文章编号:1001-0920(2013)03-0471-05

蒸馏稀释感知:适应性采样下的稀疏检测与估计

邢昌风1, 邢思锐1,2

(1. 海军工程大学 电子工程学院, 武汉 430033; 2. 华中科技大学 电子与信息工程系, 武汉 430074)

摘 要: 针对稀疏信号采样问题, 提出一种改进的适应性采样方法, 通过对原始信号的多次观测逐渐筛选出有用信号, 从而提高观测的准确度. 该方法增加了一个找回误判分量的机制, 弥补了原始方法无法抑制漏检率的缺点. 实验结果表明, 所提出的方法有效地降低了判决器的漏检率, 同时保持相同的计算复杂度, 且在中等及较小信噪比条件下性能更优.

关键词:适应性采样;检测与估计;蒸馏感知 中图分类号:TP391 文献标志码: A

Distilled-diluted sensing: Adaptive sampling for sparse detection and estimation

XING Chang-feng¹, XING Si-rui^{1,2}

(1. Electronics Engineering College, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China; 2. Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China. Correspondent: XING Chang-feng, E-mail: xingchf@sohu.com)

Abstract: For the sparse signal sampling problem, an improved adaptive sampling method is proposed. The proposed method offsets the drawback of distilled sensing of high non-detection rate. The simulation results show that the proposed method effectively decreases the estimator's non-detection rate with commensurate complexity, and show great performance in the middle and relatively low SNR condition.

Key words: adaptive sampling; detection and estimation; distilled sensing

0 引 言

有效地检测并定位稀疏信号中的非零分量可用 于军事目标探测、医疗诊断等领域,因此长期以来被 学术界广为研究.近年来文献[1]提出了宽场红外探 索计划(WISE),其传感器灵敏度具有上百倍性能提 升,使得探索外星系较暗的小行星成为可能.该探测 器计划寿命为10个月,包括6个月的初次全宇宙扫描 和3个月的辅助全宇宙扫描,之后冷冻剂耗尽.这种 探测器的缺点在于扫描周期长,寿命较短.为了提高 扫描效率,可在这类探测器内应用适应性采样.探测 器成像精度与观测时间成正比,观测时间越长,系统 开销越大.适应性采样将减小每次观测的时间,再通 过多次观测来弥补精度损失.在总体开销相同的情况 下,适应性采样能够获得更大的信噪比,因而能够检 测更弱的信号. 稀疏检测与定位问题可具体描述如下: 令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in R^p$ 为稀疏向量,其绝大多数的分量 等于零,且非零分量的位置随机分布. 假设观测会引 入高斯加性白噪声,现在的目的是通过对观测信息的 处理,区分出零分量和非零分量,即完成检测与定位. 检测是指确定信号的非零分量,定位是指估计出信号 中非零分量的具体位置.

对于给定的非适应观测信号,一种常见的检测定 位方法是采用定幅值阈值检测.当信号分量的幅值 超过给定的阈值时,将该分量判定为非零分量;若幅 值落在阈值以下,则判定为零分量.这种硬性阈值判 决方法出现在许多文献中^[2-3].最近,文献[4]提出了 一种更为灵活的连续适应性观测过程,称为蒸馏感 知(DS).蒸馏感知先用一部分观测开销粗略地观测所 有分量,剔除一部分最不可能是非零分量的分量;然 后按上述方式迭代若干次,每次观测的分量仅为上一

收稿日期: 2011-10-27; 修回日期: 2012-02-13.

基金项目:国家自然科学基金重点项目(61074012);国防预研基金项目(9140A04030210JB11).

作者简介:邢昌风(1957–),男,教授,博士生导师,从事指挥控制系统的研究;邢思锐(1988–),男,博士生,从事无线通信与电子工程的研究.

次剔除后剩余的部分; 多次观测剔除绝大部分零分量 后进行阈值检测. 多次观测能有效地分配观测资源, 并被应用于许多科学计算与工程实践中, 例如在与基 因相关的研究中, 常见到两级采样方法^[5]和多级采样 方法^[6]. 在目标检测中, 通过测量雷达回波信号的幅 值来判定是否检测到目标. 多数系统对全局进行等能 量扫描, 而多级扫描方法可将能量集中在目标存在的 局部区域. 在统计学习中, 适应性采样利用前一次的 观测信息选择当前的采样位置, 例如文献 [7] 研究了 非参数函数回归问题.

