第 28 卷 第 2 期
Vol. 28 No. 2

控 制 与 决 策
Control and Decision

2013 年 2 月
Feb. 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 02-0183-05

状态饱和线性离散系统的 H_∞ 控制

朱湘临, 嵇小辅

(江苏大学 电气信息工程学院，江苏 镇江 212013)

摘 要: 研究一类具有状态饱和约束的离散线性系统的 H_∞ 控制问题. 通过引入一个无穷范数小于等于 1 的自由变量, 将状态饱和约束下的离散线性系统状态变量约束在一个凸多面体内. 在此基础上, 给出了状态饱和离散线性系统的有界实引理, 并研究了状态反馈控制律设计算法. 所给出的结论表示为双线性矩阵不等式, 可通过所提出的迭代线性矩阵不等式算法求解. 最后通过数值例子验证了所提出算法的正确性和有效性.

关键词: 离散线性系统；H_∞ 控制；状态饱和；迭代线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

H_∞ synthesis for discrete linear systems with state saturation

ZHU Xiang-lin, JI Xiao-fu

(School of Electrical and Information Engineering，Jiangsu University，Zhenjiang 212013，China．Correspondent：JI Xiao-fu，E-mail：xfji@msn.com)

Abstract：This paper studies the H_∞ synthesis for discrete linear systems with state saturation nonlinearity. By introducing a free matrix whose infinity normis less than or equal to 1, the state under saturation constraint is confined in a convex hull. Based on this, a bounded real lemma for discrete linear systems with state saturation is obtained in terms of matrix inequalities which can be solved by using the presented iterative linear matrix inequality algorithm. The synthesis problem is also solved and an explicit expression for the desired state feedback control law is given. A numerical example shows the effectiveness and correctness of the presented method.

Key words：discrete linear system；H_∞ control；state saturation；iterative linear matrix inequality

0 引 言

状态饱和离散线性系统在有位置和速度约束的机械系统, 有限精度的计算机存储设备和人工神经网络等工业对象中经常出现, 该类系统的稳定性分析与反馈控制律设计已成为控制界研究的热点问题之一[1]. 如果在设计过程中忽略饱和因素的影响, 则所设计的控制律不能保证闭环系统的稳定性.

文献 [2] 给出了状态饱和离散线性系统渐近稳定的充分条件. 作为特例, 文献 [3] 给出了状态饱和二阶离散线性系统的稳定性判据, 并进一步推广到 n 阶系统[4]. 通过设计特殊形式的 Lyapunov 矩阵 P, 文献 [5] 给出了保守性较小的稳定性判据. 通过计算饱和约束下状态变量与不饱和情形下状态变量的偏差, 并引入适当的矩阵进行估计, 文献 [6-7] 给出了保守性更小稳定性判据, 并得到进一步推广[8-10].

本文讨论一类状态饱和离散线性系统的 H_∞ 控制问题. 通过引入无穷范数小于等于 1 的自由矩阵, 将状态饱和约束下的离散线性系统状态变量约束在一个凸多面体内, 设计 Lyapunov 函数, 给出了状态饱和离散线性系统的有界实引理, 并在此基础上给出了状态反馈控制律的设计算法. 所给出的稳定性判据和反馈控制律都表示为双线性矩阵不等式, 可通过所提出的迭代线性矩阵不等式算法求解. 理论分析表明, 所给出的方法具有更小的保守性. 数值仿真亦验证了所提出方法的有效性.

1 问题描述

考虑如下的状态饱和离散线性系统:

收稿日期: 2011-10-03；**修回日期:** 2012-04-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60904011)；江苏省自然科学基金项目(BK2011465)；教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20093227120010)；江苏高校优势学科建设工程项目(苏政办发[2011]6号)；国家“十二五”863计划项目(2011A09070301).

