

文章编号: 1001-0920(2013)02-0285-04

基于模型的网络化控制系统量化反馈镇定

刘伟^a, 汪志鸣^{a,b}, 倪明康^a

(华东师范大学 a. 数学系, b. 应用数学与多学科交叉中心, 上海 200241)

摘要: 研究一类线性不确定网络化系统信息受限情况下的模型控制问题. 在被控系统和模型系统通过带宽受限网络相连的情况下给出了有效的量化方法, 使得量化值能够在量化器的容许范围之内, 并给出了系统在一定条件下渐近稳定的充分条件. 最后的仿真算例表明了所提出方法的可行性.

关键词: 网络控制系统; 稳定性; 不确定系统; 量化反馈

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Quantized feedback stabilization of model-based networked control systems

LIU Wei^a, WANG Zhi-ming^{a,b}, NI Ming-kang^a

(a. Department of Mathematics, b. Center for Applied and Multidisciplinary Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China. Correspondent: WANG Zhi-ming, E-mail: zmwang@math.ecnu.edu.cn)

Abstract: This paper studies the model-based control problem for a class of linear uncertain networked systems with limited information. The uncertain controlled plant and its minimized system as a model plant are connected via a communication network with limited bandwidth. In this case, an effective quantization algorithm is presented such that quantization value can be measured adequately. A sufficient condition for a globally asymptotical stabilization under some certain conditions is obtained. Finally, a simulation example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: networked control system; stability; uncertain system; quantized feedback

0 引言

近年来, 随着计算机技术、网络通信技术的迅猛发展以及控制系统规模的日益扩大, 网络化控制系统的研究已进入一个快速发展阶段, 并取得了许多成果. 然而, 网络的引入也带来了一些负面影响, 其中较受关注的是由网络带宽限制引起的信息传输时延和数据包丢失等一系列的问题^[1-3]. 针对这种情况, 文献[4]提出了模型控制的方法, 证明了该方法不仅在减少信息传输对带宽的限制方面效果显著, 而且对系统的稳定具有很好的鲁棒性^[5-6]. 同时, 这种方法对结构更为复杂的奇异摄动系统也是适用的^[7].

Montestruque^[4]和 Wang 等^[6-7]假定信息通过网络能够进行精确传输. 然而, 由于系统和控制器的能力或安全限制, 以及网络自身的缺陷, 要做到这一点是不可能的. 众所周知, 任何通信网络都是信道受限的, 在这种情况下, 信号通过网络时必须进行采样和量化.

显然, 量化会引起量化误差的存在, 并且这种误差可能会导致系统性能的恶化, 因此有必要研究量化误差对系统性能的影响, 其中如何设计合理有效的量化方法是问题的关键. 近年来, 关于这方面的研究已引起许多学者的广泛关注^[8-12]. 考虑到模型控制方法能有效地降低带宽的限制以及系统仍具有很好的鲁棒性等优点, 本文研究一类基于模型的网络化控制系统的量化反馈镇定问题, 并给出了有效的量化方法, 使得系统在一定的条件下能够达到渐近稳定.

1 问题描述

考虑如下不确定受控系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 为系统的状态, $u \in R^r$ 为控制输入. 模型系统为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \quad (2)$$

收稿日期: 2011-10-08; 修回日期: 2012-05-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11171113, 11071075); 上海市自然科学基金项目(11ZR1402100).

作者简介: 刘伟(1984—), 男, 博士生, 从事网络化控制等研究; 汪志鸣(1953—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络化控制、非线性系统等研究.

其中 $\hat{x} \in R^n$ 为模型系统的状态. 控制器为

$$u = K\hat{x},$$

其中 K 为控制增益矩阵. 定义状态误差 $e = \hat{x} - x$. 记 $\Delta A = A - \hat{A}, \Delta B = B - \hat{B}$.

