第 28 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2013 年 3 月
Vol. 28 No. 3 Control and Decision Mar. 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 03-0476-05

一类非线性仿射系统的滑模降阶控制器设计

蒋 沅, 曾令武, 赵文龙

(南昌航空大学 信息工程学院，南昌 330063)

摘 要: 针对一类非线性仿射系统的控制器设计问题, 基于滑模变结构控制理论, 提出一种新的控制器设计方法: 滑模降阶方法. 首先反复运用变结构控制理论对一类 n 阶的仿射非线性系统构造 $n-1$ 个微分同胚变换函数和 $n-1$ 个滑动流形, 将初始系统降至一阶系统, 并给出了变结构控制律; 然后利用当前级与上一级控制输入的映射关系进行 $n-1$ 次反推运算, 即可得到初始系统的控制输入; 最后通过仿真算例表明了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 仿射非线性系统；滑模控制；滑模降阶；微分同胚变换；反推运算

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Sliding mode reduced order controller design of a class of nonlinear affine systems

JIANG Yuan, ZENG Ling-wu, ZHAO Wen-long

(School of Information Engineering，Nanchang Hangkong University，Nanchang 330063，China．Correspondent: JIANG Yuan，E-mail：jiangyuan9898@yahoo.com.cn)

Abstract: A new controller design scheme called the reduced order of sliding mode for a class of nonlinear affine systems is proposed based on sliding mode control theory. Firstly, the sliding mode control theory is used repeatly for a class of n order nonlinear affine systems. $n-1$ diffeomorphism transformation functions and $n-1$ sliding manifolds are constructed. And in this way the original system can be put down to one order, and the variable structure control law is given. Then, by using the mapping relation between the current and higher levels of control input, $n-1$ times backstepping operations are performed, and the original system control input can be achieved. Finally, the simulation example shows the effectiveness and feasibility of this design scheme.

Key words: nonlinear affine systems；sliding mode control；sliding mode reduced order；diffeomorphism transformation; backstepping operation

0 引 言

滑模变结构控制的整个滑模控制过程可分为两步 (这两步具有截然不同的模型结构): 1) 强迫轨线在有限的时间内到达某一设计好的滑动流形; 2) 在所有未来的时间使轨线保持在该流形上[1]. 基于这种控制思想设计一个滑动流形已成为滑模变结构控制的核心问题. 目前, 国内外在设计滑动流形时大都保留着两种传统形式, 即线性形式[2-4]和积分形式[5-6]. 文献 [7-8] 将观测器降阶方法与传统滑动流形设计方法相结合, 在一定程度上简化了高阶未精确建模系统的控制器设计.

本文所设计的滑动流形为一般形式, 而且可以是非线性的, 即 $s=\epsilon-R(\eta)=0$. 当运动限制在流形之上时, 服从 $\epsilon=R(\eta)$, 此时的主要问题是设计新的控制输入 $\epsilon=R(\eta)$, 使得降阶闭环系统镇定. 传统的解决镇定的方法包括线性化或反馈线性化、反步法、基于无源的控制等[1]. 然而, 线性化或反馈线性化需要满足相应秩和对合条件, 使其应用在很大程度上受到限制; 反步法则需假定存在某一正定、光滑的 Lyapunov 函数, 当然很多情况下这样的函数是存在的, 但众所周知目前还没有一种完全适用的方法来构造 Lyapunov 函数, 尤其当系统阶数较高时难度更大, Lyapunov 函数虽然存在, 但未必能找到; 基于无源的控制方法同样要求存在某一存储函数, 这个存储函数类似于

收稿日期: 2011-09-23；**修回日期:** 2012-03-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61164015)；航空科学基金项目(2011ZA56021)；江西省教育厅科技项目(GJJ12437); 南昌航空大学博士启动基金项目(EA201104184).

作者简介: 蒋沅(1982−), 男, 博士, 从事非线性系统控制理论与应用等研究；曾令武(1987−), 男, 硕士生, 从事非线性系统的分析和综合等研究.

Lyapunov 函数, 所以这种方法的应用同样受到限制.