虽然蒸馏感知普遍适用于稀疏信号检测与定位, 但蒸馏感知过于关注稀疏性而忽视了信号其他内在 特性的研究.研究信号相关性将为稀疏检测与定位问 题提供一个解决问题的新角度,这正是被蒸馏感知以 及多数假设检测算法忽略的.

本文在蒸馏感知的基础上,提出一种能够找回被 漏检的非零分量的方法.该方法在蒸馏过程结束后将 可能的漏检分量放回初始的目录集合,让这些分量再 次等待蒸馏,本文将这个放回过程称为稀释过程,改 进的方法被命名为蒸馏稀释感知(DDS).

1 相关工作

为了描述不同阈值检测方案的性能,引入误检率(FDR)和漏检率(NDR),并作如下定义.

定义1 令集合 $S := \{i : x_i \neq 0\}$ 表示信号非零 分量集合; $\hat{S} = \hat{S}(y)$ 是根据观测值 y 对 S 的估计, 表 示判决后的信号非零分量集合. 令误检率

$$FDR(\widehat{S}) := |\widehat{S} \setminus S| / |\widehat{S}|.$$
(1)

误检率就是错误地被认为是非零分量的个数与 所有被认为是非零分量个数的比值.漏检率

$$NDR(\widehat{S}) := |S \setminus \widehat{S}| / |S|.$$
(2)

漏检率即是未被检测的非零分量个数与实际的非零分量个数的比值,其中 |· |表示个数.

与非适应性采样相比,适应性采样的最大不同在 于对样本进行多次观测,每次观测所分配的资源不等. 由于观测将引入噪声,导致分配资源多的一次观测误 差将会小于分配资源少的观测误差,即前者的观测精 度相比后者要高.

蒸馏感知是由Haupt^[4,8]提出的一种适应性观测 方法. 假设能够多次观测,依次获得一组带噪声的观 测数据,每次观测模型如下:

$$y_{i,j} = x_i + \gamma_{i,j}^{-1/2} w_{i,j},$$

$$i = 1, 2, \cdots, p, \ j = 1, 2, \cdots, k.$$
 (3)

其中: k 为总共存在观测的次数, 当前观测次数用 j 表示; i 表示信号的各个分量, 该信号共有 p 个分量组成;

 $w_{i,j} \sim \mathcal{N}(0,1)$ 表示零均值的单位高斯随机变量. 该 模型的优势在于可以动态调整观测的精度 $\gamma_{i,j}$,根据 先前的观测信息适应性地修改 $\gamma_{i,j}$ 的大小,具有更高 的灵活性与自由度.

多次观测在具有灵活性的同时需要观测更多的 分量个数,在带来性能提升的同时也增大了观测资源 开销.为了能与非适应性观测方法相比较,适应性方 法的总观测开销必须受限. 令 *R*(*p*)为随着问题规模 增长的函数,精度参数 {*γ*_{i,i}} 需要满足

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \gamma_{i,j} \leqslant R(p).$$

$$\tag{4}$$

当适应性模型被限定 $R(p) = p \pm k > 1$,即在适应性 模型与非适应性模型总观测精度开销相等时,通过检 测与定位效果能够相互比较适应性和非适应性模型.

定理 1(蒸馏感知理论) 假设 $x \ge 0$ 具有 $p^{(1-\beta)}$ 个非零分量,其中 $\beta \in (0,1)$,每个非零分量的幅值为 $\mu(p)$. 蒸馏感知的观测次数

 $k = k(p) = \max\{ \lceil \log_2 \log p \rceil, 0 \} + 2.$ 按照下式规则将观测资源 p 分配给 R_j :

$$\sum_{j=1}^{k} R_{j} \leq p, \ R_{j+1}/R_{j} \geq \delta > 1/2.$$
 (5)

利用蒸馏感知的结果,按照下式估计非零分量:

$$\widehat{S}_{\rm DS}(y) := \{ i \in I_k : y_{i,k} > \sqrt{2p/R_k} \}.$$
(6)