本文假定固定采样, 即采样周期 $h = t_k - t_{k-1} > 0 (k \in N^+)$ 为常数, 其中 t_k 为系统采样时刻, 则由系统 (1) 和系统 (2) 构成的闭环系统可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ -(\Delta A + \Delta BK) & \hat{A} - \Delta BK \end{bmatrix}.$$

定理 1^[4] 在无量化情况下, 闭环系统 (3) 关于原点 $z = (x, e)^T = (0, 0)^T$ 为全局指数稳定, 当且仅当矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{A\mu h} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的特征值严格位于单位圆内.

注 1 由 Laplace 变换可知, 矩阵 Q 的非零特征值与 $M = e^{(\hat{A} + \hat{B}K)h} + \Delta(h)$ 的特征值相同, 其中

$$\Delta(h) = \int_0^h e^{A(h-\tau)} (\Delta A + \Delta BK) e^{(\hat{A} + \hat{B}K)\tau} d\tau.$$

若将 $\Delta(h)$ 看成对 M 的第 1 项的扰动, 则当 $e^{(\hat{A} + \hat{B}K)h}$ 的特征值严格位于单位圆内时, 可通过调整 $h, \Delta A$ 和 ΔB 来减少 $\Delta(h)$ 对 $e^{(\hat{A} + \hat{B}K)h}$ 的影响, 从而使 M 的特征值仍位于单位圆内.

上述结果是在带宽不受限的条件下给出的. 然而实际网络带宽是受限的, 因此需要设计一个有效的量化器, 使得闭环系统 (3) 在量化误差存在的情况下仍为全局渐近稳定.

下面给出量化器的设计.

量化函数 $q: R^n \rightarrow D$ 是分段常值向量函数, 其中 D 是 R^n 中的有限子集. 具体讲, 存在常数 $W > \Delta > 0$, 满足如下条件:

- 1) 如果 $\|x\| \leq W$, 则 $\|q(x) - x\| \leq \Delta$;
- 2) 如果 $\|x\| > W$, 则 $\|q(x)\| > W - \Delta$.

注 2 条件 1) 给出了量化函数未饱和情况下量化误差的界; 条件 2) 给出了检测量化函数饱和的方法. 本文假定在原点的某个领域内 $q(x) = 0$.

根据上述量化器的定义, 本文采用如下形式的量化器:

$$q_\mu(x) = \mu q\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

其中: $\mu > 0$ 为调焦参数, 量化范围 $W\mu$ 和量化误差 $\Delta\mu$ 将随着 μ 的增大或减小而发生相应改变. 同时, μ 在采样时刻 t_k 处进行更新.

量化器的调焦规则定义为

$$\mu_{k+1} = \begin{cases} T_{out}\mu_k, & T_k = T_{out}; \\ T_{in}\mu_k, & T_k = T_{in}, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

$$u = \begin{cases} 0, & T_k = T_{out}; \\ K\hat{x}, & T_k = T_{in}. \end{cases} \quad (5)$$

$$T_k = \begin{cases} T_{out}, & \|q_{\mu_k}(x(t_k))\| > l_{out}\mu_k; \\ T_{in}, & \|q_{\mu_k}(x(t_k))\| < l_{in}\mu_k; \\ T_{k-1}, & \|q_{\mu_k}(x(t_k))\| \in [l_{in}\mu_k, l_{out}\mu_k]. \end{cases} \quad (6)$$

其中: $l_{out} > l_{in} > 0, T_{out}$ 和 T_{in} 为待定的常数. 根据调焦规则, T_k 仅取 T_{out} 和 T_{in} 两个值, 它们分别表示量化器在采样时刻达到饱和和非饱和状态.

