

文章编号: 1001-0920(2013)03-0456-05

连续切换 LPV 系统的鲁棒 H_∞ 滤波

李艳辉¹, 黄娜¹, 关正伟²

(1. 东北石油大学 电气信息工程学院, 黑龙江 大庆 163318; 2. 大庆采油二厂, 黑龙江 大庆 163414)

摘要: 探究连续切换线性参数变化 (LPV) 系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题. 对于整个参数变化空间, 传统方法是设计单一 LPV 滤波器, 具有较大的保守性. 为此, 利用多参数依赖 Lyapunov 函数设计了切换 LPV 系统的多参数依赖鲁棒 H_∞ 滤波器, 以降低设计的保守性. 考虑了平均驻留时间切换逻辑, 所设计的鲁棒 H_∞ 滤波器能够确保滤波误差系统指数稳定且具有一定的 H_∞ 扰动抑制水平. 数值仿真实例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 切换系统; 线性参数变化系统; H_∞ 滤波; 参数依赖 Lyapunov 函数; 平均驻留时间

中图分类号: TP13

文献标志码: A

Robust H_∞ filtering for continuous switched LPV systems

LI Yan-hui¹, HUANG Na¹, GUAN Zheng-wei²

(1. Electrical and Information Engineering College, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China; 2. Daqing No.2 Oil Plant, Daqing 163414, China. Correspondent: LI Yan-hui, E-mail: ly_hui@hotmail.com)

Abstract: The problem of robust H_∞ filtering for continuous switched linear parameter varying (LPV) systems is investigated. Traditionally, a common LPV filter which has usually large conservatism is designed for the whole parameter variation space. The robust H_∞ filter with multiple parameter-dependent is designed by using multiple parameter-dependent Lyapunov function, which reduces the conservatism of the design. Under the condition of the switching logic with the minimum average dwell time, the obtained robust H_∞ filter guarantees that the filtering error system is exponential stable and has a certain H_∞ disturbance rejection level. Numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: switched system; linear parameter varying system; H_∞ filtering; parameter-dependent Lyapunov function; average dwell time

0 引言

切换系统作为一类重要的混杂动态系统, 已引起国内外学者的广泛关注, 在机械控制系统和系统工程等领域有着重要的应用^[1-2]. 近年来, 一些学者围绕具有多模态性质的切换系统做了一些很有意义的工作. 文献[3]采用多 Lyapunov 函数方法分析稳定性, 降低了单 Lyapunov 函数方法的保守性; 文献[4]利用切换 Lyapunov 函数方法对不确定时滞切换系统设计了滤波器. 然而, 上述成果主要集中在定常切换系统, 在实际系统中或多或少地都存在着非线性和时变特性, 这便为控制系统的分析和设计带来了一定的困难, 因此, 研究切换 LPV 系统的分析和综合问题更具有实际意义.

LPV 系统是一类重要的时变系统, 许多实际系

统都可以利用 LPV 系统有效地描述系统的非线性和时变特性^[5]. 目前, 关于切换 LPV 系统的研究也备受关注^[2,6]. 文献[6]采用平均驻留时间技术研究了离散切换 LPV 系统的模型降阶问题; 文献[2]运用单 Lyapunov 函数方法研究了切换 LPV 系统的控制器设计问题, 这种方法的保守性较大, 而且系统的共同 Lyapunov 函数难以求得.

本文研究一类连续切换 LPV 系统的 H_∞ 滤波问题, 假定各切换子系统的状态空间数据是实时可测且在某一紧集上变化. 针对各个子系统分别选取参数依赖 Lyapunov 函数, 从而得到该系统的 H_∞ 性能准则. 该准则的系统矩阵与参数依赖 Lyapunov 矩阵之间存在耦合, 是一个非线性问题, 这里通过引入附加矩阵来消除该耦合. 在此基础上, 通过 LMI 技术得到此类

收稿日期: 2011-09-13; 修回日期: 2011-11-23.

