

文章编号: 1001-0920(2013)02-0229-06

一类基于优势关系的不完全信息多属性决策方法

李金鹏¹, 岳超源¹, 李 武²

(1. 华中科技大学 系统工程研究所, 武汉 430074; 2. 湖南理工学院 信息与通信工程学院, 湖南 岳阳 414006)

摘要: 针对属性权重和属性值信息均不完全, 且含有非线性形式的多属性决策问题, 提出一种基于优势关系实现方案择优与排序的决策方法. 首先定义方案优势、弱优势和潜在优关系, 构建等价的非线性规划模型, 确定优势和潜在优方案; 然后揭示、论证了非劣集与潜在优集的关系, 提出了方案优势度指标, 并据此给出了方案择优与排序的实现步骤; 最后, 提出采用变量替换法求解非线性决策模型. 实例计算结果表明, 所提出的方法是可行且有效的.

关键词: 不完全信息; 多属性决策; 优势; 潜在优; 方案优势度

中图分类号: C934

文献标志码: A

A dominance relation-based decision making approach for multi-attribute decision making problems with incomplete information

LI Jin-peng¹, YUE Chao-yuan¹, LI Wu²

(1. Institute of Systems Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. School of Information and Communication Engineering, Hu'nan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China. Correspondent: LI Jin-peng, E-mail: jinpeng2037@126.com)

Abstract: A dominance-based decision making approach is proposed for multi-attribute decision problems with imprecise information both on the attribute weights and the alternatives' values. Firstly, the definitions of dominance, weak dominance and potential optimality are given and some nonlinear programming models are built to determine which alternative is nondominated or potential optimality. Then the relationship between the set of potential optimality alternatives and the set of nondominated alternatives is discussed, and the index of dominance measuring is presented. The procedures to ranking and screening the alternatives are given. Finally, the algorithm of variable replacement is used to solve the nonlinear decision model with different kinds of imprecise information. The calculation of the case study and comparison of the results show that the proposed method is feasible and effective.

Key words: incomplete information; multi-attribute decision making; dominance; potential optimality; alternative dominance index

0 引言

多属性决策在工程设计、经济、管理和军事等诸多领域具有广泛的实际应用背景. 目前, 对于属性权重和属性值为确定信息的多属性决策问题, 已有许多成熟的技术和分析方法^[1], 但在实际决策问题中, 决策者往往只能提供决策参数的不完全确定信息, 主要原因如下: 1) 决策可能是在时间比较紧, 知识或数据相对缺乏的情况下作出的; 2) 有些属性反映社会和环境的影响, 其本身难以量化; 3) 决策者的精力和信息处理能力有限, 尤其在复杂和不确定环境下的数值判断能力有限^[2]; 4) 在某些情况下, 决策者不愿意将自

己对属性或者方案的偏好信息完全或精确地提供.

Fishburn^[3]最先开始研究不完全信息决策问题, 随后较多的研究大都集中在属性权重信息不完全、方案属性值信息不完全、权重和属性值信息均不完全3方面. 权重不完全信息包括区间形式^[4]、序关系^[5-7]、任意线性不等式^[8]等. 属性值不完全信息包括部分缺失^[9-10]、区间形式^[11-12]、序关系^[13]、任意线性不等式^[14]等. 通过在不完全信息下构建线性规划或非线性规划模型确定方案成对优势关系^[14]和潜在优关系^[15-16], 并针对构建的规划模型提出求解方法和改进措施^[14,17], 以减少需要求解模型的数量, 得到优势方

收稿日期: 2011-08-22; 修回日期: 2012-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60904059).

作者简介: 李金鹏(1985-), 男, 博士生, 从事决策理论与方法、多目标优化算法的研究; 岳超源(1944-), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策分析、多目标优化等研究.

案和潜在优方案. 已有研究中的优势关系较为严格, 实际决策问题中往往难以确定在不完全信息集内任意位置均严格占优的方案, 而且一般确定的非劣方案数量较多, 难以有效地实现择优与排序. 另外, 属性权重和属性值的不完全信息多为线性形式, 较少关注非线性形式的属性值信息.