本文探讨一类非线性系统的滑模降阶控制器设计问题, 在现有的滑模变结构控制理论的基础上, 提出一种新的控制器设计方法: 滑模降阶方法. 首先反复运用变结构控制理论对一类 n 阶的仿射非线性系统构造 $n-1$ 个微分同胚变换函数和 $n-1$ 个滑动流形, 将高阶初始系统降至一阶系统, 并设计了变结构控制律; 然后利用当前级与上一级控制输入的映射关系进行 $n-1$ 次反推运算, 从而得到初始系统的控制输入; 最后通过仿真算例表明了该方法的有效性和可行性. 值得一提的是, 采用本文方法能够实现系统模型降阶, 而且不损失系统任何信息.

1　滑模降阶理论

考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u+\mu). \tag{1}$$

其中: 状态 $x \in \boldsymbol{R}^n$; 控制输入 $u \in \boldsymbol{R}$; $f(x), g(x)$ 为向量场; μ 为外部扰动.

假设 1　存在微分同胚变换 $\phi(\cdot)$, 变换关系为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix} = \phi(\cdot),$$

$\varepsilon \in \boldsymbol{R}, \eta \in \boldsymbol{R}^{n-k}$, 且 $\phi(\cdot)$ 满足

$$\frac{\partial\phi(\cdot)}{\partial(\cdot)} g(\cdot) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(n-k)\times 1} \end{bmatrix},$$

k 表示第 k 次降阶.

假设 2　外部扰动 μ 有上界, 即 $0 \leqslant \mu \leqslant b$, 其中 b 为未知参数.

本文的控制目标是, 设计控制器 u 使得闭环系统渐近稳定的同时抑制外部扰动 μ 和消除抖振.

1.1　第 1 次降阶

1.1.1　坐标变换

根据假设 1, 作微分同胚变换 $\phi(x)$, 变换关系为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \phi(x),$$

$\varepsilon_1 \in \boldsymbol{R}, \eta_1 \in \boldsymbol{R}^{n-1}$, 且 $\phi(x)$ 满足

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(n-1)\times 1} \end{bmatrix}.$$

记 $\dfrac{\partial\phi(x)}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} f_b(\eta_1,\varepsilon_1) \\ f_a(\eta_1,\varepsilon_1) \end{bmatrix}$. 对 $\phi(x)$ 求导, 得

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\eta}_1 \end{bmatrix} = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x} g(x)(u+\mu) = \begin{bmatrix} f_b(\eta_1,\varepsilon_1) \\ f_a(\eta_1,\varepsilon_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(n-1)\times 1} \end{bmatrix}(u+\mu),$$

则变换后的系统为

$$\dot{\eta}_1 = f_a(\eta_1,\varepsilon_1), \tag{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = f_b(\eta_1,\varepsilon_1) + u + \mu. \tag{3}$$

1.1.2　设计滑动流形

定义变量

$$s_1 = \varepsilon_1 - R(\eta_1), \tag{4}$$

取 $s_1 = \varepsilon_1 - R(\eta_1) = 0$ 作为滑动流形. 当运动限制在流形之上时, 服从 $\varepsilon_1 = R(\eta_1)$. 代入式 (2), 可得到降阶系统模型

$$\dot{\eta}_1 = f_a(\eta_1, R(\eta_1)). \tag{5}$$

这里将 $\varepsilon_1 = R(\eta_1)$ 作为一个控制输入进行设计, 使系统 (5) 渐近稳定, 且满足 $R(0) = 0$.

1.1.3　接近态设计

对式 (4) 求导, 得

$$\dot{s}_1 = \dot{\varepsilon}_1 - \dot{R}(\eta_1) = f_b(\eta_1,\varepsilon_1) + u + \mu - \frac{\partial R(\eta_1)}{\partial\eta_1}\dot{\eta}_1. \tag{6}$$