性质1 若 $\mu(p)$ 随着 p 趋近无穷大, 则随着 $p \rightarrow \infty$, 有

$$FDR(\widehat{S}_{DS}) \xrightarrow{P} 0, NDR(\widehat{S}_{DS}) \xrightarrow{P} 0.$$
(7)
若 $\mu(p) > \max\{\sqrt{4p/R_1}, 2\sqrt{2p/R_k}\}, 则有$

$$\lim_{p \to \infty} \Pr(\widehat{S}_{\text{DS}} = \emptyset) = \begin{cases} 1, \ x = 0; \\ 0, \ x \neq 0. \end{cases}$$
(8)

其中Ø表示空集. 定理1的证明过程可以参考文献[4].

由此可见,只要信号幅值按照以问题规模 p 为自 变量的函数增长,蒸馏感知即可确定稀疏信号的非零 分量,而可靠地检测出信号只需要信号幅值超过某个 常数.蒸馏感知的详细算法参考文献 [4].

2 蒸馏稀释感知

蒸馏感知在每次迭代中将所有观测到的负分量 认定为零分量,必定有少量的非零分量由于噪声过大 被观测成负值,进而被错误地认为是零分量,被漏检 的信号分量永远不可被检测,NDR 会随着迭代次数 逐渐增加.蒸馏感知并未利用信号内在的特性,而多 数实际的信号具有相关性,表现为信号分量间满足一 定的特征,例如一个信号分量与其近邻信号分量的状 态有关,其条件概率分布为

$$P\{x_i/\mathcal{N}(x_i)\},\tag{9}$$

其中 $\mathcal{N}(\cdot)$ 表示自变量的近邻. 假设稀疏信号 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ 中各分量具有相关性. 若分量 x_i 为 非零,则其近邻分量有很大的概率为非零;反之若分 量 x_i 为零,则其近邻为零的概率较大,即

$$P\{\mathcal{N}(x_i) = 0/x_i = 0\} \gg P\{\mathcal{N}(x_i) \neq 0/x_i = 0\},\$$
$$P\{\mathcal{N}(x_i) \neq 0/x_i \neq 0\} \gg P\{\mathcal{N}(x_i) = 0/x_i \neq 0\}.$$
(10)

本文认为充分利用信号相关性能能够改善采 样性能,因此提出蒸馏稀释感知理论,其观测模型如 式(3)所示.与蒸馏感知方法相同,先用一部分观测开 销粗略地观测所有分量,剔除一部分最不可能是非零 分量的分量;按上述方式迭代若干次,每次观测的分 量仅为上一次剔除后剩余的部分.与蒸馏感知不同之 处为:1)迭代结束后添加一个稀释过程和一个蒸馏过 程;2)观测精度分配策略.

稀释过程是指将某些被剔除的零分量重新放入 原集合,再次等待蒸馏过程,被选中的分量应该尽量 是被错判的非零分量.根据信号内分量间的相关性, 本文认为非零分量的近邻更可能是非零分量,因此 稀释过程将所有非零分量的近邻重新标记为非零分 量.稀释过程的优势在于能找回被误判的非零分量, 从而降低算法漏检率,而蒸馏感知一旦漏检则无法恢 复.在迭代过程结束后,观测集合内剩余的分量大概 只有 \sqrt{p} 个,进行稀释加蒸馏的过程为算法带来的额 外开销可以忽略.为了与蒸馏感知以及非适应性观测 方法相比较,DDS每次迭代以及增加的蒸馏过程分配 的资源总和需要等于 p.

图1给出了蒸馏稀释感知方法的一个示例图,观 测目标包含11个分量,用实心点表示,令所有分量只 能处于两种状态,1状态或者0状态.假设一开始所 有分量均为非零,随着迭代的进行逐渐剔除零分量. 图1中:图1(a)是原始信号,该信号分量间具有相关 性,表现为非零分量周围更有可能是非零分量,而零 分量周围更可能是零分量;图1(b)是经过多次蒸馏迭 代过程后将非零分量中的第2个分量误判成了零分 量,其中误判的分量用菱形标记;图1(c)是利用邻域 相关性找回了被误判的非零分量,但同时或将两个零 分量添加回非零分量群,其中错误添加的零分量被标 记为菱形.这种将零分量巡回至非零分量群的过程与 将溶剂添加入蒸馏后溶液的过程类似,因此命名为稀 疏过程.由于被稀释的溶液不可避免地增加了水分, 需要等待再次蒸馏. DDS 方法在稀释过程结束后进行 一次蒸馏过程,用来确保剔除绝大多数在稀疏过程中 添加的零分量.