本文在属性权重和属性值信息均不完全确定的情况下建立方案优势、弱优势和潜在优关系, 并将优势和潜在优方案的确定转化为等价的优化模型. 研究确定非劣方案集与潜在优集的关系, 给出方案优势度指标, 以便于在非劣集内实现全部方案优劣排序, 减少需求解规划模型的数量. 同时, 针对决策模型为含有非线性形式不完全信息的非线性规划, 提出有效的求解算法.

1 基于优势关系的不完全信息决策方法

1.1 问题描述

对于一个不完全信息多属性决策问题, 设方案集为

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

其中: x_j 表示第 j 个方案; 属性集为 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, c_i 表示第 i 个属性; 权重向量为 $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, w_i 为属性 c_i 的权重, $w_i \in [0, 1]$, 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$; 属性值向量 $v_i = \{v_i(x_1), v_i(x_2), \dots, v_i(x_m)\}$, $v_i(x_j)$ 为方案 x_j 在属性 c_i 下的属性值. 决策者给出属性权重的线性形式的不完全信息主要有以下几种:

- 1) $w_i \geq w_j$;
- 2) $w_i - w_j \geq \varepsilon_i$;
- 3) $w_i \geq \beta_i w_j$;
- 4) $\alpha_i \leq w_i \leq \alpha_i + \varepsilon_i$;
- 5) $w_i - w_j \geq w_k - w_l, i \neq j \neq k \neq l, \varepsilon_i, \alpha_i$ 和 β_i 为正常数.

方案属性值的线性不完全信息主要有以下几种:

- 1) $v_i(x_j) \geq v_i(x_k)$;
- 2) $v_i(x_j) - v_i(x_k) \geq \varepsilon_i$;
- 3) $v_i(x_j) \geq \beta_i v_i(x_k)$;
- 4) $\alpha_i \leq v_i(x_j) \leq \alpha_i + \varepsilon_i$;
- 5) $v_i(x_j) - v_i(x_k) \geq v_i(x_l) - v_i(x_t), j \neq k \neq l \neq t$.

同时, 决策者还给出非线性形式的不完全信息, 如方案的优劣与属性值成梯形、高斯曲线等非线性关系, 或者方案在部分属性或者全部属性上的优劣判断, 形如 $\sum_{i=1}^n w_i [v_i(x_k) - v_i(x_j)] \geq 0 (1 < l \leq n)$ 等. 将属性权重的不完全信息集记为 \bar{W} , 属性值的不完全信息集记为 \bar{V} . 本文研究在权重和属性值信息均不完全情

况下实现方案的择优与排序, 其中非线性不完全信息主要考虑决策者给出的方案在部分或者全部属性上优劣判断的形式.

1.2 不完全信息下方案优势关系

根据多属性效用理论, 对于方案 x_j , 其加权效用值 $v(x_j) = \sum_{i=1}^n w_i v_i(x_j)$, 若满足

$$\sum_{i=1}^n w_i v_i(x_j) \geq \sum_{i=1}^n w_i v_i(x_k), \forall x_k \in X - \{x_j\}, \quad (1)$$

则可将 x_j 视为方案集 X 内的最优方案. 但是, 在不完全信息集 \bar{W} 和 \bar{V} 内, 判断方案 x_j 是否满足式(1)较为困难, 可通过方案成对比较来确定不完全信息下方案的优势关系.

定义 1 对于方案集 X 上的方案 x_j 和 x_k , 称 x_j 优势于 x_k , 当且仅当对 $\forall w_i \in \bar{W}, \forall v_i \in \bar{V}$, 有

$$\sum_{i=1}^n w_i (v_i(x_j) - v_i(x_k)) \geq 0,$$

且至少存在一个 $w_i \in \bar{W}, v_i \in \bar{V}$, 使

$$\sum_{i=1}^n w_i (v_i(x_j) - v_i(x_k)) > 0$$

成立. 记作 $x_j \text{SD} x_k$.

定义 2 对于方案 x_j , 不存在 $\forall x_k \in X, k \neq j$, 使得 $x_k \text{SD} x_j$, 则称方案 x_j 为方案集 X 上的非劣势方案, 将所有非劣势方案组成的集合称为非劣势方案集, 简称非劣集, 记为 SNDS.