设计控制输入

$$u = -f_b(\eta_1,\varepsilon_1) + \frac{\partial R(\eta_1)}{\partial\eta_1} f_a(\eta_1,\varepsilon_1) + \upsilon, \tag{7}$$

$$\upsilon = -h_1 s_1 - \hat{b}\,\mathrm{sign}(s_1), \tag{8}$$

$$\dot{\hat{b}} = r|s_1|. \tag{9}$$

其中: $h_1 > 0$, $\hat{b}$ 为 b 的估计值, r 为给定参数. 为了消除抖振, 用饱和函数 $\mathrm{sat}(s_1)$ 代替符号函数 $\mathrm{sign}(s_1)$, 其定义如下[9]:

$$\mathrm{sat}(s_1) = \begin{cases} 1, \ s_1 > \varDelta; \\ \beta s_1, \ |s_1| \leqslant \varDelta; \quad \beta = \dfrac{1}{\varDelta} \text{ 且 } \varDelta > 0. \\ -1, \ s_1 < -\varDelta; \end{cases}$$

1.1.4　稳定性分析

将式 (7) 和 (8) 代入 (6), 得

$$\dot{s}_1 = -h_1 s_1 - \hat{b}\,\mathrm{sat}(s_1) + \mu. \tag{10}$$

构造 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2r}(b-\hat{b})^2.$$

对 V_1 求导, 得

$$\dot{V}_1 = s_1\cdot\dot{s}_1 - \frac{1}{r}(b-\hat{b})\dot{\hat{b}} = -h_1 s_1^2 - s_1\hat{b}\,\mathrm{sat}(s_1) + s_1\mu - |s_1|(b-\hat{b}) \leqslant -h_1 s_1^2 - |s_1|\hat{b} + |s_1|b - |s_1|(b-\hat{b}) < 0.$$

因为 $V_1 > 0, \dot{V}_1 < 0$ 满足 Lyapunov 稳定性定理, 显然轨线向 $s_1 = 0$ 收敛.

1.2　第 2 次降阶

为求 $\varepsilon_1 = R(\eta_1)$ 使得闭环系统 (5) 渐近稳定, 对系统进行第 2 次降阶. 考虑系统 (2) 总能表示为

$$\dot{\eta}_1 = f_a(\eta_1,\varepsilon_1) = f(\eta_1) + g(\eta_1)\varepsilon_1. \tag{11}$$

1.2.1　坐标变换

根据假设 1, 作微分同胚变换 $\phi(\eta_1)$, 变换关系为

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_2\\ \eta_2\end{bmatrix}=\phi(\eta_1),$$

$\varepsilon_2\in\boldsymbol{R},\eta_2\in\boldsymbol{R}^{n-2}$, 且 $\phi(\eta_1)$ 满足

$$\frac{\partial\phi(\eta_1)}{\partial\eta_1}g(\eta_1)=\begin{bmatrix}1\\ 0_{(n-2)\times 1}\end{bmatrix}.$$

记 $\dfrac{\partial\phi(\eta_1)}{\partial\eta_1}f(\eta_1)=\begin{bmatrix}f_b(\eta_2,\varepsilon_2)\\ f_a(\eta_2,\varepsilon_2)\end{bmatrix}$. 对 $\phi(\eta_1)$ 求导, 得

$$\begin{bmatrix}\dot\varepsilon_2\\ \dot\eta_2\end{bmatrix}=\frac{\partial\phi(\eta_1)}{\partial\eta_1}\dot\eta_1=\begin{bmatrix}f_b(\eta_2,\varepsilon_2)\\ f_a(\eta_2,\varepsilon_2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0_{(n-2)\times 1}\end{bmatrix}\varepsilon_1,$$

则变换后的系统为

$$\dot\eta_2=f_a(\eta_2,\varepsilon_2),\tag{12}$$

$$\dot\varepsilon_2=f_b(\eta_2,\varepsilon_2)+\varepsilon_1.\tag{13}$$

1.2.2　设计滑动流形

定义变量

$$s_2=\varepsilon_2-R(\eta_2),\tag{14}$$

取 $s_2=\varepsilon_2-R(\eta_2)=0$ 作为滑动流形. 当运动限制在流形上时, 服从 $\varepsilon_2=R(\eta_2)$. 代入式 (12), 可得到降阶系统模型

$$\dot\eta_2=f_a(\eta_2,R(\eta_2)).\tag{15}$$

同理, $\varepsilon_2=R(\eta_2)$ 应作为一个控制输入进行设计, 使系统 (15) 渐近稳定, 且满足 $R(0)=0$.