作者简介: 朱湘临(1963−), 男, 副研究员, 从事鲁棒控制、生物反应过程优化控制等研究；嵇小辅(1979−), 男, 副教授, 从事鲁棒控制、约束控制等研究.

$$x(k+1)=h(Ax(k)+Bu(k)+B_\omega\omega(k)),$$
$$z(k)=Cx(k)+Du(k)+D_\omega\omega(k). \quad (1)$$

其中: $x(k)\in\boldsymbol{D}^n:=\{x(k)\in\boldsymbol{R}^n:-1\leqslant x_i(k)\leqslant 1, i=$ $i=1,2,\cdots,n\}$ 是状态向量; $u(k)\in\boldsymbol{R}^m$ 是控制输入向量; $\omega(k)\in\boldsymbol{R}^p$ 是扰动输入向量; $z(k)\in\boldsymbol{R}^q$ 是被调输出向量; $A,B,B_\omega,C,D,D_\omega$ 是适当维数的常数矩阵. 系统 (1) 的饱和函数 $h(Ax(k)+\xi(k))$ 定义为

$$h(Ax(k)+\xi(k))=\begin{bmatrix}h_1(A_1x(k)+\xi_1(k))\\h_2(A_2x(k)+\xi_2(k))\\\vdots\\h_n(A_nx(k)+\xi_n(k))\end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中: A_i 是矩阵 A 的第 i 行所构成的行向量, 即 $A_i=[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \cdots\ \ a_{in}]$; $\xi(k)=Bu(k)+B_\omega\omega(k)$, $\xi_i(k)$ 是列向量 $\xi(k)$ 的 i 个元素.

对于任意的 $i\in[1,n]$, 有

$$h_i(v_i)=\begin{cases}-1,\ v_i<-1;\\ v_i,\ -1\leqslant v_i\leqslant 1;\\ 1,\ v_i>1.\end{cases} \quad (3)$$

其中 $v_i=A_ix(k)+\xi_i(k)$.

系统 (1) 的 H_∞ 性能定义为

$$J(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)).$$

对于状态饱和离散线性系统 (1), 给定 H_∞ 性能指标 $\gamma>0$. 本文讨论如何设计状态反馈控制律 $u(k)=Kx(k)$, $K\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$, 使得闭环系统在 $\omega(k)=0$ 时是渐近稳定的. 同时, 在零初始条件和有限能量扰动信号 $\omega(k)$ 输入下满足 $J(\omega)<0$.

2 有界实引理

对于一组给定向量 $u^1,u^2,\cdots,u^{\mathcal I}$, 定义其凸集为

$$\mathrm{co}\{u^i,i\in[1,\mathcal I]\}:=\Big\{\sum_{i=1}^{\mathcal I}\alpha_iu^i:\sum_{i=1}^{\mathcal I}\alpha_i=1,\alpha_i\geqslant 0\Big\}.$$

引理 1[1] 定义 $u,u^1,u^2,\cdots,u^{\mathcal I}\in\boldsymbol{R}^{m_1}$; $v,v^1,v^2,\cdots,v^{\mathcal J}\in\boldsymbol{R}^{m_2}$. 如果 $u\in\mathrm{co}\{u^i,i\in[1,\mathcal I]\}$, $v\in\mathrm{co}\{v^j,j\in[1,\mathcal J]\}$, 则

$$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\in\mathrm{co}\Big\{\begin{bmatrix}u^i\\v^j\end{bmatrix}:i\in[1,\mathcal I],j\in[1,\mathcal J]\Big\}. \quad (4)$$

定义 $\mathcal D_n$ 为 $n\times n$ 阶的对角元素为 1 或 0 的对角矩阵的集合, 显然 $\mathcal D_n$ 中有 2^n 个元素, 分别定义为 D_i. 定义 $D_i^-=I-D_i$, 显然如果 $D_i\in\mathcal D^n$, 则 $D_i^-\in\mathcal D_n$.

引理 2 令矩阵 $G=[g_{ij}]\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足 $\|G\|_\infty\leqslant 1$, 则

$$h(Ax(k)+\xi(k))\in$$
$$\mathrm{co}\{D_i(Ax(k)+\xi(k))+D_i^-Gx(k)\},\ i\in[1,2^n]. \quad (5)$$