基金项目: 国家杰出青年基金项目(61004067); 黑龙江省教育科学技术研究项目(12511002); 黑龙江省自然科学基金项目(QC2011C043).

作者简介: 李艳辉(1970—), 女, 教授, 博士后, 从事鲁棒控制、智能控制等研究; 黄娜(1987—), 女, 硕士生, 从事鲁棒控制的研究.

系统鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件, 由于该条件是个无穷维问题, 利用近似基函数和网格技术将相应的滤波器设计问题转换成求解一个有限维参数线性矩阵不等式 (PLMI) 的凸优化问题, 更易于数值实现.

1 问题描述

考虑如下切换LPV系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(\rho(t))x(t) + B_{\sigma(t)}(\rho(t))w(t), \\ y(t) = C_{\sigma(t)}(\rho(t))x(t) + D_{\sigma(t)}(\rho(t))w(t), \\ z(t) = L_{\sigma(t)}(\rho(t))x(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态向量, 初值为 $x(t_0)$; $y(t) \in R^m$ 为测量输出; $z(t) \in R^p$ 为要估计的信号; $w(t) \in R^q$ 为能量有界的噪声信号, 即 $w(t) \in L_2[t_0, \infty)$; $\sigma(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \underline{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为系统的切换信号; 参数矩阵 $A_{\sigma(t)}(\cdot)$, $B_{\sigma(t)}(\cdot)$, $C_{\sigma(t)}(\cdot)$, $D_{\sigma(t)}(\cdot)$, $L_{\sigma(t)}(\cdot)$ 为时变参数 $\rho(t)$ 的函数, 参数向量 $\rho(t) = [\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_s(t)]^T$ 满足 $\rho_l(t)$ 实时可测, 以下用 ρ 和 ρ_l 代表 $\rho(t)$ 和 $\rho_l(t)$, 且 $\rho_l(t) \in [\underline{\rho}_l, \bar{\rho}_l]$, 参数变化率 $\tau_l(t) = \dot{\rho}_l(t) \in [\underline{\tau}_l, \bar{\tau}_l]$, 其中 $l = 1, 2, \dots, s$.

设计具有如下形式的依赖于参数的 H_∞ 滤波器:

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_{fi}(\rho)x_f(t) + B_{fi}(\rho)y(t), \\ z_f(t) = C_{fi}(\rho)x_f(t), \end{cases} \quad \forall i \in \underline{N}. \quad (2)$$

其中: $A_{fi}(\cdot)$, $B_{fi}(\cdot)$, $C_{fi}(\cdot)$ 为待设计的滤波器参数矩阵; $x_f(t) \in R^n$ 为滤波器状态向量; $z_f(t) \in R^p$ 为滤波器估计输出向量.

选取状态变量 $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \ x_f^T(t)]^T$, 误差输出 $e(t) = z(t) - z_f(t)$, 则增广滤波误差系统为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A}_i(\rho)\tilde{x}(t) + \bar{B}_i(\rho)w(t), \\ e(t) = \bar{C}_i(\rho)\tilde{x}(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_i(\rho) &= \begin{bmatrix} A_i(\rho) & 0 \\ B_{fi}(\rho)C_i(\rho) & A_{fi}(\rho) \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_i(\rho) &= \begin{bmatrix} B_i(\rho) \\ B_{fi}(\rho)D_i(\rho) \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_i(\rho) = \begin{bmatrix} L_i^T(\rho) \\ -C_{fi}^T(\rho) \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (4)$$

本文主要结论的推导将用到以下定义.

定义1 对于切换律 $\sigma(t)$ 和任意的 $t_2 > t_1 > 0$, 令 $N_{\sigma(t)}(t_1, t_2)$ 为 $\sigma(t)$ 在时间间隔 (t_1, t_2) 之间的切换次数. 如果对于任意给定的 $N_0 \geq 0, \tau_a > 0$, 有 $N_{\sigma(t)}(t_1, t_2) \leq N_0 + (t_2 - t_1)/\tau_a$, 则称 τ_a 为滤波误差系统(3)的平均驻留时间, N_0 为振动幅度.