上述方案间严格优势关系的确定可以转化为如下非线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min_{\forall k \neq j} z_{jk} &= \sum_{i=1}^n w_i [v_i(x_j) - v_i(x_k)]. \\ \text{s.t.} &\begin{cases} w_i \in \bar{W}, i = 1, 2, \dots, n; \\ v_i \in \bar{V}, i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

求解该模型. 当且仅当模型的目标函数值 $z_{jk}^{\min} \geq 0$ 时, 方案 $x_j \text{SD} x_k$.

定理 1 模型(2)的目标值 $z_{jk}^{\min} \geq 0$ 是方案 $x_j \text{SD} x_k$ 的充要条件.

由方案 $x_j \text{SD} x_k$ 的定义易知定理 1 成立, 证明过程略.

在实际决策问题中, 得到的非劣集可能含有较多方案, 需要一种弱于上述优势关系的占优关系来实现方案优劣判断, 并在非劣集基础上研究如何进一步确定可能最优的方案. 为此, 引入信息不完全情况下方案间弱优势关系和方案优势度的概念.

对模型(2)的目标函数求最大值, 建立如下模型:

$$\begin{aligned} \max_{\forall k \neq j} z_{jk} &= \sum_{i=1}^n w_i [v_i(x_j) - v_i(x_k)]. \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} w_i \in \bar{W}, i = 1, 2, \dots, n; \\ v_i \in \bar{V}, i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

求解模型(3), 可得到 z_{jk}^{\max} , 对于任意方案 x_j 和 $x_k, z_{jk} \in [z_{jk}^{\min}, z_{jk}^{\max}]$.

定义 3 在 \bar{W} 和 \bar{V} 内, 将 z_{jk} 视为区间 $[z_{jk}^{\min}, z_{jk}^{\max}]$ 上的一个随机变量, 令其概率分布函数为 $f_{jk}(z)$, 则变量 $z_{jk} > 0$ 的概率为

$$p(z_{jk} > 0) = \begin{cases} 1, z_{jk}^{\min} \geq 0; \\ \int_0^{z_{jk}^{\max}} f_{jk}(z) dz, z_{jk}^{\min} < 0, z_{jk}^{\max} > 0; \\ 0, z_{jk}^{\max} \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

称 $p(z_{jk} > 0)$ 为方案 x_j 优势 x_k 的程度, 简称方案优势度.

若随机变量 z_{jk} 服从均匀分布, 则有

$$p(z_{jk} > 0) = \begin{cases} 1, z_{jk}^{\min} \geq 0; \\ \frac{z_{jk}^{\max}}{z_{jk}^{\max} - z_{jk}^{\min}}, z_{jk}^{\min} < 0, z_{jk}^{\max} > 0; \\ 0, z_{jk}^{\max} \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)可知: 若 $p(z_{jk} > 0) = 1$, 则 x_j SD x_k ; 若 $p(z_{jk} > 0) = 0$, 则 x_k SD x_j .

定义 4 对于 $\forall x_k \in X, k \neq j$, 若 x_j 对 x_k 的方案优势度 $p(z_{jk} > 0) > 0.5$, 则称方案 x_j 弱优势于方案 x_k , 记作 x_j WD x_k .

根据方案间优势度的定义, 可计算在方案集 X' 内 ($X' \subseteq X$) 任一方案优势其他方案的总体优势度

$$P_j^+ = \sum_{x_k \in X'} p(z_{jk} > 0). \quad (6)$$

该指标反映了方案 x_j 按照概率优势于方案集 X' 内其他方案的总体强度, P_j^+ 越大, 方案 x_j 依概率优势于其他方案的强度越大.

1.3 潜在优方案

在不完全信息下, 通过式(1)直接确定最优方案较为困难, 文献[14,17]等提出了潜在优方案, 为确定最优方案提供了一种重要的手段.

定义 5 对于方案集 X 上的方案, 称 x_j 为潜在优方案, 当且仅当下式^[14]成立:

$$\exists w_i \in \bar{W}, \exists v_i \in \bar{V}, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i v_i(x_j) = \max_{\forall x_k \in X} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i v_i(x_k) \right\}. \quad (8)$$

记潜在优方案为 POA, 由潜在优方案组成的集合称作潜在优集, 记作 POS.

