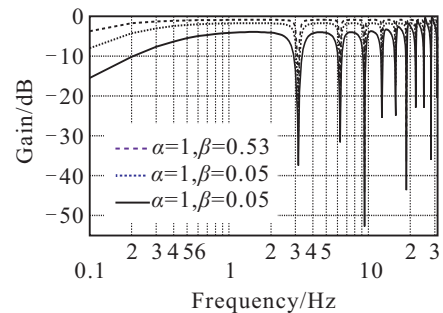


图 3 3 组参数对应的灵敏度函数

应用定理 1 的 LMI 稳定性条件, 考虑具有如下时变周期不确定性的图 1 所示的连续改进型重复控制系

统设计:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} \sin \pi t & 0 \\ 0 & \sin \pi t \end{bmatrix}. \quad (35)$$

运用优化算法

$$\min J_{10}, \text{ s.t. 式 (14) 成立.} \quad (36)$$

最终选取参数  $\alpha = 0.30, \beta = 0.96$ . 对应的控制增益为

$$K_e = 12.4422, K_p = [12.4439 \quad -19.7284].$$

仿真结果如图4所示, 系统在第7个周期进入稳定状态, 对所兼容的周期不确定性, 系统鲁棒稳定, 跟踪误差快速收敛, 且有  $J_{10} = 0.1159$ .

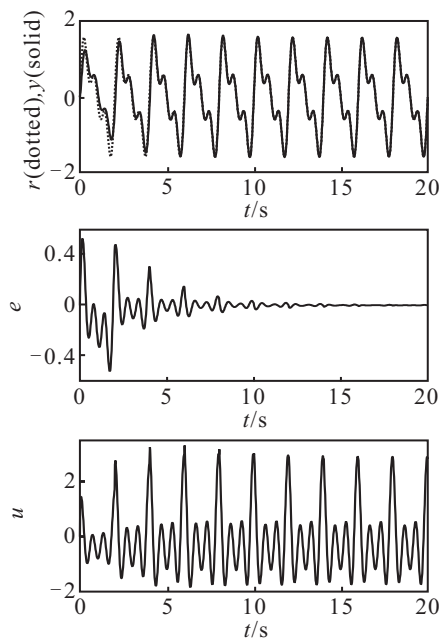


图4 周期不确定系统的仿真结果

## 4 结论

本文针对具有时变周期不确定性的严真线性系统, 提出了基于连续-离散二维模型的鲁棒改进型重复控制系统设计方法. 首先应用“连续提升”方法将系统投射到二维空间, 将系统设计转换为连续-离散二维系统的鲁棒镇定问题. 然后利用重复控制的连续性和周期性特点, 结合时滞系统稳定性理论推导出LMI形式的控制器设计算法. 系统鲁棒稳定性条件中包含两个可调参数, 用来实现对控制和学习的分别优先调节. 最后, 应用数值仿真实例从时域和频域方面说明控制和学习的调节对系统性能的影响以及可调参数的选取规则. 与其他重复控制系统设计方法比

较, 本方法的优势在于能够通过简单、直观的参数调节方法来改善系统收敛性和稳态性能鲁棒性.

## 参考文献(References)

- [1] Inoue T, Nakano M, Iwai S. High accuracy control of servomechanism for repeated contouring[C]. Proc of the 10th Annual Symposium on Incremental Motion Control Systems and Devices. Urbana-Champaign, 1981: 285-292.
- [2] Hara S, Yamamoto Y, Omata T, et al. Repetitive control system: A new type servo system for periodic exogenous signals[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(7): 659-668.
- [3] Jarzebowska E M. Advanced programmed motion tracking control of nonholonomic mechanical systems[J]. IEEE Trans on Robotics, 2008, 24(6): 1315-1328.
- [4] Álvarez J D, Yebra L J, Berenguel M. Repetitive control of tubular heat exchangers[J]. J of Process Control, 2007, 17(9): 689-701.
- [5] Srinivasan K, Shaw F R. Analysis and design of repetitive control systems using the regeneration spectrum[J]. J of Dynamical System Measure and Control, 1991, 113(2): 216-222.
- [6] Chen J W, Liu T S.  $H_\infty$  Repetitive control for pickup head flying height in near-field optical disk drives[J]. IEEE Trans on Magnetics, 2005, 41(2): 1067-1070.
- [7] Wu M, Zhou L, She J H. Design of observer-based  $H_\infty$  robust repetitive-control system[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(6): 1452-1457.
- [8] Omata T, Hara T, Nakano M. Repetitive control for linear periodic systems[J]. Electrical Engineering in Japan, 1985, 105(3): 131-138.
- [9] Zhou L, She J H, Wu M, et al. Design of a robust modified repetitive-control system for a periodic plant[J]. ASME J of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2012, 134(1): 1-7.
- [10] Yamamoto Y. A function space approach to sampled data control systems and tracking problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(4): 703-713.
- [11] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(3): 356-361.
- [12] Yakubovich V A. S-procedure in nonlinear control theory[J]. Vestnik Leningrad University Mathematics, 1977(4): 73-93.