

文章编号: 1001-0920(2013)03-0445-06

一类具有连续分布时滞的分布参数系统的反馈控制

高存臣^a, 刘 振^a, 徐瑞萍^b

(中国海洋大学 a. 数学科学学院, b. 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100)

摘 要: 针对一类同时具有变时滞和连续分布时滞的分布参数系统的状态反馈控制问题进行了研究, 通过选择适当的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 采用线性矩阵不等式 (LMI) 方法, 得到了变时滞闭环系统渐近稳定的一个充分条件. 设计了无记忆的状态反馈控制器, 使得在一个正定矩阵存在的条件下, 闭环系统是可镇定的, 从而得到了常时滞分布参数系统可镇定的一个推论. 最后, 通过一个数值仿真例子说明了所给出设计方法的可行性和有效性.

关键词: 分布参数系统; 变时滞; 分布时滞; 反馈控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Feedback control for a class of distributed parameter systems with continuous distributed time-delay

GAO Cun-chen^a, LIU Zhen^a, XU Rui-ping^b

(a. School of Mathematical Sciences, b. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China. Correspondent: LIU Zhen, E-mail: liuzhen8788@163.com)

Abstract: The problem of state feedback control design is investigated for a class of distributed parameter systems with both time-varying delay and continuous distributed time-delay. By selecting an appropriate Lyapunov-Krasovskii function, a sufficient condition is obtained to guarantee the asymptotical stability of the closed-loop system with time-varying delay by using a linear matrix inequality (LMI) approach. A memoryless state feedback controller is designed, such that the closed-loop system is stable when a positive matrix exists. Thus, a corollary of stabilization is established for the case of constant time-delay. Finally, a numerical simulation example is given to illustrate the feasibility and effectivity of the proposed method.

Key words: distributed parameter system; time-varying delay; distributed time-delay; feedback control; linear matrix inequality

0 引 言

时间滞后(简称时滞)现象普遍存在于机械、化工、电子、通讯和网络等实际工程系统中, 例如, 机械传输系统中的物料传送过程具有时滞, 而时滞往往影响系统的动态性能, 甚至导致系统失稳. 多年来关于时滞系统的控制研究一直受到广大学者的关注. 由于分布参数系统广泛的应用性^[1-4], 使得对具有时滞的分布参数控制系统的研究成为近年来控制界学者主要关注的问题之一, 为时滞分布参数系统寻找一种实用且有效的控制方法更是控制领域中的热点课题, 并且对时滞分布参数控制系统的稳定及镇定性的研究已有了一些研究成果^[5-11], 研究方法主要采用辅

助函数法和状态函数法. 文献[5, 9]利用辅助函数方法分别研究了由多个变时滞与不确定分布参数系统所导出的滑动模方程的指数渐近稳定性问题, 但该方法具有一定的保守性; 文献[6]针对常时滞、多个常时滞及多个变时滞的分布参数控制系统, 通过构造 Lyapunov 函数, 利用线性矩阵不等式方法给出了分布参数系统稳定的充分条件, 该方法适用范围较大; 文献[7]利用推广的向量 Halanay 微分不等式研究了变时滞分布参数系统的全局指数稳定性, 该方法保守性大, 实用性少, 控制器设计复杂且不易实现; 文献[8]研究了反馈控制器对不确定时滞分布参数系统的鲁棒控制; 文献[10]研究了一类不确定时滞分布参数系统的指数稳定性; 文献[11]研究了一类不确定时

收稿日期: 2011-11-01; 修回日期: 2012-04-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974025).

作者简介: 高存臣(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事大系统的理论与应用、变结构控制在海洋信息探测与处理中的应用等研究; 刘振(1987—), 男, 硕士生, 从事线性与非线性系统控制及其应用的研究.

滞分布参数切换系统的反馈镇定问题,但未涉及到分布时滞的情形.目前,分布参数控制系统的控制器设计问题主要采用滑模变结构控制方法,但变结构控制有一个无法克服的困难,即难以避免的抖动现象.然而,从客观事实来看,分布时滞更能反映事物的本质,如文献[12]提出的材料热加工与人类的变迁模型都是具有分布时滞的抛物型系统,而且具有分布时滞的抛物型系统包含了 n 个时滞的控制系统,因此,对分布时滞系统的进一步研究无论在理论还是在工程实际上都具有重要的意义.