注 3 本文给出的量化器是动态的, 量化范围 $W\mu_k$ 的变化完全由调焦参数 μ_k 确定, 而 μ_k 的更新规则是由 T_k 确定的. 如果量化器处于饱和状态, 则 $T_k = T_{out}$ 只有在 $\|q_{\mu_k}(x(t_k))\| < l_{in}\mu_k$ 时才能转化为 $T_k = T_{in}$, 如果量化器处于非饱和状态, 则 $T_k = T_{in}$ 只有在量化器饱和时才转化为 $T_k = T_{out}$, 并有 $u = 0$. 另外, 由于系统初始条件的不确定性, 量化器将会根据初始条件的选取而交替处于饱和和非饱和状态.

2 主要结果

考虑系统误差所满足的方程

$$\dot{e} = Ae - (\Delta A + \Delta BK)\hat{x}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

其解为

$$e(t) = e^{A(t-t_k)}e(t_k) - \Delta(t-t_k)\hat{x}(t_k) = (e^{A(t-t_k)} - \Delta(t-t_k))e(t_k) - \Delta(t-t_k)x(t_k),$$

其中

$$\Delta(t-t_k) = \int_0^{t-t_k} e^{A(t-t_k-\tau)} (\Delta A + \Delta BK) e^{(\hat{A} + \hat{B}K)\tau} d\tau.$$

考虑到量化的存在, 此时系统误差 $e(t)$ 在更新时刻不再为 0. 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 系统解的表达式为

$$x(t) = \hat{x}(t) - e(t) = (e^{(\hat{A} + \hat{B}K)(t-t_k)} + \Delta(t-t_k))x(t_k) + (e^{(\hat{A} + \hat{B}K)(t-t_k)} - e^{A(t-t_k)} + \Delta(t-t_k))e(t_k).$$

由 Laplace 变换, 可得

$$e^{(\hat{A} + \hat{B}K)(t-t_k)} - e^{A(t-t_k)} + \Delta(t-t_k) = \int_0^{t-t_k} e^{A(t-t_k-\tau)} BK e^{(\hat{A} + \hat{B}K)\tau} d\tau,$$

因此系统的解可写成

$$x(t) = (e^{(\hat{A} + \hat{B}K)(t-t_k)} + \Delta(t-t_k))x(t_k) + \left(\int_0^{t-t_k} e^{A(t-t_k-\tau)} BK e^{(\hat{A} + \hat{B}K)\tau} d\tau \right) e(t_k),$$

从而

$$x(t_{k+1}) = (e^{(\hat{A}+\hat{B}K)h} + \Delta(h))x(t_k) + \left(\int_0^h e^{A(h-\tau)}BK e^{(\hat{A}+\hat{B}K)\tau} d\tau \right) e(t_k),$$

其中 $h > 0$ 为采样周期. 记

$$M = e^{(\hat{A}+\hat{B}K)h} + \Delta(h),$$

$$N = \int_0^h e^{A(h-\tau)}BK e^{(\hat{A}+\hat{B}K)\tau} d\tau,$$

则

$$x(t_{k+1}) = Mx(t_k) + N(\hat{x}(t_k) - x(t_k)).$$

由于此时量化的影响, 模型系统在更新时刻所接收的状态不再是原系统的状态, 而是原系统量化后的状态. 因此

$$x(t_{k+1}) = Mx(t_k) + N(q_{\mu_k}(x(t_k)) - x(t_k)). \quad (7)$$

定义变量 $\xi_k = x(t_k)/\mu_k$. 注意到系统开环与闭环状态之间的转换是由变量 ξ_k 决定的, 因此将式 (7) 写成关于变量 ξ_k 的形式将更有助于理解系统的动力学行为.

当量化器处于非饱和阶段时, 系统方程可写成

$$\xi_{k+1} = \frac{1}{T_{in}} M \xi_k + \frac{1}{T_{in}} N v_k, \quad (8)$$

其中 $v_k = q(\xi_k) - \xi_k$.

当量化器处于饱和阶段时, 由于 $u = 0$, 系统可以写成

$$x(t_{k+1}) = e^{Ah}x(t_k) =: \Phi x(t_k), \quad (9)$$

因此

$$\xi_{k+1} = \frac{1}{T_{out}} \Phi \xi_k.$$

由此可得到如下引理.