方案的潜在优关系可通过如下规划模型^[14]确定:

$$\begin{aligned} \min_{x_j \in X} \quad &\varphi. \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i [v_i(x_j) - v_i(x_k)] + \varphi \geq 0, k = 1, 2, \dots, m; \\ w_i \in \bar{W}; \\ v_i \in \bar{V}; \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

求解上述模型得到目标函数值 φ^* , 当且仅当 $\varphi^* = 0$ 时, 方案 x_j 为 POA.

定理 2 模型(8)的目标值 $\varphi^* = 0$ 是方案 x_j 为 POA 的充要条件.

证明 充分条件. 模型(8)的目标值 $\varphi^* = 0$, 由约束条件可知, 存在 $w_i \in \bar{W}, v_i \in \bar{V}$, 使 $\sum_{i=1}^n w_i (v_i(x_j) - v_i(x_k)) \geq 0$ 对 $\forall x_k \in X$ 成立, 即存在 $w_i \in \bar{W}, v_i \in \bar{V}$, 满足 $\sum_{i=1}^n w_i v_i(x_j) = \max_{\forall k} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i v_i(x_k) \right\}$, 可得 x_j 为 POA, 充分条件成立.

必要条件. x_j 为方案集 X 内的潜在优方案, 则 $\exists w'_i \in \bar{W}, \exists v'_i \in \bar{V}$, 使对 $\forall x_k \in X$, 有

$$\sum_{i=1}^n w'_i (v'_i(x_j) - v'_i(x_k)) \geq 0,$$

易知 $\varphi = 0$ 满足约束条件. 同时, $\exists w_i \in \bar{W}, \exists v_i \in \bar{V}$, 使 $\sum_{i=1}^n w_i (v_i(x_j) - v_i(x_k)) < 0$, 根据模型(8)约束条件, $\varphi > 0$, 因此 $\varphi^* = 0$, 必要条件成立. \square

易知, 非潜在优的方案一定不能成为最优方案, 即最优的方案一定在潜在优集中取得. 为实现最优方案选择, 需进一步确定潜在优集与非劣集之间的关系.

定理 3 SNDS 内的方案一定为 POA, POA 不一定属于 SNDS.

证明 由非劣方案集的定义可知, 对于 SNDS 内的方案 x_j , 不存在方案集内的任意其他方案对于不完全信息集内的任意属性值和权重值均优势于方案 x_j , 则必然存在某个属性值和权重值, 使 x_j 优势于其他所有方案, 因此方案 x_j 为 POA.

若方案 x_j 为 POA, 则 $\exists w'_i \in \bar{W}, \exists v'_i \in \bar{V}$, 使

$$\sum_{i=1}^n w'_i [v'_i(x_k) - v'_i(x_j)] \geq 0$$

对于任意 $\forall x_j \in X$ 成立. 令存在方案 x_j , 满足对于 $w'_i \in \bar{W}, v'_i \in \bar{V}$, 且对于其他 $w_i \in \bar{W}, v_i \in \bar{V}$, 均有 $w_i [v_i(x_k) - v_i(x'_j)] < 0$, 则方案 x_j SD x_k , 此时 x_k 不属于 SNDS.

又 SNDS 内的方案一定为 POA, 则存在 POA 属于 SNDS, 因此 POA 不一定属于 SNDS. \square

根据模型 (2) 确定方案集 X 内的 SNDS, 需求解 $M(M-1)/2$ 个非线性规划, 当方案数较多时, 求解较为复杂. 可在 X 内首先确定 POA, 然后再确定 SNDS, 这样可以有效地减少求解规划模型的数量. 此时需求解 $M+L(L-1)/2$ 个规划模型, 其中 L 为潜在优方案的数量. 例如一个具有 10 个方案, 其中 3 个为潜在优方案的决策问题, 直接确定 SNDS 需求解 45 个非线性规划, 而通过后者仅需求解 13 个规划模型.

1.4 方案择优与排序

由前述分析可知, 最优方案一定在潜在优集中取得, 且一定为非劣势方案. 在全部方案集上求解规划模型, 确定 POA 和 SNDS, 可通过逐步减少集合内方案数量并结合方案优势度指标实现择优和排序. 若 POA 或 SNDS 内方案数唯一, 则可将该方案视为方案集上的最优方案; 若 SNDS 内方案不唯一或者为空集, 则根据方案优势度指标实现优劣排序. 同样, 对于 X -SNDS 的方案, 重复上述过程直至实现全部方案排序. 具体地, 记 POS 和 SNDS 的方案数量分别为 n_p 和 n_s , 方案择优和排序的步骤如下:

Step 1: 在方案集 X 内对所有方案求解模型 (8), 确定 POS. 若 $n_p = 1$, 则该方案为最优方案; 若 $n_p > 1$, 则在 POS 内执行 Step 2; 若 $n_p = 0$, 则在方案集 X 内执行 Step 3.