1.2.3　接近态设计

对式 (14) 求导, 得

$$\dot s_2=\dot\varepsilon_2-\dot R(\eta_2)=f_b(\eta_2,\varepsilon_2)+\varepsilon_1-\frac{\partial R(\eta_2)}{\partial\eta_2}\dot\eta_2.\tag{16}$$

设计控制输入

$$\varepsilon_1=-f_b(\eta_2,\varepsilon_2)+\frac{\partial R(\eta_2)}{\partial\eta_2}f_a(\eta_2,\varepsilon_2)-h_2s_2,\tag{17}$$

其中 $h_2>0$. 将控制输入 (17) 代入 (16), 可以得到 $\dot s_2=-h_2s_2$, 则该系统是指数稳定的.

1.3　第 k 次降阶

为求 $\varepsilon_{k-1}=R(\eta_{k-1})$ 使得闭环系统

$$\dot\eta_{k-1}=f_a(\eta_{k-1},R(\eta_{k-1}))$$

渐近稳定, 对系统进行第 k 次降阶. 考虑到系统总能表示为

$$\begin{aligned}\dot\eta_{k-1}=f_a(\eta_{k-1},\varepsilon_{k-1})=\\ f(\eta_{k-1})+g(\eta_{k-1})\varepsilon_{k-1}.\end{aligned}\tag{18}$$

1.3.1　坐标变换

根据假设 1, 作微分同胚变换 $\phi(\eta_{k-1})$, 变换关系为

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_k\\ \eta_k\end{bmatrix}=\phi(\eta_{k-1}),$$

$\varepsilon_k\in\boldsymbol{R},\eta_k\in\boldsymbol{R}^{n-k}$, 且 $\phi(\eta_{k-1})$ 满足

$$\frac{\partial\phi(\eta_{k-1})}{\partial\eta_{k-1}}g(\eta_{k-1})=\begin{bmatrix}1\\ 0_{(n-k)\times 1}\end{bmatrix}.$$

记 $\dfrac{\partial\phi(\eta_{k-1})}{\partial\eta_{k-1}}f(\eta_{k-1})=\begin{bmatrix}f_b(\eta_k,\varepsilon_k)\\ f_a(\eta_k,\varepsilon_k)\end{bmatrix}$. 对 $\phi(\eta_k)$ 求导, 得

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot\varepsilon_k\\ \dot\eta_k\end{bmatrix}=\frac{\partial\phi(\eta_{k-1})}{\partial\eta_{k-1}}\dot\eta_{k-1}=\\ \begin{bmatrix}f_b(\eta_k,\varepsilon_k)\\ f_a(\eta_k,\varepsilon_k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0_{(n-k)\times 1}\end{bmatrix}\varepsilon_{k-1},\end{aligned}$$

则变换后的系统为

$$\dot\eta_k=f_a(\eta_k,\varepsilon_k),\tag{19}$$

$$\dot\varepsilon_k=f_b(\eta_k,\varepsilon_k)+\varepsilon_{k-1}.\tag{20}$$

1.3.2　设计滑动流形

定义变量

$$s_k=\varepsilon_k-R(\eta_k),\tag{21}$$

取 $s_k=\varepsilon_k-R(\eta_k)=0$ 作为滑动流形. 当运动限制在流形上时, 服从 $\varepsilon_k=R(\eta_k)$. 代入式 (19), 可得到降阶系统模型

$$\dot\eta_k=f_a(\eta_k,R(\eta_k)).\tag{22}$$

同理, $\varepsilon_k=R(\eta_k)$ 应作为一个控制输入进行设计, 使系统 (22) 渐近稳定, 且满足 $R(0)=0$.