引理 1 假定网络化控制系统 (3) 在无量化情况下指数稳定, 则存在常数 T_{in} , L_1 , λ_1 和 r_1 , 使得闭环阶段系统的解在更新时刻满足如下不等式:

$$\|\xi_k\| \leq L_1 e^{-\lambda_1 k} \|\xi_0\| + r_1 \|v\|, \quad \forall k \geq 0,$$

其中

$$\|v\| = \max\{\|q(\xi_0) - \xi_0\|, \dots, \|q(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1}\|\}.$$

证明 因为系统 (3) 无量化时指数稳定, 由定理 1 可知 M 的特征值严格位于单位圆内, 因此存在 $T_{in}^* \in (0, 1)$, 使得对于任意给定的 $T_{in} \in (T_{in}^*, 1)$, $\frac{1}{T_{in}}M$ 的特征值仍位于单位圆内, 而且存在常数 $d_1 > 1$ 和 $\sigma_1 \in (0, 1)$ 满足如下不等式:

$$\left\| \left(\frac{1}{T_{in}} M \right)^k \right\| \leq d_1 \sigma_1^k.$$

根据 $\xi_{k+1} = \frac{1}{T_{in}} M \xi_k + \frac{1}{T_{in}} N v_k$, 由递推法可知

$$\xi_k = \left(\frac{1}{T_{in}} M \right)^k \xi_0 + \frac{1}{T_{in}} \left(\frac{1}{T_{in}} M \right)^{k-1} N v_0 + \dots + \frac{1}{T_{in}} N v_{k-1},$$

所以

$$\|\xi_k\| \leq \left\| \left(\frac{1}{T_{in}} M \right)^k \right\| \|\xi_0\| + \frac{1}{T_{in}} \|N\| \|v\| \left(\left\| \left(\frac{1}{T_{in}} M \right)^{k-1} \right\| + \dots + 1 \right) \leq d_1 \sigma_1^k \|\xi_0\| + \frac{1}{T_{in}} \|N\| \|v\| \frac{d_1}{1 - \sigma_1}.$$

令 $d_1 = L_1$, $\ln \sigma_1 = -\lambda_1$, $r_1 = \frac{1}{T_{in}} \|N\| \frac{d_1}{1 - \sigma_1}$, 则有

$$\|\xi_k\| \leq L_1 e^{-\lambda_1 k} \|\xi_0\| + r_1 \|v\|, \quad \forall k \geq 0. \quad \square$$

引理 2 假定引理 1 成立, T_{in} , L_1 和 r_1 取自引理 1, 如果 W 和 Δ 满足不等式 $W > (2 + r_1 + 2L_1)\Delta$, 则存在 $\Delta_W > 0$, 使得 $\Delta_W - 2\Delta > 0$, 并且当 $\|\xi_0\| \leq \Delta_W$, $\|v\| \leq \Delta$ 时, 有

$$\|q_{\mu_k}(x(t_k))\| \leq (W - \Delta)\mu_k, \quad \|\xi_k\| \leq W.$$

证明 因为 $W > (2 + r_1 + 2L_1)\Delta$, 所以存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $W = (2 + r_1 + L_1(2 + \varepsilon))\Delta$ 成立. 令

$$\Delta_W = (2 + \varepsilon)\Delta,$$

则有 $\Delta_W - 2\Delta > 0$, 且

$$\|\xi_k\| \leq L_1 e^{-\lambda_1 k} \|\xi_0\| + r_1 \|v\| \leq$$

$$L_1 \Delta_W + r_1 \Delta = (r_1 + L_1(2 + \varepsilon))\Delta = W - 2\Delta,$$

从而 $\|q_{\mu_k}(x(t_k))\| \leq (W - \Delta)\mu_k$. \square

定理 2 对于某个给定的 $h > 0$, 假定系统 (3) 无量化情况下指数稳定. 选取 T_{in} 和 T_{out} 使得 $\frac{1}{T_{in}}M$ 为 Schur 矩阵, $T_{out} > \max\{\|\Phi\|, 1\}$, W 与 Δ 相比足够大, 使得上述引理成立, 并且能获得相应的 W, Δ 和 Δ_W . 令 $l_{out} = W - \Delta$, $l_{in} = \Delta_W - \Delta$, 则 μ_k 有界, 并且系统 (3) 经量化后仍指数稳定.