Step 2: 对各方案求解模型 (2) 和 (3), 确定 SNDS. 若 $n_s = 1$, 则该方案为最优方案, 在 X -SNDS 内执行 Step 4; 若 $n_s = 0$, 则转 Step 3; 若 $n_s > 1$, 则在 SNDS 内执行 Step 3, 并在 X -SNDS 内执行 Step 4.

Step 3: 计算各方案的 p_j^+ 值, 根据 p_j^+ 的大小确定方案排序.

Step 4: 在 X -SNDS 内进一步确定 SNDS, 重复执行 Step 2 和 Step 3, 直至实现全部方案的排序.

2 求解算法

在属性权重和方案属性值双重不完全信息下, 确定方案间优势关系的模型是难以求解的非凸非线性规划, 已有的求解技术主要通过分步线性化和变量替换将非线性规划转化为线性规划. 分步线性化法假设方案在各属性下效用独立, 无法求解含有形如 $\sum_{i=1}^l w_i [v_i(x_k) - v_i(x_j)] \geq 0 (1 < l \leq n)$ 等非线性约束的规划模型. 本文将变量替换技术与基数值属性信息的处理相结合, 以实现不完全信息下非线性决策模型的求解.

对于具有基数值或有界区间形式的方案属性值

$v_i(x_j)$, 令 $v_i^M = \max_{\forall x_j \in X} v_i(x_j)$, $v_i^L = \min_{\forall x_j \in X} v_i(x_j)$, 进行

如下处理: 对于效益型属性, $v_i'(x_j) = \frac{v_i(x_j) - v_i^L}{v_i^M - v_i^L}$; 对

于成本型属性, $v_i'(x_j) = \frac{v_i^M - v_i(x_j)}{v_i^M - v_i^L}$.

对于序数型属性值信息, 数据处理后排序最前者取值为 1, 最后者取值为 0.

经过上述数据处理后, 原有方案属性值不完全信息集 \bar{V} 转化为 \bar{V}' . 采用文献 [17] 提出的变量替换方法将确定优势关系和潜在优关系的非线性规划模型转化为线性规划模型. 为此, 引入新的变量 y_i^j , 其取值为 $y_i^j = w_i v_i'(x_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, 则 \bar{V}' 中的不完全信息可以转换为如下形式: 1) $y_i^j \geq y_i^k$; 2) $y_i^j - y_i^k \geq \varepsilon_i w_i$; 3) $y_i^j \geq \beta_i y_i^k$; 4) $\alpha_i w_i \leq y_i^j \leq \alpha_i w_i + \varepsilon_i$; 5) $y_i^j - y_i^k \geq y_i^l - y_i^t$, $j \neq k \neq l \neq t$; 6) $\sum_{i=1}^l (y_i^j - y_i^k) \geq 0$, $0 < l < n$. 模型 (2) 和 (8) 可以分别转化为

$$\begin{aligned} \min_{\forall k \neq j} z_{jk} &= \sum_{i=1}^n (y_i^j - y_i^k), \\ \text{s.t.} &\begin{cases} w_i \in \bar{W}, \\ v_i \in \bar{V}', \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \min_{x_j \in X, \forall k} \varphi, \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i^j - y_i^k) + \varphi \geq 0, k = 1, 2, \dots, m, \\ w_i \in \bar{W}, \\ v_i \in \bar{V}', \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

求解模型 (9) 和 (10), 确定方案成对优势关系以及是否潜在优, 然后根据择优与排序步骤实现不完全信息下的方案排序.