注1 平均驻留时间切换要求连续两次切换的时间间隔的平均值至少为 τ_a , 则综合分析系统(1)的一个基本问题是: 确定最小的时间 τ_a 和满足此最小 τ_a 的切换信号.

定义2 如果存在切换律 $\sigma(t)$, 使系统(3)的状

态轨迹满足 $\|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha \|\tilde{x}(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, t \geq t_0$, 则称系统(3)是指数稳定的. 在此基础上, 若对于给定的标量 $\gamma > 0$, 系统还满足 $\|e(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2, \forall w(t) \in L_2[t_0, \infty)$, 则称滤波误差系统(3)指数稳定且具有 H_∞ 性能水平 γ .

本文研究的目标是, 在切换律 $\sigma(t)$ 的作用下, 针对系统(1)设计形如式(2)的滤波器, 使得滤波误差系统(3)指数稳定且具有 H_∞ 性能水平 γ .

2 主要结果

首先给出系统指数稳定和满足鲁棒 H_∞ 性能的充分条件, 该条件为后面滤波器的设计奠定了基础.

2.1 滤波误差系统性能分析

定理1 考虑滤波误差系统(3), 给定标量 $\alpha > 0, \mu > 1, \gamma > 0$, 如果存在连续可微的正定对称矩阵 $P_i(\rho) \in R^{2n \times 2n}$, 对于任意的 $i, j \in \underline{N}$ 且 $0 < j < i$, 使得下面的矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1i} & P_i(\rho)\bar{B}_i(\rho) & \bar{C}_i^T(\rho) \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$P_i(\rho) \leq \mu P_j(\rho), \quad (6)$$

并且系统的平均驻留时间满足

$$\tau_a > \tau_a^* = \frac{\ln \mu}{\alpha}, \quad (7)$$

则滤波误差系统(3)指数稳定且具有鲁棒 H_∞ 性能 γ . 其中

$$\Phi_{1i} = \bar{A}_i^T(\rho)P_i(\rho) + P_i(\rho)\bar{A}_i(\rho) +$$

$$\alpha P_i(\rho) + \sum_{l=1}^s \left(\tau_l \frac{\partial P_i}{\partial \rho_l} \right).$$

证明 对于第 i 个子系统, 选取Lyapunov函数

$$V_i(t) = V_i(\tilde{x}_t, \rho) = \tilde{x}^T(t)P_i(\rho)\tilde{x}(t).$$

求 $V_i(\tilde{x}_t, \rho)$ 的时间导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\tilde{x}_t, \rho) &= \\ \tilde{x}^T(t) &\left[\bar{A}_i^T(\rho)P_i(\rho) + P_i(\rho)\bar{A}_i(\rho) + \right. \\ &\left. \sum_{l=1}^s \left(\tau_l \frac{\partial P_i}{\partial \rho_l} \right) \right] \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}^T(t)P_i(\rho)\bar{B}_i(\rho)w(t). \end{aligned}$$

当 $w(t) = 0$ 时, 由式(5)有 $\dot{V}_i(\tilde{x}_t, \rho) \leq -\alpha V_i(t)$, 则系统的 $V_i(t)$ 满足下面的不等式关系:

$$V_i(t) \leq V_i(t_0^{(i)}) e^{-\alpha(t-t_0^{(i)})}, \quad t \geq t_0^{(i)},$$

其中 $t_0^{(i)}$ 表示第 i 个子系统运行的初始时刻.