证明 下面分 3 种情况展开讨论.

第 1 种情况: 当初始条件足够小时, 系统始终处于闭环阶段.

第 2 种情况: 当初始条件使得量化器达到饱和时, 即系统开始时处于开环阶段, 则通过控制规则使系统转化成第 1 种情况.

第 3 种情况: 当系统开始时处于闭环阶段, 经过有限时间之后进入开环阶段, 从而转化为第 2 种情况进行讨论.

对于第 1 种情况, 若初始条件 x_0 满足

$$\left\| \frac{x(t_0)}{\mu_0} \right\| < l_{in} - \Delta,$$

则 $\|q_{\mu_0}(x(t_0))\| < l_{in}\mu_0$. 于是, 系统在 $[t_0, t_1)$ 处于闭环状态, 由调焦规则和引理 2 可知, 系统将始终处于闭环状态. 由

$$x(t_{k+1}) = Mx(t_k) + N\mu_k \left(q\left(\frac{x(t_k)}{\mu_k}\right) - \frac{x(t_k)}{\mu_k} \right),$$

$$\mu_{k+1} = T_{in}\mu_k,$$

和引理 1 可得

$$\|\xi_k\| \leq L_1 e^{-\lambda_1 k} \|\xi_0\| + r_1 \Delta, \mu_k = T_{in}^k \mu_0,$$

从而有

$$\|x(t_k)\| \leq L_1 T_{in}^k e^{-\lambda_1 k} \|x(t_0)\| + T_{in}^k r_1 \Delta \mu_0,$$

因此, 存在 $\bar{K}, \bar{\lambda} > 0$ (不妨假设 $\bar{K} > 1$) 使得

$$\|x(t_k)\| \leq \bar{K} e^{-\bar{\lambda} k} \sqrt{\|x(t_0)\|^2 + \mu_0^2}.$$

对于第 2 种情况, 若系统在初始时刻处于开环状态, 则由 $x(t_{k+1}) = \Phi x(t_k)$, 可得 $\|\xi_k\| \leq \left\| \frac{\Phi}{T_{out}} \right\|^k \|\xi_0\|$.

对于任意 $\mu_0 > 0$, 若存在 $k^* > 0$, 使得 $\left\| \frac{x_{k^*}}{\mu_{k^*}} \right\| < l_{in} - \Delta$, 则在 $[k^*, k^* + 1)$ 上系统处于闭环状态. 由引理 1 和引理 2 可知, 系统在未来时刻将一直处于闭环状态, 所以当 $k \geq k^*$ 时, 有

$$\|x_k\| \leq \bar{K} e^{-\bar{\lambda}(k-k^*)} \sqrt{\|x_{k^*}\|^2 + \mu_{k^*}^2},$$

$$\mu_k = T_{in}^{k-k^*} \mu_{k^*}.$$

在 $[0, k^*]$ 上, 由 $x(t_{k+1}) = \Phi x(t_k)$ 和 $\mu_k \leq T_{out}^{k^*} \mu_0$, 可得

$$\|x_k\| \leq \bar{K} e^{-\bar{\lambda}(k-k^*)} \sqrt{(\|\Phi\|^{k^*} \|x_0\|)^2 + (T_{out}^{k^*} \mu_0)^2},$$

且对于任意的 $k \geq 0, \mu_k \leq \mu_{k^*}$ 都成立.