证明 注意到 $\|G\|_\infty\leqslant 1$ 和 $|x_i|\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$, 有 $|G_ix|\leqslant\sum_{j=1}^n|g_{ij}x_j|\leqslant\sum_{j=1}^n|g_{ij}|\leqslant\|G\|_\infty\leqslant 1$ 成立, 因此 $-1\leqslant G_ix\leqslant 1$. 如果系统 (1) 的状态没有饱和, 有 $h_i(A_ix+\xi_i)=A_ix+\xi_i$ 成立, 则显然 $h_i(A_ix+\xi_i)\in\mathrm{co}\{A_ix+\xi_i,G_ix\}$ 成立, 即 $h_i(A_ix+\xi_i)=\alpha(A_ix+\xi_i)+(1-\alpha)G_ix$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. 如果系统 (1) 的状态发生饱和, 则当 $A_ix+\xi_i>1$ 时有 $h_i(A_ix+\xi_i)=1$, 或者当 $A_ix+\xi_i<-1$ 时有 $h_i(A_ix+\xi_i)=-1$. 如果 $A_ix+\xi_i>1$, 则由于 $A_ix+\xi_i<1$, 显然有 $h_i(A_ix+\xi_i)=1\in\mathrm{co}\{A_ix+\xi_i,G_ix\}$ 成立. 同理, 当 $A_ix+\xi_i<-1$ 时, 因为 $G_ix\geqslant -1$, 所以 $h_i(A_ix+\xi_i)=-1\in\mathrm{co}\{A_ix+\xi_i,G_ix\}$ 成立. □

在该引理基础上, 可以给出如下有界实引理.

定理 1 给定标量 $\gamma>0$, 状态饱和离散线性系统 (1) 在 $u(k)=0$ 时是渐近稳定的, 且具有 H_∞ 性能 γ, 如果存在对称正定矩阵 P 和满足 $\|G\|_\infty\leqslant 1$ 的矩阵 G, 使得

$$\begin{bmatrix}-P&0&(D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}P&C^{\mathrm T}\\ *&-\gamma^2I&B_\omega^{\mathrm T}D_iP&D_\omega^{\mathrm T}\\ *&*&-P&0\\ *&*&*&-I\end{bmatrix}<0,$$
$$i\in[1,2^n]. \quad (6)$$

证明 在引理 2 中, 令 $\xi(k)=B_\omega\omega(k)$, 则有

$$h(Ax(k)+B_\omega\omega(k))\in$$
$$\mathrm{co}\{D_i(Ax(k)+B_\omega\omega(k))+D_i^-Gx(k)\},$$
$$i\in[1,2^n]. \quad (7)$$

定义 Lyapunov 函数 $V(x(k))=x^{\mathrm T}(k)Px(k)$, 其中 P 为对称正定矩阵. 注意到函数 $V(\eta)=\eta^{\mathrm T}P\eta$ 对于变量 η 是凸函数[11], 有下式成立:

$$h^{\mathrm T}(Ax(k)+B_\omega\omega(k))Ph(Ax(k)+B_\omega\omega(k))\leqslant$$
$$\max_{i\in[1,2^n]}[D_i(Ax(k)+B_\omega\omega(k))+$$
$$D_i^-Gx(k)]^{\mathrm T}P[D_i(Ax(k)+B_\omega\omega(k))+D_i^-Gx(k)]. \quad (8)$$

这时有

$$\Delta V(x(k))+z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)=$$
$$h^{\mathrm T}(Ax(k)+B_\omega\omega(k))Ph(Ax(k)+B_\omega\omega(k))-$$
$$x^{\mathrm T}(k)Px(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)+$$
$$[Cx(k)+D_\omega\omega(k)]^{\mathrm T}[Cx(k)+D_\omega\omega(k)]\leqslant$$
$$\max_{i\in[1,2^n]}[D_i(Ax(k)+B_\omega\omega(k))+$$
$$D_i^-Gx(k)]^{\mathrm T}P[D_i(Ax(k)+B_\omega\omega(k))+D_i^-Gx(k)]+$$
$$[Cx(k)+D_\omega\omega(k)]^{\mathrm T}[Cx(k)+D_\omega\omega(k)]+$$
$$x^{\mathrm T}(k)Px(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)=$$
$$\max_{i\in[1,2^n]}\begin{bmatrix}x(k)\\\omega(k)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\Xi_{11}&\Xi_{12}\\ *&\Xi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\\omega(k)\end{bmatrix} \quad (9)$$