关于分布时滞系统,文献[13-14]对集中参数系统进行了研究;文献[15]讨论了具有分布时滞的抛物型系统的振动性;文献[16-17]分别讨论了一种特殊的具有分布时滞的抛物型系统的镇定性,但[16]中的研究是以算子半群理论为工具设计的控制器,这给工程实际应用带来一定的困难,[17]中利用推广的 Hanalay 微分不等式和 Dini 导数等不等式方法,运用比较原理导出了系统的镇定性条件;文献[18]给出了无记忆功能的变结构控制器的设计方案,但设计过程相当复杂,且该类控制器的设计在一定程度上增加了控制系统的保守性,也不易于普遍使用.上述研究都没有涉及到变时滞的情形,而且得到的控制器比较复杂,很难实现.

本文针对一类同时具有变时滞与连续分布时滞的分布参数系统的状态反馈控制问题,通过选择适当的 Lyapunov-Krasovskii 函数,采用线性矩阵不等式(LMI)的方法,设计无记忆的状态反馈控制器,将系统的镇定问题转化为线性矩阵不等式(LMI)的可行解问题,使得闭环系统在存在一个要求的反馈增益矩阵的条件下是可镇定的;将本文所得到的变时滞抛物型系统的结果与前人研究的常时滞的抛物型系统的有关结论进行了比较,比较结果说明,本文的结果解决实际问题的范围明显增大了.最后通过一个仿真实例表明了所给出的设计方法的可行性和有效性.

1 问题描述及主要引理

考虑如下—类同时具有变时滞与分布时滞的分布参数系统的反馈控制问题:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{w}(x, t) / \partial t = & \\ D \Delta \mathbf{w}(x, t) + A \mathbf{w}(x, t) + A_{d_1} \mathbf{w}(x, t - \tau_1(t)) + & \\ A_{d_2} \int_{t-\tau_2(t)}^t \mathbf{w}(x, s) ds + B \mathbf{u}(x, t). & \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, $\Omega = \{x | \|x\| < h, h = \text{Const.} > 0\} \in \mathbb{R}^l$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 并且 $\text{mes } \Omega > 0$; $\mathbf{w}(x, t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量函数; $\mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制向量函数; $D > 0$ 且为常数; $A, A_{d_1}, A_{d_2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为定常矩阵; 系统的状态时滞 $\tau_1(t), \tau_2(t)$

为时变有界的连续函数, 且满足 $0 < \tau_1(t) \leq \tau_1$, $0 < \tau_2(t) \leq \tau_2$, $\dot{\tau}_1(t) \leq \alpha < 1$, $\dot{\tau}_2(t) \leq \beta < 1$, 这里 $\tau_1, \tau_2, \alpha, \beta$ 均为已知的正实常数, 记 $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$; $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 为 Ω 上的 Laplace 扩散算子. 其相应的初边界条件为

$$\mathbf{w}(x, t) = \boldsymbol{\psi}(x, t), (x, t) \in [-\tau, 0]; \quad (2)$$

$$\partial \mathbf{w}(x, t) / \partial \mathbf{n} = 0, \mathbf{w}(x, t) = 0,$$

$$(x, t) \in \partial\Omega \times [-\tau, +\infty). \quad (3)$$

其中: $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\boldsymbol{\psi}(x, t)$ 为适当的光滑函数.

引理 1^[19] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是边界 $\partial\Omega$ 光滑的有界区域, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $G \subset \Omega$ 为一光滑子域, 若 $u, v \in C^2(\overline{G})$, 则

$$\int_G u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

其中: ∇ 表示 Hamilton 算子, dS 表示边界区域的面积微元.

引理 2^[20] 设 U_1, U_2, U_3 为实矩阵, 且 U_3 为正定的, 则对于任意的一个标量 $\alpha > 0$, 下面的不等式成立:

$$U_2^T U_1 + U_1^T U_2 \leq \alpha^{-1} U_1^T U_3^{-1} U_1 + \alpha U_2^T U_3 U_2. \quad (4)$$

引理 3^[21](Schur 补引理) 线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0$$

等价于 $R(x) < 0, Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) < 0$. 其中: $Q^T(x) = Q(x), R^T(x) = R(x)$.