1.3.3　接近态设计

对式 (21) 求导, 得

$$\begin{aligned}\dot s_k=\\ \dot\varepsilon_k-\dot R(\eta_k)=f_b(\eta_k,\varepsilon_k)+\varepsilon_{k-1}-\frac{\partial R(\eta_k)}{\partial\eta_k}\dot\eta_k.\end{aligned}\tag{23}$$

设计控制输入

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k-1}=\\ -f_b(\eta_k,\varepsilon_k)+\frac{\partial R(\eta_k)}{\partial\eta_k}f_a(\eta_k,\varepsilon_k)-h_ks_k,\end{aligned}\tag{24}$$

其中 $h_k>0$. 将控制输入 (24) 代入 (23), 可以得到 $\dot s_k=-h_ks_k$, 则该系统是指数稳定的.

1.4　滑模降阶控制器设计分析

当 $k=n-1$ 时, 即系统已进行了 $n-1$ 次降阶, 则

$$\dot\eta_{n-1}=f_a(\eta_{n-1},\varepsilon_{n-1}).\tag{25}$$

其中: $\varepsilon_{n-1}\in\boldsymbol{R},\eta_{n-1}\in\boldsymbol{R}$. 由于系统 (25) 是一阶系统, 容易得到控制输入 $\varepsilon_{n-1}=R(\eta_{n-1})$, 使得闭环系统 $\dot\eta_{n-1}=f_a(\eta_{n-1},R(\eta_{n-1}))$ 渐近稳定, 从而容易得到当 $k=n-2$ 时二阶系统的控制输入

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n-2}=\\ -f_b(\eta_{n-1},\varepsilon_{n-1})+\frac{\partial R(\eta_{n-1})}{\partial\eta_{n-1}}f_a(\eta_{n-1},\varepsilon_{n-1})-\\ h_{n-1}s_{n-1},\end{aligned}$$

其中 $h_{n-1} > 0$. 以此类推, 可以求得 $n-1$ 阶系统的控制输入 $\varepsilon_1 = R(\eta_1)$, 则初始系统的控制输入 u 可以由式 (7) ~ (9) 得到. 综上, 可以得出以下结论.

定理 1　对于满足假设 1 和假设 2 的系统 (1), 利用本文的滑模降阶理论所得到的非线性控制输入 (7) ~ (9) 可以确保闭环系统所有信号全局有界, 而且可以完全抑制外部干扰信号输入和消除抖振, 使闭环系统状态变量渐近稳定.

2　仿真算例

下面给出一个例子来说明采用本文方法设计的控制器的控制性能. 考虑如下非线性系统:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2x_1^2 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \mu). \tag{26}$$

其中: u 为控制输入, μ 为外部扰动. 由式 (26) 可得

$$f(x) = [2x_1^2 + x_2 \quad x_3 \quad x_1 - x_3]^{\mathrm{T}},$$

$$g(x) = [0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}.$$

该系统为三阶系统, 因此只需进行 2 次降阶便可以得到一阶系统.

第 1 次降阶. 取微分同胚变换

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \phi(x) = [x_2 \quad x_1 \quad x_3]^{\mathrm{T}}. \tag{27}$$

其中: $\varepsilon_1 \in R, \eta_1 \in R^2$. 可得

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = [1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

则假设 1 成立, 从而

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} f_b(\eta_1, \varepsilon_1) \\ f_a(\eta_1, \varepsilon_1) \end{bmatrix} =$$

$$[x_3 \quad x_2 + 2x_1^2 \quad x_1 - x_3]^{\mathrm{T}}.$$

由式 (2) 和 (3) 可得到变换后的系统为

$$\dot{\eta}_1 = f_a(\eta_1, \varepsilon_1) = \begin{bmatrix} x_2 + 2x_1^2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = f_b(\eta_1, \varepsilon_1) + u + \mu = x_3 + u + \mu. \tag{29}$$

第 2 次降阶. 系统 (28) 可写为

$$\dot{\eta}_1 = f_a(\eta_1, \varepsilon_1) = f(\eta_1) + g(\eta_1)\varepsilon_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 2\eta_{11}^2 \\ \eta_{11} - \eta_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_1. \tag{30}$$