算法1描述了DDS过程,其中N(·)表示自变量



图1 蒸馏稀释感知示意图

的近邻. 近邻的选择方式有许多种, 且根据实际信号 的结构不同存在差异,根据近邻的邻域范围可以分为 一阶近邻、二阶近邻和多阶近邻.实际中的选择需要 考虑信号分量间的相关性. 若信号分量 x_n只与周围 的m个分量相关,则 $\mathcal{N}(x_n) = \{x_{n+k} : 0 < k \leq m\}.$ 根据信号维度结构划分为一维近邻、二维近邻和多 维近邻.对于向量形式的信号采用一维近邻,对于图 像形式的信号采用二维近邻.对于地震波、空间电磁 波信号则采用多维近邻. 迭代过程会出现将非零分 量误判为零分量的情况,但出现多个连续分量同时误 判的概率极低,被错判的非零分量周围有很大的概率 存在已经被检测出的非零分量,因此有理由相信稀 释过程能够找回所有被错判的非零分量. 每次观测 的资源开销为R_i,本组观测的资源预算为R(p),因此 资源分配的总和不能超过本组资源的预算,即需要满 足 $\sum R_i \leq R(p)$. 蒸馏过程中的关键步骤在于资源 分配,如算法1所示,资源将不会被分配到已经被排 除的观测点,其目的是提高资源利用率,蒸馏完成后 的结果如图1(b)所示; 接着算法进入稀释过程, 通过 恢复邻域的信号找回被误判的非零信号;最后一步的 再次蒸馏是对稀释后信号的再次观测处理,这个步骤 可以重复执行多次. 通过实验发现. 执行次数最好能 结合特定问题而决定,本次实验仅执行一次.

算法1 蒸馏稀释感知.

输入: 观测数目 k, 且需满足 $\sum_{j=1}^{k} R_j \leq R(p)$. 初始化: 目录集合 $I_1 \leftarrow \{1, 2, \cdots, p\}$. 蒸馏过程如下: for j = 1 to k - 1 do 1) 资源分配, $\gamma_{i,j} = \begin{cases} R_j / |I_j|, i \in I_j; \\ 0, i \notin I_j. \end{cases}$ 2) 观测, $y_{i,j} = x_i + \gamma^{-1/2} w_{i,j}, i \in I_j$. 3) 提纯, $I_{j+1} \leftarrow \{i \in I_j : y_{i,j} > 0\}$. end 稀释过程如下: $I_{j+1} \leftarrow \{i \in I_j \cup \mathcal{N}(I_j)\}$.

再次蒸馏过程如下:

1) 观测, $y_{i,k} = x_i + \gamma^{-1/2} w_{i,k}, i \in I_k$.

2) 提纯, $I_{k+1} \leftarrow \{i \in I_k : y_{i,k} > 0\}.$

输出: 目录集合 I_{k+1} ,蒸馏观测量 $y_{k+1} = \{y_{i,k+1} : i \in I_{k+1}\}.$

3 蒸馏稀释感知实验

下面给出了适应性观测方法与非适应性算法的 实验对比结果,分别对蒸馏感知方法和DDS方法进 行仿真.