成立. 其中

$$\Xi_{11}=(D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}P(D_iA+D_i^-G)+C^{\mathrm T}C-P,$$
$$\Xi_{12}=C^{\mathrm T}D_\omega+(D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}PD_iB_\omega,$$
$$\Xi_{22}=-\gamma^2I+D_\omega^{\mathrm T}D_\omega+B_\omega^{\mathrm T}D_iPD_iB_\omega.$$

根据Schur补引理, 由不等式(6)可以得到

$$\Delta V(x(k))+z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)<0.$$

注意到 $V(x(0))=0$, $V(x(\infty))\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}&J(\omega)=\\&\sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k))\leqslant\\&\sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k))+\\&V(x(\infty))-V(x(0))=\\&\sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)+\Delta V(x(k)))<0.\end{aligned}\tag{10}$$

同时, 由式(6)可知

$$(D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}P(D_iA+D_i^-G)-P<0,\quad i\in[1,2^n],\tag{11}$$

即系统(1)在 $\omega(k)=0$ 和 $u(k)=0$ 时是稳定的. □

显然, 由定理1可以得到状态饱和离散线性系统(1)的稳定性条件如下.

推论 1　状态饱和线性离散系统 $x(k)=h(Ax(k))$ 是渐近稳定的, 如果存在对称正定矩阵 P 和满足 $\|G\|_\infty\leqslant 1$ 的矩阵 G, 使得

$$\begin{bmatrix}-P & (D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}P\\ * & -P\end{bmatrix}<0,\ i\in[1,2^n].\tag{12}$$

注 1　文献[12]首次引入一个对角占优且对角元素为负数的矩阵来研究状态饱和连续线性系统的稳定性问题, 但是由于离散系统与连续系统饱和特性数学描述的不同, 这种对角占优且对角元素为负的矩阵并不适用于离散系统. 为此, 定理1引入满足 $\|G\|_\infty\leqslant 1$ 的矩阵 G 将状态饱和约束下的离散系统状态限制于一个顶点与系统状态矩阵相关的凸多面体内, 并运用凸多面体不确定性系统鲁棒控制的相关理论来解决该问题.

注 2　文献[13]指出, 系统(1)在 $u(k)=0$ 时, $\omega(k)=0$ 是稳定的, 如果存在对称正定矩阵 P, 矩阵 $C=[c_{ij}]_{n\times n}$ 满足 $c_{ii}=\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{j=n}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$, $i\in[1,n]$, $c_{ij}=\alpha_{ij}-\beta_{ij}$, $i,j\in[1,n]$, $i\neq j$, $\alpha_{ij}>0$, $\beta_{ij}>0$, $i,j\in[1,n]$, $i\neq j$, 使得 $C+C^{\mathrm T}-H>0$ 和如下不等式成立:

$$A^{\mathrm T}C(C+C^{\mathrm T}-H)^{-1}C^{\mathrm T}A-H<0.\tag{13}$$

对于任意的矩阵 X 和对称正定矩阵 Y, 不等式 $(X-Y)Y^{-1}(X-Y)^{\mathrm T}>0$ 成立. 将该不等式展开, 得 $XY^{-1}X^{\mathrm T}\geqslant X+X^{\mathrm T}-Y$, 从而有 $C(C+C^{\mathrm T}-H)^{-1}C^{\mathrm T}\geqslant H\geqslant D_iHD_i$; 因此, 如果不等式(13)成立, 则不等式(12)一定存在解 $P=H$ 和 $G=0$, 即定理1与文献[13]相比, 具有更小的保守性.

注 3　文献[10]指出, 系统(1)是稳定的, 如果存在对称正定矩阵 H, 正定对角矩阵 $\hat D=\mathrm{diag}(\hat d_1,\hat d_2,\cdots,\hat d_m)>0$, $\hat d_i>0$, $i\in[1,m]$, 使得

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm T}HA-H & A^{\mathrm T}(HB-B\hat D)\\(B^{\mathrm T}H-\hat DB^{\mathrm T})A & B^{\mathrm T}HB-\hat D\end{bmatrix}<0.\tag{14}$$