其中: $x_2 = \varepsilon_1, x_1 = \eta_{11}, x_3 = \eta_{12}$. 取微分同胚变换

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \phi(\eta_1) = [\eta_{11} \quad \eta_{12}]^{\mathrm{T}}. \tag{31}$$

其中: $\varepsilon_2 \in \boldsymbol{R}, \eta_2 \in \boldsymbol{R}$. 可得

$$\frac{\partial \phi(\eta_1)}{\partial \eta_1} g(\eta_1) = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

则假设 1 成立, 从而

$$\frac{\partial \varphi(\eta_1)}{\partial \eta_1} f(\eta_1) = \begin{bmatrix} f_b(\eta_2, \varepsilon_2) \\ f_a(\eta_2, \varepsilon_2) \end{bmatrix} = [2\eta_{11}^2 \quad \eta_{11} - \eta_{12}]^{\mathrm{T}}.$$

由式 (12) 和 (13) 可得到变换后的系统为

$$\dot{\eta}_2 = f_a(\eta_2, \varepsilon_2) = \eta_{11} - \eta_{12}, \tag{32}$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = f_b(\eta_2, \varepsilon_2) + \varepsilon_1 = 2\eta_{11}^2 + \varepsilon_1, \tag{33}$$

其中 $\varepsilon_1 = R(\eta_1)$ 作为一个控制输入进行设计.

为求控制输入 $\varepsilon_2 = R(\eta_2)$ 使得一阶闭环系统 $\dot{\eta}_2 = f_a(\eta_2, R(\eta_2))$ 渐近稳定, 系统 (32) 可写为

$$\dot{\eta}_{21} = -\eta_{21} + \varepsilon_2. \tag{34}$$

其中: $\eta_{21} = \eta_{12}, \eta_{11} = \varepsilon_2$. 取 $\varepsilon_2 = -p\eta_{21}, p + 1 > 0$, 则系统 (34) 闭环指数稳定, 从而 $R(\eta_2) = -p\eta_{21}$. 取 $p = h_2 = 1$, 则由式 (17) 可得

$$\varepsilon_1 = -2\eta_{11}^2 - 2\eta_{11}. \tag{35}$$

通过将式 (35) 代入系统 (30) 可知此闭环系统指数稳定, 从而 $R(\eta_1) = -2\eta_{11}^2 - 2\eta_{11}$. 取 $h_1 = 1$, 则由式 (7) ~ (9) 可得到初始系统的控制输入为

$$\begin{aligned} u = &-2x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_1x_2 - 6x_1^2 - 8x_1^3 - \\ &- \hat{b}\,\mathrm{sat}(2x_1 + 2x_1^2 + x_2), \\ \dot{\hat{b}} = &\ r|2x_1 + 2x_1^2 + x_2|. \end{aligned} \tag{36}$$

在数值仿真中, 令初始条件为

$$\eta_{20} = [1],\ \eta_{10} = [1 \quad 1],\ x_0 = [1 \quad 1 \quad 1],$$

$$r = 0.01,\ \Delta = 0.01,$$

外部扰动为 $\mu = \sin t$. 仿真结果如图 1 ~ 图 5 所示, 显然闭环系统具有良好的稳态性能. 由图 4 可以看到, 外部扰动已被完全抑制; 由图 5 可以看出, 控制输入抖振已被完全消除.