将系统的运行时间域分割成 $[t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{n-1}, t_n)$. 若 $\mu > 1$, 则由式(6)可得 $\forall i, j \in \underline{N}, V_i(t) \leq \mu V_j(t)$, 根据关系 $N(t_0, t) \leq (t - t_0)/\tau_a$, 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 系统的Lyapunov函数满足

$$V(t) \leq V_{\sigma(t_k)}(t_k) e^{-\alpha(t-t_k)} \leq$$

$$\begin{aligned} \mu V_{\sigma(t_{k-1})}(t_k) e^{-\alpha(t-t_k)} &\leq \dots \leq \\ \mu^k V_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} &\leq \\ V_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{-\left(\alpha - \frac{\ln \mu}{\tau_a}\right)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

选取 $a = \min_{i \in \underline{N}} \lambda_{\min}(P_i(\rho))$, $b = \max_{i \in \underline{N}} \lambda_{\max}(P_i(\rho))$, 可得

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sqrt{b/a} \|\tilde{x}(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\ln \mu}{\tau_a}\right)(t-t_0)},$$

当系统的平均驻留时间满足式(7)时, 可知滤波误差系统(3)是指数稳定的.

下面证明系统(3)满足 H_∞ 性能约束条件. 利用 Schur 补引理和式(5)条件, 可得

$$\begin{aligned} e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}_i(t) + \alpha V_i(t) = \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}^T(t) \\ w^T(t) \end{bmatrix} \Pi_i [\tilde{x}(t) \quad w(t)] < 0, \end{aligned}$$

其中

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{1i} & P_i(\rho) \bar{B}_i(\rho) \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_i^T(\rho) \\ 0 \end{bmatrix} [\bar{C}_i(\rho) \quad 0].$$

同理, 根据前述, 将系统的运行时间域分割成 $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$. 在零初始条件下, 即 $\tilde{x}(t_0) = 0$ 时, 考虑

$$\begin{aligned} J = \\ \int_{t_0}^{\infty} (e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)) dt \leq \\ \int_{t_0}^{t_1} (e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}_{i_1}(t)) dt + \\ \int_{t_1}^{t_2} (e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}_{i_2}(t)) dt + \dots \leq 0, \end{aligned}$$

则有

$$\int_{t_0}^{\infty} e^T(t)e(t) dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{\infty} w^T(t)w(t) dt.$$

对于 $w(t) \in L_2[t_0, \infty)$, 可知系统(3)具有 H_∞ 性能约束 γ . $\square$

注 2 如果增加 μ , 则系统稳定的多 Lyapunov 函数存在的可能性将增加, 这意味着对于给定的 α 值, 系统的驻留时间将直接依赖于 μ .

注 3 定理 1 中 Lyapunov 函数矩阵与系统矩阵之间存在着耦合, 是一个非线性问题, 下面的定理通过引入附加矩阵和应用投影引理实现了解耦的目的.

定理 2 给定标量 $\alpha > 0$, $\mu > 1$, $\gamma > 0$, 系统的平均驻留时间满足式(7), 滤波误差系统(3)指数稳定且具有鲁棒 H_∞ 性能约束 γ 的充分条件是存在连续可微的正定对称矩阵 $P_i(\rho) \in R^{2n \times 2n}$, 矩阵 W_i , 使得式(6)和如下参数线性矩阵不等式 (PLMI) 成立:

$$\begin{bmatrix} -(W_i + W_i^T) & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

其中

$$\Phi_{2i} = -P_i(\rho) + \alpha P_i(\rho) + \sum_{l=1}^s \left(\tau_l \frac{\partial P_i}{\partial \rho_l} \right),$$

$$\Sigma_{12} = [W_i^T \bar{A}_i(\rho) + P_i(\rho) \quad W_i^T \bar{B}_i(\rho) \quad 0 \quad W_i^T],$$

$$\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} \Phi_{2i} & 0 & \bar{C}_i^T(\rho) & 0 \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -P_i(\rho) \end{bmatrix}.$$

证明 不等式(8)等价于

$$\Sigma + E^T W_i F + F^T W_i^T E < 0.$$

其中

$$E_1 = [\bar{A}_i(\rho) \quad \bar{B}_i(\rho) \quad 0 \quad I], \quad E = [-I \quad E_1],$$

$$F = [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad E_2 = [P_i(\rho) \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