3 案例应用

以某企业生产管理中设备购置方案选择为例进行分析. 企业决策者分别从成本 c_1 , 售后服务 c_2 , 功能 c_3 和易用性 c_4 共 4 个方面对 6 台设备方案 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ 进行排序并确定最优方案. 决策者给出的属性权重信息为 $w_1 \geq w_3 \geq w_2 \geq w_4$, $0.4w_1 \leq w_3 \leq 0.5w_1$, $0.7w_3 \leq w_2 \leq 0.9w_3$, $0.7w_2 \leq w_4 \leq 0.8w_2$. 同时, 决策者认为从功能和易用性考虑, 方案 $x_1 \succ x_4$; 从成本和功能两个方面考虑, 方案 $x_3 \succ x_5$. 在各个属性下, 决策者给出的方案评价信息如表 1 所示.

表 1 各属性下方案评价信息

方案属性	成本/万元	售后服务(排序等级)	功能(区间)/%	易用性(等级[区间])
X_1	6	1 st	[80,90]	high
X_2	5	3 st	[60,70]	high
X_3	8	4 st	[90,100]	moderate [70,80]
X_4	8	5 st	[80,90]	high
X_5	10	1 st	100	low
X_6	5	2 st	[90,100]	moderate [50,60]

经过数据处理, 方案评价信息集 \bar{V} 为

$$\begin{aligned}
 V_1 : & \{v_1(x_1) = 0.8; v_1(x_2) = v_1(x_6) = 1; \\
 & v_1(x_3) = v_1(x_4) = 0.4; v_1(x_5) = 0\}; \\
 V_2 : & \{v_2(x_1) = v_2(x_5) = 1; v_2(x_1) - v_2(x_6) > \varepsilon_{21}; \\
 & v_2(x_6) - v_2(x_2) > \varepsilon_{26}; v_2(x_2) - v_2(x_3) > \varepsilon_{22}; \\
 & v_2(x_3) - v_2(x_4) > \varepsilon_{23}; v_2(x_4) = 0\}; \\
 V_3 : & \{0.5 \leq v_3(x_1) \leq 0.75; 0 \leq v_3(x_2) \leq 0.25; \\
 & 0.75 \leq v_3(x_3) = v_3(x_6) \leq 1; \\
 & 0.5 \leq v_3(x_4) \leq 0.75; v_3(x_5) = 1\}; \\
 V_4 : & \{v_4(x_1) = v_4(x_2) = v_4(x_4) = 1; \\
 & 0.7 \leq v_4(x_3) \leq 0.8; v_4(x_5) = 0; \\
 & 0.5 \leq v_4(x_6) \leq 0.6\}; \\
 V_5 : & \{w_3(v_3(x_1) - v_3(x_4)) + w_4(v_4(x_1) - v_4(x_4)) \geq 0; \\
 & w_1(v_1(x_3) - v_1(x_5)) + w_3(v_1(x_3) - v_1(x_5)) \geq 0\}.
 \end{aligned}$$

其中: $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}$ 和 ε_{26} 为属性 c_2 下各方案排序等级间的差值, 是较小的正常数, 计算中取 0.05. 通过变量代换, 确定方案 x_j 潜在优的模型为

$$\begin{aligned}
 & \min_{x_j \in X, \forall k} \varphi; \\
 \text{s.t.} & \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^4 (y_i^j - y_i^k) + \varphi \geq 0, k = 1, 2, \dots, 6; \\
 & w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq w_4; 0.4w_1 \leq w_2 \leq 0.5w_1; \\
 & 0.7w_3 \leq w_2 \leq 0.9w_3; 0.7w_3 \leq w_2 \leq 0.8w_3; \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0; \\
 & y_1^1 = 0.8w_1; y_1^2 = y_1^6 = w_1; y_1^3 = y_1^4 = 0.4w_1; \\
 & y_1^5 = 0; y_2^1 = y_2^5 = w_2; y_2^1 - y_2^6 > 0.05w_2; \\
 & y_2^6 - y_2^2 > 0.05w_2; y_2^2 - y_2^3 > 0.05w_2; \\
 & y_2^3 - y_2^4 > 0.05w_2; y_2^4 = 0; \\
 & 0.5w_3 \leq y_3^1 \leq 0.75w_3; 0 \leq y_3^2 \leq 0.25w_3; \\
 & 0.75w_3 \leq y_3^3 \leq w_3; \\
 & 0.5w_3 \leq y_3^4 \leq 0.75w_3 y_3^5 = w_3; \\
 & 0.75w_3 \leq y_3^6 \leq w_3; y_4^1 = y_4^2 = y_4^4 = w_4; \\
 & 0.7w_4 \leq y_4^3 \leq 0.8w_4; 0.5w_4 \leq y_4^6 \leq 0.6w_4; \\
 & y_4^5 = 0; \sum_{i=3}^4 (y_i^1 - y_i^4) \geq 0; \sum_{i=1,3} (y_i^3 - y_i^5) \geq 0.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{12}$$