2 主要结果

通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 结合 LMI, 由 Green 公式、矩阵不等式(4)和 Schur 补引理, 并根据 Lyapunov 稳定性理论, 可以给出所讨论系统无记忆状态反馈控制器的设计方法以及其状态为渐近稳定的结果.

定理 1 关于系统(1), 对任意给定的正定矩阵 Q_1, Q_2 , 如果存在正定矩阵 X , 以及矩阵 M , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & A_{d_1} & A_{d_2} & X & 0 & 0 \\ * & \Phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

其中

$$\Phi_1 = AX + XA^T + BM + M^T B^T,$$

$$\Phi_2 = -(1 - \tau_1)Q_1, \Phi_3 = -(1 - \tau_2)Q_2,$$

$$\Phi_4 = -(Q_1 + \tau_2^2 Q_2)^{-1}.$$

则系统(1)在给出的边界条件和无记忆状态反馈控制器(6)下是渐近稳定的, 且反馈增益矩阵 $K = MX^{-1}$, 符号*代表矩阵的对称项.

证明 假设 P 为正定矩阵, 对系统(1), 取无记忆的状态反馈控制器为

$$u(x, t) = K w(x, t). \quad (6)$$

选取 Lyapunov-Krasovskii 函数如下:

$$V(t, w(x, t)) = V_1(t, w(x, t)) + V_2(t, w(x, t)) + V_3(t, w(x, t)) + V_4(t, w(x, t)).$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(t, w(x, t)) &= \int_{\Omega} w^T(x, t) P w(x, t) dx, \\ V_2(t, w(x, t)) &= \int_{\Omega} \int_{t-\tau_1(t)}^t w^T(x, s) Q_1 w(x, s) ds dx, \\ V_3(t, w(x, t)) &= \int_{\Omega} \int_{t-\tau_2(t)}^t \left[\int_s^t w^T(x, \theta) d\theta \right] Q_2 \cdot \\ &\quad \left[\int_s^t w(x, \theta) d\theta \right] ds dx, \\ V_4(t, w(x, t)) &= \int_{\Omega} \int_0^{\tau_2} \int_{t-s}^t (\theta - t + s) w^T(x, \theta) \cdot \\ &\quad Q_2 w(x, \theta) d\theta ds dx. \end{aligned}$$

对 V_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 分别沿系统(1)的解求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2 \int_{\Omega} w^T(x, t) P \dot{w}(x, t) dx = \\ &2D \int_{\Omega} w^T(x, t) P \Delta w(x, t) dx + \\ &\int_{\Omega} w^T(x, t) [PA + A^T P + PBK + \\ &K^T B^T P] w(x, t) dx + \\ &2 \int_{\Omega} w^T(x, t) P A_{d1} w(x, t - \tau_1(t)) dx + \\ &2 \int_{\Omega} w^T(x, t) P A_{d2} \int_{t-\tau_2(t)}^t w(x, s) ds dx. \end{aligned} \quad (7)$$