矩阵 F^T 和 E 的零空间分别为 $\aleph_E$ 和 $\aleph_{F^T}$, 即

$$\aleph_E = \begin{bmatrix} E_1 \\ I_{k \times k} \end{bmatrix}, \quad \aleph_{F^T} = \begin{bmatrix} 0_{2n \times k} \\ I_{k \times k} \end{bmatrix},$$

其中 $k = 4n + p + q$. 应用投影引理^[7]得

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1i} - P_i(\rho) & P_i(\rho) \bar{B}_i(\rho) & \bar{C}_i^T(\rho) & P_i(\rho) \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -P_i(\rho) \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\Sigma_{22} < 0. \quad (10)$$

由 Schur 补引理可知, 式(9) $\rightarrow$ 式(5), 而式(10)为约束条件 $\Phi_{2i} < 0$. 这意味着式(8)的结果包含在式(5)中, 是滤波误差系统(3)指数稳定的充分条件. 因此, 式(6)~(8)能够保证滤波误差系统(3)是指数稳定并满足给定的 H_∞ 性能指标. $\square$

2.2 鲁棒 H_∞ 滤波器设计

下面根据滤波误差系统(3)的 H_∞ 性能准则和 LMI 技术, 设计系统(1)的鲁棒 H_∞ 滤波器.

定理 3 考虑切换 LPV 系统(1), 给定标量 $\alpha > 0$, $\mu > 1$, $\gamma > 0$, 使得系统的平均驻留时间满足式(7), 滤波误差系统(3)指数稳定且具有鲁棒 H_∞ 噪声抑制水平 γ 的充分条件是存在属于 $R^{n \times n}$ 空间的连续可微矩阵 $\bar{P}_{1i}(\rho) > 0$, $\bar{P}_{3i}(\rho) > 0$, $\bar{P}_{1j}(\rho) > 0$, $\bar{P}_{3j}(\rho) > 0$, $\bar{P}_{2i}(\rho)$, $\bar{P}_{2j}(\rho)$ 和矩阵 $X_i \in R^{n \times n}$, $M_i \in R^{n \times n}$, $N_i \in R^{n \times n}$ 以及 $\bar{A}_{fi}(\rho) \in R^{n \times n}$, $\bar{B}_{fi}(\rho) \in R^{n \times m}$, $\bar{C}_{fi}(\rho) \in R^{p \times n}$, 对于所有的参数变化轨迹, 下面的矩阵不等式组成立:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0; \quad (11)$$

$$\bar{P}_i(\rho) \leq \mu \bar{P}_j(\rho), \quad \forall j < i \in \underline{N}. \quad (12)$$

其中

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} -X_i - X_i^T & -M_i - N_i^T & A_{13} & A_{14} \\ * & -N_i - N_i^T & A_{23} & A_{24} \\ * & * & A_{33} & A_{34} \\ * & * & * & A_{44} \end{bmatrix};$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} A_{15} & 0 & X_i^T & N_i^T \\ A_{25} & 0 & M_i^T & N_i^T \\ 0 & L_i^T(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{C}_{fi}^T(\rho) & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Psi_{22} = \text{diag}\{-\gamma^2 I, -I, -\bar{P}_i(\rho)\};$$

$$\bar{P}_i(\rho) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{1i}(\rho) & \bar{P}_{2i}(\rho) \\ * & \bar{P}_{3i}(\rho) \end{bmatrix}, \forall i \in \underline{N};$$

$$A_{13} = X_i^T A_i(\rho) + \bar{B}_{fi}(\rho) C_i(\rho) + \bar{P}_{1i}(\rho);$$

$$A_{23} = M_i^T A_i(\rho) + \bar{B}_{fi}(\rho) C_i(\rho) + \bar{P}_{2i}^T(\rho);$$

$$A_{33} = -\bar{P}_{1i}(\rho) + \alpha \bar{P}_{1i}(\rho) + \sum_{l=1}^s \left(\tau_l \frac{\partial \bar{P}_{1i}}{\partial \rho_l} \right);$$