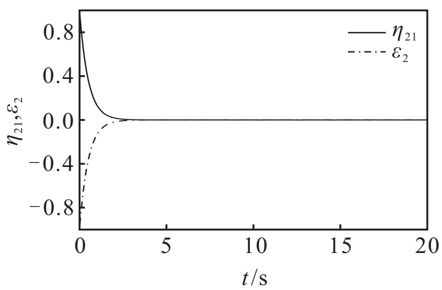

图 1　初始系统降至一阶系统时状态 η_{21} 和控制输入 ε_2

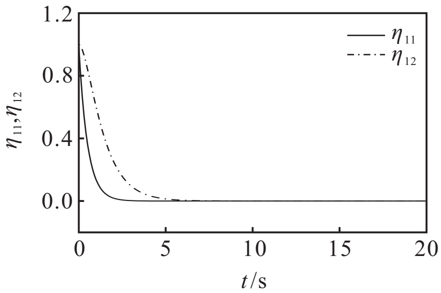

图 2　初始系统降至二阶系统时系统状态 η_{11} 和 η_{12} 的响应曲线

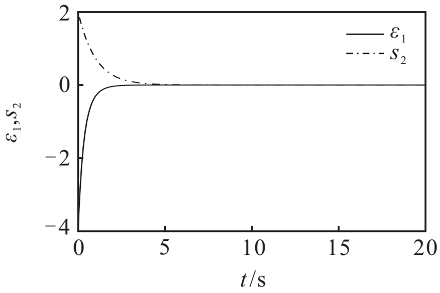

图 3 初始系统降至二阶系统时控制输入 ε_1 和滑动流形 s_2 的响应曲线

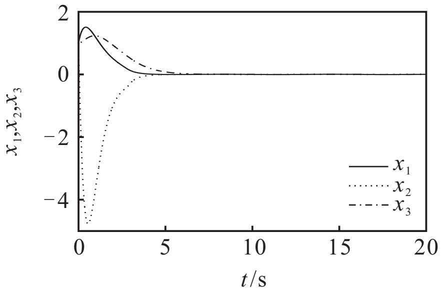

图 4 初始系统状态 x_1, x_2 和 x_3 的响应曲线

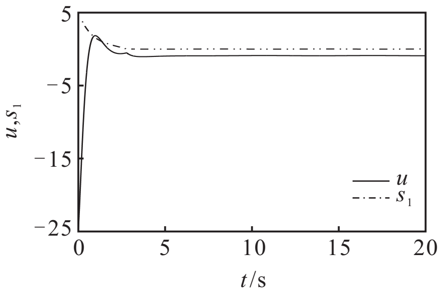

图 5 初始系统的控制输入 u 和滑动流形 s_1 的响应曲线

3 结 论

本文基于滑模控制理论对一类非线性仿射系统提出了一种滑模降阶控制器设计方法. 如果存在合适的微分同胚变换, 则可以利用本文提出的滑模降阶方法对一个复杂非线性系统进行降阶处理, 并通过仿真结果验证了所提出控制器设计方法的有效性. 与其他降阶方法相比, 本文方法具有如下优点:

1) 将一个复杂的高阶系统降阶成低阶系统加以处理, 使问题简化;

2) 与传统的降阶方法相比, 本方法不损失系统任何信息;

3) 滑动流形的设计具有一般性, 适用范围广.

参考文献(References)

[1] 李殿璞. 非线性控制系统[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2009: 287-289.
(Li D P. Nonlinear control system[M]. Xi'an: Northwestem Polytechnical University Press, 2009: 287-289.)

[2] Edwards C. A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix in equalities[J]. Automatica, 2004, 40(10): 1761-1769.

[3] Xia Y Q, Jia Y M. Robust sliding-mode control for uncertain time-delay systems: A LMI approach[C]. Proc of American Control Conf. Anchorage, Alaska, 2002: 53-58.

[4] 米阳, 李文林, 井元伟, 等. 线性多变量离散系统全程滑模变结构控制[J]. 控制与决策, 2003, 18(4): 460-463.
(Mi Y, Li W L, Jing Y W, et al. Global sliding mode control for uncertain discrete time systems[J]. Control and decision, 2003, 18(4): 460-463.)

[5] Lin F J, Chou W D. An induction motor servo drive using sliding-mode controller with genetic algorithm[J]. Electric Power Systems Research, 2003, 64(2): 93-108.

[6] Niu Y G, Ho D W C, Lam J. Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-vary delay[J]. Automatica, 2005, 41(5): 873-880.

[7] Yan X G, Spurgeon S K, Edwards C. Sliding mode control for time-varying delayed systems based on a reduced-order observer[J]. Automatica, 2010, 46(8): 1350-1362.

[8] Yan X G, Spurgeon S K, Edwards C. Decentralised sliding mode control for nonminimum phase interconnected systems based on a reduced-order compensator[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1821-1828.

[9] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 319-324.
(Liu J K. Matlab simulation for sliding mode control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 319-324.)