确定成对方案严格优势关系的模型为

$$\begin{aligned}
 & \min_{\forall k \neq j} z_{jk} = \sum_{i=1}^4 (y_i^j - y_i^k); \\
 \text{s.t.} & \left\{ \begin{aligned}
 & w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq w_4; 0.4w_1 \leq w_2 \leq 0.5w_1; \\
 & 0.7w_3 \leq w_2 \leq 0.9w_3; 0.7w_3 \leq w_2 \leq 0.8w_3; \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0; \\
 & y_1^1 = 0.8w_1; y_1^2 = y_1^6 = w_1; \\
 & y_1^3 = y_1^4 = 0.4w_1; y_1^5 = 0; y_2^1 = y_2^5 = w_2; \\
 & y_2^1 - y_2^6 > 0.05w_2; y_2^6 - y_2^2 > 0.05w_2; \\
 & y_2^2 - y_2^3 > 0.05w_2; y_2^3 - y_2^4 > 0.05w_2; \\
 & y_2^4 = 0; 0.5w_3 \leq y_3^1 \leq 0.75w_3; \\
 & 0 \leq y_3^2 \leq 0.25w_3; 0.75w_3 \leq y_3^3 \leq w_3; \\
 & 0.5w_3 \leq y_3^4 \leq 0.75w_3 y_3^5 = w_3; \\
 & 0.75w_3 \leq y_3^6 \leq w_3; y_4^1 = y_4^2 = y_4^4 = w_4; \\
 & 0.7w_4 \leq y_4^3 \leq 0.8w_4; 0.5w_4 \leq y_4^6 \leq 0.6w_4; \\
 & y_4^5 = 0; \sum_{i=3}^4 (y_i^1 - y_i^4) \geq 0; \sum_{i=1,3} (y_i^3 - y_i^5) \geq 0.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{13}$$

具体计算步骤如下:

Step 1: 在方案集 X 内对所有方案求解模型 (11), 得到 $POS = \{x_1, x_6\}$.

Step 2: 对方案 x_1 和 x_6 求解模型 (12), 得到 $SNDS = \{x_1, x_6\}$, $z_{16}^{\min} = -0.164$, $z_{16}^{\max} = 0.157$.

Step 3: $SNDS$ 内计算方案优势度, $p_1^+ = 0.489 < 0.5$, 则 x_6 WD x_1 , 因此方案 x_6 为最优方案.

为实现全部方案排序, 对 $X - \{x_1, x_6\}$ 内任意 2 个方案, 求模型 (12) 目标函数最小值和最大值, 结果如下:

$$\begin{aligned}
 & z_{23}^{\min} = 0.080, z_{23}^{\max} = 0.388, z_{24}^{\min} = 0.117, \\
 & z_{24}^{\max} = 0.410, z_{25}^{\min} = 0.181, z_{25}^{\max} = 0.471, \\
 & z_{34}^{\min} = -0.037, z_{34}^{\max} = 0.251, z_{35}^{\min} = 0.030, \\
 & z_{35}^{\max} = 0.282, z_{45}^{\min} = 0.007, z_{45}^{\max} = 0.128.
 \end{aligned}$$

可以得到, 在方案集 $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 内, $SNDS = \{x_2\}$; 在方案集 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 内, $SNDS = \{x_3, x_4\}$, 且 x_3 WD x_4 . 因此, 全部方案的排序为 $x_6 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$.

采用本文提出的方法分别对文献 [14] 和 [15] 中的案例进行计算, 以验证所提出方法的有效性. 采用本文方法可以得到, 在文献 [14] 方案集 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 内, $SDS = POS = \{x_1, x_3\}$, 且 x_1 WD x_3 , x_2 SD x_4 ,

因此方案排序为 $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$, 这与文献[14]给出的结果 $POS = \{x_1, x_3\}$ 是一致的. 同样可得到, 在文献[15]方案集 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 内, $SDS = POS = \{x_1, x_2\}$, 且 $x_1 WD x_2$, 在方案集 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 内, $x_3 WD x_4, x_3 WD x_4, x_4 WD x_5$, 最终得出方案排序为 $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$, 这与文献[15]得到的方案 x_1 和 x_2 为潜在优方案, 且优于方案 x_3, x_4 和 x_5 是一致的.