$$A_{14} = \bar{A}_{fi}(\rho) + \bar{P}_{2i}(\rho);$$

$$A_{24} = \bar{A}_{fi}(\rho) + \bar{P}_{3i}(\rho);$$

$$A_{34} = -\bar{P}_{2i}(\rho) + \alpha \bar{P}_{2i}(\rho) + \sum_{l=1}^s \left(\tau_l \frac{\partial \bar{P}_{2i}}{\partial \rho_l} \right);$$

$$A_{44} = -\bar{P}_{3i}(\rho) + \alpha \bar{P}_{3i}(\rho) + \sum_{l=1}^s \left(\tau_l \frac{\partial \bar{P}_{3i}}{\partial \rho_l} \right);$$

$$A_{15} = X_i^T B_i(\rho) + \bar{B}_{fi}(\rho) D_i(\rho);$$

$$A_{25} = M_i^T B_i(\rho) + \bar{B}_{fi}(\rho) D_i(\rho).$$

若上述的PLMI有可行解, 则滤波器的参数矩阵为

$$\Upsilon(\rho) = \text{diag}\{N_i^{-T}, I\} \bar{\Upsilon}(\rho). \quad (13)$$

其中

$$\Upsilon(\rho) = \begin{bmatrix} A_{fi}(\rho) & B_{fi}(\rho) \\ C_{fi}(\rho) & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Upsilon}(\rho) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{fi}(\rho) & \bar{B}_{fi}(\rho) \\ \bar{C}_{fi}(\rho) & 0 \end{bmatrix}.$$

证明 不失一般性, 将定理2中的 W_i 和 $P_i(\rho)$ 写成如下的分块形式:

$$P_i(\rho) = \begin{bmatrix} P_{1i}(\rho) & P_{2i}(\rho) \\ P_{2i}^T(\rho) & P_{3i}(\rho) \end{bmatrix}, \quad W_i = \begin{bmatrix} W_{1i} & W_{2i} \\ W_{3i} & W_{4i} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

假设 W_{3i} 和 W_{4i} 可逆, 定义矩阵

$$J_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W_{4i}^{-1} W_{3i} \end{bmatrix},$$

$$J_i^T P_i(\rho) J_i = \begin{bmatrix} \bar{P}_{1i}(\rho) & \bar{P}_{2i}(\rho) \\ \bar{P}_{2i}^T(\rho) & \bar{P}_{3i}(\rho) \end{bmatrix},$$

则 J_i 可逆. 利用 $\text{diag}\{J_i, J_i, I, I, J_i\}$ 和 J_i 对式(8)和(6)进行全等变换, 得

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ * & \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad J_i^T P_i(\rho) J_i - \mu J_i^T P_j(\rho) J_i \leq 0.$$

其中

$$\Xi_{11} = \begin{bmatrix} -J_i^T (W_i + W_i^T) J_i & J_i^T (W_i^T \bar{A}_i(\rho) + P_i(\rho)) J_i \\ * & J_i^T \Phi_{2i} J_i \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{12} = \begin{bmatrix} J_i^T W_i^T \bar{B}_i(\rho) & 0 & J_i^T W_i^T J_i \\ 0 & J_i^T \bar{C}_i^T(\rho) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{22} = \text{diag}\{-\gamma^2 I, -I, -J_i^T P_i(\rho) J_i\}.$$

将式(4), (14)和定义的 $J_i, J_i^T P_i(\rho) J_i$ 矩阵代入上面的不等式, 并定义 $X_i = W_{1i}, M_i = W_{2i} W_{4i}^{-1} W_{3i}, N_i = W_{3i}^T W_{4i}^{-T} W_{3i}$, 以及

$$\bar{\Upsilon}(\rho) = \text{diag}\{W_{3i}^T, I\} \Upsilon(\rho) \text{diag}\{W_{4i}^{-1} W_{3i}, I\}, \quad (15)$$

即可推得式(11)和(12).