其中: $k_i=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ 满足 $k_i>1$, $i\in[1,m]$, $k_i\leqslant 1$, $i\in[m+1,n]$, $1\leqslant m\leqslant n$, $B=[I_m\ \ 0]^{\mathrm T}\in\boldsymbol R^{n\times m}$. 利用Schur补引理, 同时注意到

$$\begin{aligned}&A^{\mathrm T}HA-A+A^{\mathrm T}H(HB-B\hat D)(B^{\mathrm T}HB-\\&D)^{-1}(B^{\mathrm T}H-\hat DB^{\mathrm T})\geqslant A^{\mathrm T}HA-H\geqslant\\&A^{\mathrm T}D_iHD_iA-H.\end{aligned}$$

如果不等式(14)成立, 则不等式(12)一定存在解 $P=H$, $G=0$, 因此定理1与文献[10]的结论相比, 具有更小的保守性.

定理1具有较低的保守性, 但是不等式(6)为双线性矩阵不等式, 常规的线性矩阵不等式算法无法使用. 为了利用成熟的线性矩阵不等式算法, 下面给出一种不等式(6)的迭代线性矩阵不等式算法. 首先给出约束 $\|G\|_\infty\leqslant 1$ 的线性矩阵不等式表示.

定义 $\mathcal V$ 是只有一个元素为1, 其他元素为0的 n 维行向量的集合. 集合 $\mathcal V$ 中有 n 个元素, 记其第 i 个元素为 v_i, 该向量的第 i 个分量为1, 其他分量为0. 定义 $\mathcal Y$ 是元素为1或−1的 n 维列向量的集合. 集合 $\mathcal Y$ 中有 2^n 个元素, 其第 j 个元素表示为 y_j. 这样, 满足约束 $\|G\|_\infty\leqslant 1$ 的 $G\in\boldsymbol R^{n\times n}$ 可以等价地表示为

$$v_iGy_j\leqslant 1,\ i\in[1,n],\ j\in[1,2^n].$$

算法 1　状态饱和离散线性系统(1)有界实引理的迭代线性矩阵不等式算法.

Step 1: 选择 $Q>0$, 求解以下的Lyapunov方程:

$$A^{\mathrm T}PA-P=-Q.$$

令 $\alpha>0$ 为充分大的标量.

Step 2: 利用上一步求取的矩阵 P 求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\inf_G\ \beta.$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}-P & 0 & (D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}P & C^{\mathrm T}\\ * & -\gamma^2I & B_\omega^{\mathrm T}D_iP & D_\omega^{\mathrm T}\\ * & * & -P & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<\beta I,$$

$$i\in[1,2^n];$$

$$v_iGy_j\leqslant 1,\ i\in[1,n],\ j\in[1,2^n].$$

如果 $\beta<0$ 或 $\beta>\alpha$, 则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 4; 否则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 3.

Step 3: 利用上一步求取的 G, 求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\inf_{P}\ \beta.$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}-P & 0 & (D_iA+D_i^-G)^{\mathrm T}P & C^{\mathrm T}\\ * & -\gamma^2 I & B_\omega^{\mathrm T}D_iP & D_\omega^{\mathrm T}\\ * & * & -P & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<\beta I,$$

$$i\in[1,2^n].$$

如果 $\beta<0$ 或 $\beta>\alpha$, 则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 4; 否则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 2.

Step 4: 如果 $\alpha<0$, 则系统 (1) 在 $u(k)=0$ 时是渐近稳定的, 且具有 H_∞ 性能 γ, 否则该算法失败. 选取不同的 $Q>0$, 从 Step 1 重新迭代.

3 状态反馈控制律设计

以下定理给出了系统 (1) 状态反馈可镇定且闭环系统具有 H_∞ 性能 γ 的充分条件.

定理 2 给定标量 $\gamma>0$, 状态饱和离散线性系统 (1) 是状态反馈可镇定的, 且闭环系统具有 H_∞ 性能 γ, 如果存在对称正定矩阵 P, 矩阵 G 满足 $\|G\|_\infty\leqslant 1$, 矩阵 K, 使得

$$\begin{bmatrix}-P & 0 & \varXi_{13} & (C+DK)^{\mathrm T}\\ * & -\gamma^2 I & B_\omega^{\mathrm T}D_iP & D_\omega^{\mathrm T}\\ * & * & -P & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<0,$$

$$i\in[1,2^n]. \tag{15}$$

这时, 状态反馈控制律为

$$u(k)=Kx(k),$$

其中 $\varXi_{13}=(D_i(A+BK)+D_i^-G)^{\mathrm T}P$.