DDS 在原来的蒸馏感知的基础上增加了一个稀释过程和一个蒸馏过程.额外的稀释过程用于追回被误判的非零分量.由于每次迭代仅保留非负观测量,这意味着当非零分量很少时,每次迭代会大概排除一半分量.若每次资源分配稍大于上一次分配资源的一半,则实际观测的精度将比前一次的高.根据文献[4]中的Lemma IV.3.,资源分配需要满足

 $R_j > R_1(1/2 + \varepsilon)^{j-1}, j = 1, 2, \cdots, k,$ (11) 其中 0 < ε < 1/2. 根据定理 1, 检测判决的阈值与首 次及末次资源分配的均方根成反比, 因此首次与末次 的资源分配有必要相等. 蒸馏感知实验采用的资源分 配方案如下:

本实验采用与蒸馏感知相同的信号长度 $p = 2^{14}$, 该信号具有 $\sqrt{p} = 128$ 个等幅值位置随机的非零分量, 迭代次数 $k = \max\{ \lceil \log_2 \log p \rceil, 0 \} + 2$,选择一维一阶 近邻的邻域选择方式,即 $\mathcal{N}(x_n) = \{x_{n-1}, x_{n+1}\},$ 进 行 DDS 的实验与性能分析.稀释过程将非零分量的 左右邻域的两个信号分量认定为非零分量,其他信号 分量不作修改.观测资源分配方案如下:

$$R_{j} = (0.75)^{j-1}R_{1}, \ j = 2, 3, \cdots, k-2;$$

$$R_{1} = R_{k-1} = R_{k};$$
(13)
$$\exists h \equiv \# \mathbb{R} \mathbb{R} \mathbb{R} \mathbb{R}_{j} = p.$$

本实验以星空图为例,研究 DDS 利用信号分量 间相关性的能力.图2为一组星空图,由图2可知,相 比非适应性方法,蒸馏感知受噪声影响更小,性能提 升很明显;但是仔细观察图2(c)会发现,白色星球内 部存在不可忽视的黑点,黑点由漏检造成.图2(d)中 星球内部的黑点更少,其中SNR = 8.由此可见,多 次观测的适应性方法相比非适应性方法具有明显的 优越性.在蒸馏感知实验结果中,体积较大的白色星 球内部出现了黑点,这些黑点代表被误判为零分量的 非零信号分量.每次观测都会引入高斯随机噪声,当 噪声在某个非零分量上负值过大时,原来的正信号被 观测为负信号.蒸馏感知迭代时将所有观测为负的分 量全部认定为零分量,因而会出现剔除正信号的问 题.从图2中可以直观地发现白色星球内部的黑点为 随机分布,且少有连续黑点群出现.只要将这些离散 分布的黑点修正为白点即可极大地降低算法漏检率. DDS 正是基于类似信号分量间相关的特性而提出的. DDS 假设先验已知非零分量的周围比零分量的周围 存在非零分量的概率更大,在稀疏过程中更是将所有 非零分量的邻域全部认为是非零分量,从而追回漏检 分量.图中采用 DDS 方法观测星空图星球内部的黑 点数明显比采用蒸馏感知观测方法观测星球内部的 黑点数少,并且在原本没有星球的地方没有出现零星 的白色误检点.



图 2 星空图

图3给出了蒸馏感知与DDS在不同SNR下的 NDR 和 FDR 变化趋势. 实验中对每个 SNR 重复进行 10次观测, 取观测平均值作为当前 SNR 下的 FDR 和 NDR. 从图3中可以看出, 当信噪比小于10时, DDS 方法的NDR 明显小于蒸馏感知方法中的NDR, NDR 降低15%~30%;但是当信噪比大于10时,DDS方法 的NDR没有保持优势,反而大于蒸馏感知方法的 NDR. 这种性能分界点在SNR = 10 附近发生, 可能 是因为SNR = 8时的蒸馏感知方法相对非适应性方 法表现出最好的检测率, 而当 SNR > 8 时逐渐提高 蒸馏感知的优势不再那么明显. 由于在小信噪比时 会出现大量的漏检, DDS 的稀释过程针对漏检问题大 多数恢复的是误判的非零分量;而在大信噪比时漏检 率原本就很低, DDS 的稀释过程则是将大量的零分 量恢复为非零分量.在FDR方面,当信噪比小于5时, DDS的FDR没有蒸馏感知的FDR小,原因是小信噪 比下DDS的稀释过程会选中更多的零分量而不是 期待的错判非零分量,不可避免地增大FDR;而大信 噪比时稀释过程选中的更多的是错判非零分量,因

此 DDS 方法的 FDR 与蒸馏感知方法的 FDR 同时保持很小.综合以上分析,在实际应用中可根据需要达到的指标动态选择观测方法.例如在信噪比较小时,根据具体 FDR 和 NDR 的要求,在蒸馏感知和 DDS 方法间选择折中;在信噪比适中的绝大多数情况,采样 DDS 方法无疑是更好的选择;在信噪比较大时,蒸馏感知方法更具有优势.