由式(15)可求出满足要求的滤波器参数矩阵, 但构造滤波器参数矩阵所需的 W_{3i} 和 W_{4i} 并未包含在式(11)和(12)中. 为此, 将滤波器(2)由 $y(t)$ 到 $z_f(t)$ 的传递函数表示为 $T_{z_f y} = C_{fi}(\rho)(sI - A_{fi}(\rho))^{-1} B_{fi}(\rho)$. 将式(15)代入并考虑关系式 $N_i = W_{3i}^T W_{4i}^{-T} W_{3i}$, 可得 $T_{z_f y} = \bar{C}_{fi}(\rho)[sI - N_i^{-T} \bar{A}_{fi}(\rho)] N_i^{-T} \bar{B}_{fi}(\rho)$. 由此, 滤波器参数矩阵可由式(13)构造. $\square$

注4 因为参数的依赖性, 式(11)和(12)对应的是无限维的参数线性矩阵不等式组, 为了解决这一问题, 采用近似基函数和网格技术^[5,7]可以将其转化为有限维的LMI凸优化问题, 更利于数值求解.

推论1 对于连续切换LPV系统(1), 给定标量 $\alpha > 0$, 对于任意的 $i \in \underline{N}$, 可通过求解如下的凸优化问题来设计满足式(7)的次优鲁棒 H_∞ 滤波器:

$$\min \gamma, \text{ subject to 式(11)和(12),}$$

且满足要求的次优滤波器可由式(13)获得.

3 仿真实例

考虑形如式(1)的切换LPV系统, 参数矩阵如下.

子系统1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 + 0.1\rho(t) & -4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.43 + 0.1\rho(t) \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [-1 + 0.1\rho(t) \quad 1.5], \quad D_1 = 0.2 + 0.1\rho(t),$$

$$L_1 = [1.0 + 0.1\rho(t) \quad 1.5];$$

子系统2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1.5 \\ -2.5 + 0.2\rho(t) & -6.5 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.88 + 0.2\rho(t) \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [-5 + 0.2\rho(t) \quad 2], \quad D_2 = [0.16 + 0.2\rho(t)],$$

$$L_2 = [1.2 + 0.2\rho(t) \quad 1.3].$$

其中: $\rho_1(t) = \sin(t)$ 和 $\rho_2(t) = |\cos(t)|$ 为时变参数, 参数变化区间为 $[-1, 1] \times [0, 1]$. 选取近似基函数为

$$f_1(\rho) = 1, f_2(\rho) = \rho_1(t), f_3(\rho) = \rho_2(t).$$

利用网格技术将参数变化区间均匀划分为 9×9 个网格, 应用推论 1 可得次优 H_∞ 噪声抑制水平的 $\gamma^* = 1.4529$ ($\alpha = 0.800$), 系统的最小平均驻留时间为

$$\tau_a^* = \frac{\ln \mu}{\alpha} = \frac{\ln 4.8576}{0.8000} = 1.9757,$$

取 $\tau_a = 2$, 相应的 H_∞ 滤波器参数矩阵为

$$\begin{aligned} A_{f_1}(\rho) &= \begin{bmatrix} 1.51 & -8.09 \\ 4.71 & -12.66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.18 & 1.30 \\ -1.36 & 1.54 \end{bmatrix} \rho_1(t) + \\ &\quad \begin{bmatrix} -0.17 & 0.13 \\ -0.23 & 0.19 \end{bmatrix} \rho_2(t), \\ B_{f_1}(\rho) &= \begin{bmatrix} -3.65 \\ -4.96 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.90 \\ 1.06 \end{bmatrix} \rho_1(t) + \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.13 \end{bmatrix} \rho_2(t), \\ C_{f_1}(\rho) &= [-0.18 \quad -1.40] + [-0.09 \quad -0.02] \rho_1(t) + \\ &\quad [0.01 \quad 0.01] \rho_2(t), \\ A_{f_2}(\rho) &= \begin{bmatrix} -0.34 & -4.22 \\ 4.63 & -10.52 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.09 & -0.05 \\ 0.11 & -0.05 \end{bmatrix} \rho_1(t) + \\ &\quad \begin{bmatrix} -0.13 & 0.06 \\ -0.13 & 0.05 \end{bmatrix} \rho_2(t), \\ B_{f_2}(\rho) &= \begin{bmatrix} -0.33 \\ -1.33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.04 \end{bmatrix} \rho_1(t) + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} \rho_2(t), \\ C_{f_2}(\rho) &= [-0.64 \quad -0.73] + [-0.08 \quad 0.03] \rho_1(t) + \\ &\quad [0.11 \quad -0.01] \rho_2(t). \end{aligned}$$