证明 设计状态反馈控制律为 $u(k)=Kx(k)$, 并注意到定理 1 结论, 定理 2 显然成立. □

算法 2 状态饱和离散线性系统 (1) 的状态反馈 H_∞ 控制律设计算法.

Step 1: 选择 $Q>0$, 求解以下的 Lyapunov 方程:

$$(A+BK)^{\mathrm T}P(A+BK)-P=-Q,$$

其中 K 是使得矩阵 $A+BK$ 是 Schur 稳定的矩阵. 令 $\alpha>0$ 为充分大的标量.

Step 2: 利用上一步求取的矩阵 P 求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\inf_{G,K}\ \beta.$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}-P & 0 & \varXi & (C+DK)^{\mathrm T}\\ * & -\gamma^2 I & B_\omega^{\mathrm T}D_iP & D_\omega^{\mathrm T}\\ * & * & -P & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<\beta I,$$

$$i\in[1,2^n];$$

$$v_iGy_j\leqslant 1,\ i\in[1,n],\ j\in[1,2^n].$$

如果 $\beta<0$ 或 $\beta>\alpha$, 则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 4; 否则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 3.

Step 3: 利用上一步求取的矩阵 K, 求解以下的线性矩阵不等式优化问题:

$$\inf_{P}\ \beta.$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}-P & 0 & \varXi & (C+DK)^{\mathrm T}\\ * & -\gamma^2 I & B_\omega^{\mathrm T}D_iP & D_\omega^{\mathrm T}\\ * & * & -P & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<\beta I,$$

$$i\in[1,2^n].$$

如果 $\beta<0$ 或 $\beta>\alpha$, 则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 4; 否则令 $\alpha=\beta$, 转 Step 2.

Step 4: 如果 $\alpha<0$, 则状态饱和离散线性系统 (1) 是状态反馈可镇定的, 且闭环系统具有 H_∞ 性能 γ, 这时状态反馈控制律为 $u(k)=Kx(k)$, 否则该算法失败. 选取不同的 $Q>0$, 从 Step 1 重新迭代.

4 数值算例

考虑状态饱和离散线性系统 (1), 其中参数为

$$A=\begin{bmatrix}1.4 & -2.5 & 1.5\\ 2.7 & 0.9 & -2.4\\ 3.1 & -2.5 & 1.2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ B_\omega=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$C=[1\ \ 1\ \ 1],\ D=[0.5\ \ 0.4],\ D_\omega=0.7.$$

给定 $\gamma=1$, 利用算法 2 可以求得状态反馈控制律为

$$u(k)=\begin{bmatrix}1.6630 & 2.3945 & 0.6761\\ -4.6510 & -5.4869 & -3.2924\end{bmatrix}x(k).$$

所得到的闭环系统对于图 1 所示的干扰输入 $\omega(k)$, 被调输出 $z(k)$ 如图 2 所示. 这时

$$\frac{\sum z^{\mathrm T}(k)z(k)}{\sum \omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)}=0.8.$$

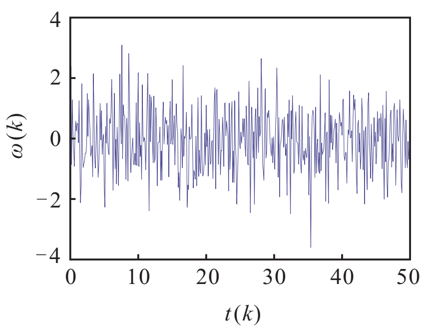

图 1 系统干扰输入 $\omega(k)$

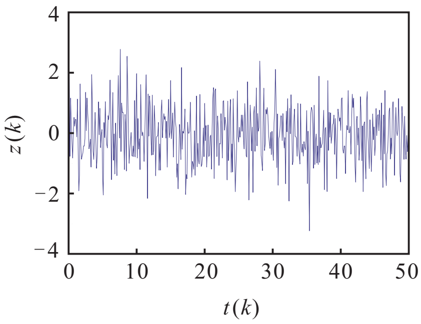

图 2 系统被调输出 $z(k)$

5 结　论

对于一类具有状态饱和非线性约束的离散线性系统, 本文通过引入无穷范数小于等于 1 的自由变量, 基于 Lyapunov 定理, 给出了状态饱和离散线性系统的有界实引理, 并给出了基于迭代线性矩阵不等式的状态反馈控制律设计算法. 数值例子验证了所提出算法的正确性和有效性.