图 3 DDS 与 DS 性能对比图

4 结 论

本文针对非适应性方法在灵活性、准确性等方 面存在的问题,研究了适应性采样方法,并且提出一 种改进的目标检测与估计方案.本文的贡献具体表 现在:根据适应性采样的思想,在蒸馏感知的基础 上,提出DDS稀疏检测与估计算法,并通过实验比 较了DDS方法与其他采样观测方法的性能,对比分 析了适应性采样的优缺点.实验发现,适应性观测 方法在相同信噪比的情况下比非适应性采样具有更 小的误检率和漏检率;在中等大小信噪比的情况下, DDS 算法比蒸馏感知算法更具有优势.

进一步的工作将围绕以下几点展开:

1) 进一步完善适应性采样理论, 寻找理论上蒸馏 感知的界. 近年来陆续有文章讨论了蒸馏感知算法的 性能极限, 给出了各种性能界, 例如文献 [8], 但蒸馏 感知到底能够检测出多弱的信号并没有得到理论上 的完善. 2)除了相关性之外,尝试利用其他的信号内在特征,用于提升蒸馏感知算法的性能.本文以信号相关 性为例证实了利用信号内在特征能够提升蒸馏感知 算法的性能,这是一个新的开端,未来的工作可以研 究其他的信号特征,例如结构特征对适应性算法性能 的改善.

参考文献(References)

- Edward L Wright, Peter R M Eisenhardt, Amy K Mainzer, et al. The wide-field infrared survey explorer(WISE): Mission description and initial on-orbit performance[J]. Astronomical J, 2010, 140(6): 1868-1881.
- [2] Donoho D, Jin J. Asymptotic minimaxity of false discovery rate thresholding for sparse exponential data[J]. Annals of Statistics, 2006, 34(6): 2980-3018.
- [3] Donoho D, Jin J. Higher criticsm for detecting sparse heterogenous mixtures[J]. Annals of Statistics, 2004, 32(3): 962-994.
- [4] Jarvis Haupt, Rui Castro, Robert Nowak. Distilled sensing: Adaptive sampling for sparse detection and estimation[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2011, 57(9): 6222-6235.
- [5] Zehetmayer S, Bauer P, Posch M. Two-stage designs for experiments with large number of hypotheses[J]. Bioinformatics, 2005, 21(19): 3771-3777.
- [6] Zehetmayer S, Bauer P, Posch M. Optimized multi-stage designs controlling the false discovery or the family-wise error rate[J]. Statistics in Medicine, 2008, 27(21): 4145-4160.
- [7] Castro R, Willett R, Nowak R. Faster rates in regression via active learning[C]. Proc of the Neural Information Processing Systems Conf. Vancouver, 2005: 179-186.
- [8] Jarvis Haupt, Rui Castro, Robert Nowak. Improved bounds for sparse recovery from adaptive measurements[C]. Proc of IEEE Int Symposium on Information Theory. Austin, 2010: 1563-1567.

《控制与决策》第四次荣获中国高校精品科技期刊奖

2012年11月22日,由教育部科技司举办的第四届中国高校精品--优秀--特色科技期刊表彰大会在济南隆 重举行.中宣部、教育部等有关领导出席会议,并作了重要讲话,来自全国高校科技期刊编辑出版单位的500多 名代表与会.

经权威专家评审,共评选出精品科技期刊60种,优秀科技期刊120种,特色科技期刊30种.《控制与决策》荣获教育部科学技术司颁发的第四届中国高校精品科技期刊奖,这是本刊第四次获此殊荣.

另外,本刊被中国科学文献计量评价研究中心评为"2012中国国际影响力优秀学术期刊",该奖项 是 2012年中国科学文献计量评价研究中心首次设立的;在第二届中国学术期刊评价中被评为"RCCSE中国权 威学术期刊(A+)".