为了更有效地验证系统性能, 构造 2 个平均驻留时间满足 $\tau_a = 2$ 的切换信号控制系统动态切换, 选取 $x(0) = [1 \quad -1]^T$, $x_f(0) = [0 \quad 0]^T$. 外界噪声信号为 $w(t) = 8e^{-0.01t} \sin(0.02\pi t)$. 图 1 和图 2 分别为切换 LPV 系统在 2 个不同切换信号下的滤波误差曲线.

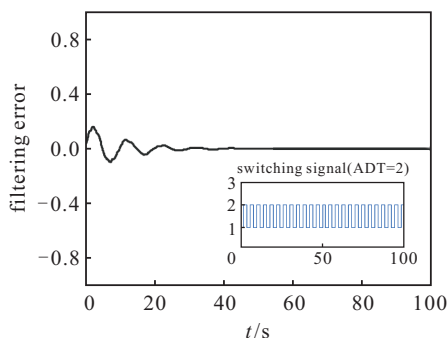


图 1 周期切换信号下的滤波误差曲线

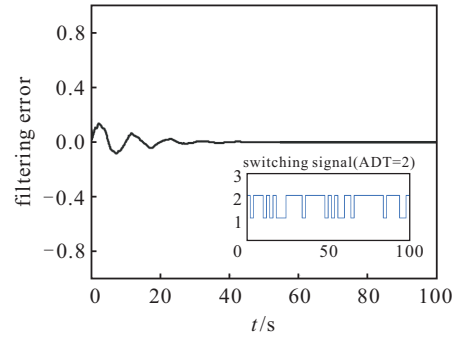


图 2 任意切换信号下的滤波误差曲线

从图 1 和图 2 可以看出, 滤波误差系统稳定且满足给定的 H_∞ 扰动抑制水平, 从而表明本文设计的滤波器是有效的.

4 结 语

本文基于平均驻留时间技术研究了一类参数随时间变化的切换系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题, 利用多 Lyapunov 函数方法和 PLMI 技术得到了此类系统鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件. 由于该充分条件是无穷维问题, 借助近似基函数和网格技术, 可将滤波器参数矩阵的求解转化为有限维线性矩阵不等式组的凸优化问题. 最后, 通过仿真实例表明了所提出方法的可行性.

参考文献(References)

- [1] Sun Z, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems[J]. Automatica, 2005, 41(5): 181-195.
- [2] He X, Dimirovski G M, Zhao J. Control of switched LPV systems using common Lyapunov function method and an F-16 aircraft application[C]. IEEE Int Conf on Systems Man and Cybernetics. Shenyang, 2010: 386-392.
- [3] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 59-70.
- [4] Liu X W. Robust H_∞ filtering for switched discrete-time systems with time-delays[C]. Proc of the 26th Chinese Control. Zhangjiajie, 2007: 660-664.
- [5] 王红茹, 王常虹, 高会军. 一类时滞 LPV 系统的鲁棒故障检测[J]. 控制与决策, 2006, 21(10): 1148-1158.
(Wang H R, Wang C H, Gao H J. Robust fault detection for a class of LPV systems with time-delays[J]. Control and Decision, 2006, 21(10): 1148-1158.)
- [6] Zhang L X, Shi P. l_2 - l_∞ model reduction for switched LPV systems with average dwell time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(10): 2443-2448.
- [7] Li Y H, Liang Y, Luo X J. Delay-dependent L_1 filtering for LPV systems with parameter-varying delays[J]. J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2011, 133(4): 44502-44505.