对于第 3 种情况, 如果系统在有限时间段内由初始时刻的非饱和状态跳回到饱和状态, 则可先转化为第 2 种情况, 然后再转化为第 1 种情况进行讨论, 从而整个系统仍指数稳定.

综上所述, 对于任意的 x_0 , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 网络化控制系统 (3) 经量化后仍然全局指数趋于零. \square

3 仿真例子

考虑如下不确定系统:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.1 + b_1 \\ 0.2 + b_2 \end{bmatrix} u.$$

其中: $a_{11} \in [-0.01, 0.01], a_{21} \in [-0.3, 0.3], b_1 \in [-0.02, 0.02], b_2 \in [-0.01, 0.01]$. 模型系统为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} u,$$

反馈增益为 $K = \left[-\frac{10}{3}, -\frac{25}{3} \right]$. 为简便之, 选取 $a_{11} = 0.01, a_{21} = 0.2, b_1 = 0.01, b_2 = -0.01$.

定义量化函数

$$q(x_i) = \begin{cases} W, & x_i \geq W + \frac{1}{2}\Delta; \\ -W, & x_i \leq -W - \frac{1}{2}\Delta; \\ \Delta \left\lfloor \frac{x}{\Delta} + \frac{1}{2} \right\rfloor, & x_i \in \left(-W - \frac{1}{2}\Delta, W + \frac{1}{2}\Delta \right). \end{cases}$$

其中: $i = 1, 2; \lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

具有调焦变量的量化函数可写成

$$q_\mu(x) = \mu q(x/\mu).$$

若选取 $W = 80, \Delta = 1/2, \mu_0 = 1, T_{in} = 0.8$, 初始条件 $x_0 = [2, -4]^T$, 则定理 2 中的所有条件均满足. 在上述定义的量化控制方式下, 图 1~图 3 显示系统为指数式衰减, 从而验证了定理 2 的有效性.

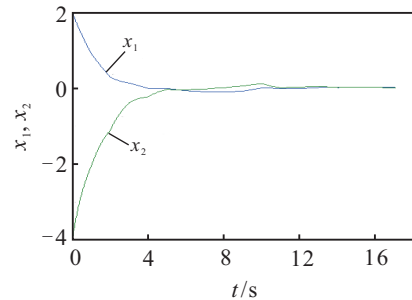


图 1 受控系统的动力学行为

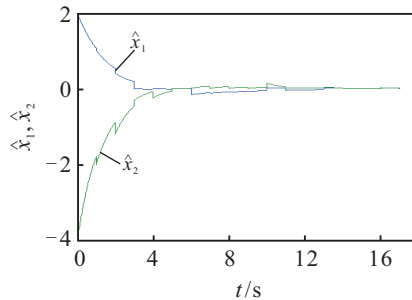


图 2 模型系统的动力学行为

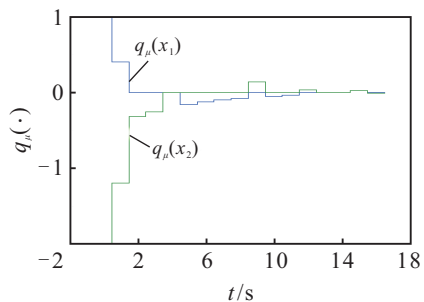


图 3 量化器的动力学行为

4 结 论

本文针对一类基于模型的网络化控制系统的量化反馈镇定问题, 在信息受限的情况下给出了有效的动态量化方法, 使得系统在量化误差存在的情况下达到全局指数稳定. 数值仿真算例验证了本文方法的有效性. 然而, 对于非线性系统的网络化控制系统相应的量化问题尚需进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Baillifull J, Antsaklis P J. Control and communication challenges in networked real-time systems[J]. Proc IEEE, 2007, 95(1): 9-28.
- [2] Nair G N, Fagnani F, Zampieri S, et al. Feedback control under data rate constraints: An overview[J]. Proc IEEE, 2007, 95(1): 108-136.