参考文献(References)

[1] Hu T, Lin Z. Control systems with actuator saturation: Analysis and design[M]. Boston: Birkhäuser Press, 2001: 1-10.

[2] Singh V. A new realizability condition for limit cycle-free sate-space digital filters employing saturation arithmetic[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1985, 32(10): 1070-1071.

[3] Ritzerfeld J H F. A criterion for the overflow stability of structure using saturation[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1989, 36(8): 1049-1057.

[4] Liu D, Michel A N. Asymptotic stability of discrete-time systems with saturation nonlinearities with application to digital filters[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1992, 39(10): 789-807.

[5] Liu D, Michel A N. Dynamical systems with saturation nonlinearities: Analysis and design[M]. Boston: Birkhäuser Press, 2001: 10-15.

[6] Kar H, Singh V. Stability analysis of discrete-time systems in a state-space realisation with partial state saturation nonlinearities[J]. IET Control Theory and Applications, 2003, 150(3): 205-208.

[7] Singh V. Stability analysis of discrete-time systems in a state-space realisation with state saturation nonlinearities: Linear matrix inequality approach[J]. IET on Control Theory and Applications, 2005, 152(1): 9-12.

[8] Singh V. Modified form of Liu-Michel’s criterion for global asymptotic stability of fixed-point state-space digital filters using saturation arithmetic[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2006, 53(2): 1423-1425.

[9] Singh V. Stability analysis of a class of digital filters utilizing single saturation nonlinearity[J]. Automatica, 2008, 44(1): 282-285.

[10] Singh V. Modified criterion for global asymptotic stability of fixed-point state-space digital filters using two’s complement arithmetic[J]. Automatica, 2010, 46(2): 475-478.

[11] Su H, Ji X, Chu J. New results of robust quadratically stabilizing control for uncertain linear time-delay systems[J]. Int J of Systems Science, 2005, 36(1): 27-37.

[12] Fang H, Lin Z. Stability analysis for linear systems under state constraints[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 950-955.

[13] Kandanvli V, Kar H. Robust stability of discrete-time state-delayed systems with saturation nonlinearities: Linear matrix inequality approach[J]. Signal Processing, 2008, 89(2): 161-173.

(上接第182页)

[9] Zhaohong Deng, Fu-lai Chung, Shitong Wang. FRSDE: Fast reduced set density estimator using minimal enclosing ball approximation[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(4): 1363-1372.

[10] Smola A J, Scholkopf B. Sparse greedy matrix approximation for machine learning[C]. Proc of the 17th Int Conf on Machine Learning. San Francisco: Morgan Kaufman, 2000: 911-918.

[11] Fang S-H, Lin T-N. Indoor location system based on discriminant-adaptive neural network in IEEE 802.11 environments[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2008, 19(11): 1973-1978.

[12] Yang Q, Pan S J, Zheng V W. Estimating location using Wi-Fi[J]. Intelligent Systems, IEEE, 2008, 23(1): 8-13.

[13] Pan S J, Kwok J T, Yang Q. Transfer learning viadimensionality reduction[C]. Proc of the 23rd Assoc for the Advancement of Artificial Intelligence(AAAI) Conf Artificial Intelligence. Chicago, 2008: 677-682.

[14] Sinno Jialin Pan, Ivor W Tsang, James T Kwok, et al. Domain adaptation via transfer component analysis[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2011, 22(2): 199-210.

[15] Osuna E, Freund R, Giroal F. Training support vector machines: An application to face diction[C]. Proc of IEEE Conf on Computer Vision and Pattern Recognition. San Juan, 1997: 130-136.