4 结 论

本文针对属性权重和属性值信息均不完全且含有非线性形式的一类多属性决策问题, 定义了方案优势、潜在优、弱优和优势度等概念, 明确了非劣方案集与潜在优集之间的关系, 并通过构建和求解等价的数学规划模型确定方案之间的优势和潜在优关系, 据此实现了不完全信息下方案集的择优与排序. 实例分析和与相关文献的结果比较表明了本文方法的有效性. 然而, 方案 x_j 对于方案 x_k 的优势度计算依赖于变量 z_{jk} 的概率分布, 本文只假设其服从均匀分布. 可以预见, 其概率分布将在一定程度上影响方案优势关系的判断. 实际上, z_{jk} 的概率分布与不完全属性值、权重值的概率分布紧密相关, 对它们之间的依赖关系和变量 z_{jk} 不同概率分布对优势关系判定的影响尚有待继续研究.

参考文献(References)

- [1] 岳超源. 决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 192-244.
(Yue C Y. Decision theory and methods[M]. Beijing: Science Press, 2003: 192-244.)
- [2] Kim S H, Ahn B S. Group decision making procedure considering preference strength under incomplete information[J]. Computers & Operations Research, 1997, 24(12): 1101-1112.
- [3] Fishburn P C. Analysis of decisions with incomplete knowledge of probabilities[J]. Operations Research, 1965, 13(2): 217-237.
- [4] Hazen G B. Partial information, dominance, and potential optimality in multiattribute utility theory[J]. Operations Research, 1986, 34(2): 296-310.
- [5] Pearman A D. Establishing dominance in multiattribute decision making using an ordered metric method[J]. J of the Operational Research Society, 1993, 44(5): 461-469.
- [6] Ahn B S, Park K S. Comparing methods for multiattribute decision making with ordinal weights[J]. Computers & Operations Research, 2008, 35(5): 1660-1670.
- [7] Sarabando P, Dias L C. Multiattribute choice with ordinal information: A comparison of different decision rules[J]. Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Trans on, 2009, 39(3): 545-554.
- [8] Athanassopoulos A D, Podinovski V V. Dominance and potential optimality in multiple criteria decision analysis with imprecise information[J]. J of the Operational Research Society, 1997, 48(2): 142-150.
- [9] Fortes I, Mora-Lopez L, Morales R, et al. Inductive learning models with missing values[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 44(9/10): 790-806.
- [10] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European J of Operational Research, 2001, 129(1): 1-47.
- [11] 解瑶, 毛晓楠, 张蓓蓓. 属性权重信息不完全区间数多属性决策方法[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2007, 8(3): 87-90.
(Jie Y, Mao X N, Zhang B B. A new method for interval multiple attribute decision-making problem with incomplete attribute weights[J]. J of Air Force Engineering University: Natural Science Edited, 2007, 8(3): 87-90.)
- [12] 苏志欣, 王理, 夏国平. 区间数动态多属性决策的 VIKOR 扩展方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(6): 836-841.
(Su Z X, Wang L, Xia G P. Extended VIKOR method for dynamic multiattribute decision making with interval numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(6): 835-841.)
- [13] Moshkovich H M, Mechitov A I, Olson D L. Ordinal judgments in multiattribute decision analysis[J]. European J of Operational Research, 2002, 137(3): 625-641.
- [14] Lee K S, Park K S, Eum Y S, et al. Extended methods for identifying dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise information[J]. European J of Operational Research, 2001, 134(3): 557-563.
- [15] Park K S. Mathematical programming models for characterizing dominance and potential optimality when multicriteria alternative values and weights are simultaneously incomplete[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2004, 34(5): 601-614.
- [16] Mateos A, Jimenez A, Rios-Insua S. Solving dominance and potential optimality in imprecise multi-attribute additive problems[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2003, 79(2): 253-262.
- [17] Eum Y S, Park K S, Kim S H. Establishing dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise weight and value[J]. Computers & Operations Research, 2001, 28(5): 397-409.