记

$$I(t) = 2D \int_{\Omega} w^T(x, t) P \Delta w(x, t) dx, \quad P = (p_{jk}),$$

利用引理1和边界条件可得

$$\begin{aligned} I(t) &= 2D \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} \int_{\Omega} w_j(x, t) \Delta w_k(x, t) dx = \\ &2D \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} \left[\int_{\partial\Omega} w_j(x, t) \frac{\partial w_k(x, t)}{\partial n} dx - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \nabla w_j(x, t) \nabla w_k(x, t) dx \right] = \\ &- 2D \int_{\Omega} \nabla w^T(x, t) P \nabla w(x, t) dx \leq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \int_{\Omega} w^T(x, t) Q_1 w(x, t) dx - [(1 - \dot{\tau}_1(t))] \cdot \\ &\int_{\Omega} w^T(x, t - \tau_1(t)) Q_1 w(x, t - \tau_1(t)) dx \leq \\ &\int_{\Omega} w^T(x, t) Q_1 w(x, t) dx - (1 - \alpha) \cdot \\ &\int_{\Omega} w^T(x, t - \tau_1(t)) Q_1 w(x, t - \tau_1(t)) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= 2 \int_{\Omega} w^T(x, t) Q_2 \int_{t-\tau_2(t)}^t \int_s^t w(x, \theta) d\theta ds dx - \\ &[(1 - \dot{\tau}_2(t))] \int_{\Omega} \left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w^T(x, s) ds \right] \cdot \\ &Q_2 \left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w(x, s) ds \right] dx \leq \\ &2 \int_{\Omega} \int_{t-\tau_2}^t (\theta - t + \tau_2) w^T(x, t) Q_2 w(x, \theta) d\theta dx - \\ &(1 - \beta) \int_{\Omega} \left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w^T(x, s) ds \right] Q_2 \cdot \\ &\left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w(x, s) ds \right] dx. \end{aligned}$$

利用引理2, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq \\ &\int_{\Omega} \int_{t-\tau_2}^t (\theta - t + \tau_2) w^T(x, \theta) Q_2 w(x, \theta) d\theta dx + \\ &\frac{\tau_2^2}{2} \int_{\Omega} w^T(x, t) Q_2 w(x, t) dx - (1 - \beta) \cdot \\ &\int_{\Omega} \left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w^T(x, s) ds \right] Q_2 \left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w(x, s) ds \right] dx, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \\ &\frac{\tau_2^2}{2} \int_{\Omega} w^T(x, t) Q_2 w(x, t) dx - \\ &\int_{\Omega} \int_{t-\tau_2}^t (\theta - t + \tau_2) w^T(x, \theta) Q_2 w(x, \theta) d\theta dx, \end{aligned} \quad (11)$$

于是可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4 \leq \\ &- 2D \int_{\Omega} \nabla w^T(x, t) P \nabla w(x, t) dx + \\ &\int_{\Omega} w^T(x, t) [PA + A^T P + PBK + K^T B^T P] \cdot \\ &w(x, t) dx + 2 \int_{\Omega} w^T(x, t) P A_{d1} w(x, t - \tau_1(t)) dx + \\ &2 \int_{\Omega} w^T(x, t) P A_{d2} \int_{t-\tau_2(t)}^t w(x, s) ds dx + \\ &\int_{\Omega} w^T(x, t) Q_1 w(x, t) dx - (1 - \alpha) \cdot \\ &\int_{\Omega} w^T(x, t - \tau_1(t)) Q_1 w(x, t - \tau_1(t)) dx + \\ &\tau_2^2 \int_{\Omega} w^T(x, t) Q_2 w(x, t) dx - (1 - \beta) \int_{\Omega} \cdot \\ &\left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w^T(x, s) ds \right] Q_2 \left[\int_{t-\tau_2(t)}^t w(x, s) ds \right] dx \leq \\ &\int_{\Omega} \eta^T(x, t) \Gamma \eta(x, t) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \text{col}\{w(x, t), w(x, t - \tau_1(t)), \\ &\int_{t-\tau_2(t)}^t w(x, s) ds\}, \\ \Theta &= Q_1 + \tau_2^2 Q_2 + PA + A^T P + PBK + K^T B^T P, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \Theta & PA_{d1} & PA_{d2} \\ * & -(1 - \alpha) Q_1 & 0 \\ * & * & -(1 - \beta) Q_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

由式(12)及 Lyapunov 稳定性理论可知, 如果 $\Gamma < 0$, 则闭环系统是渐近稳定的, 即系统可镇定. 对式(13)

的左、右两边同时乘以 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I\}$, 且令 $X = P^{-1}$, $M = KX$, 则式 (13) 可转化为

$$\begin{bmatrix} \Xi & A_{d1} & A_{d2} \\ * & -(1-\alpha)Q_1 & 0 \\ * & * & -(1-\beta)Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & A_{d1} & A_{d2} \\ * & \Phi_2 & 0 \\ * & * & \Phi_3 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \begin{bmatrix} \Phi_4^{-1} & 0 & 0 \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$\Xi = X[Q_1 + \tau_2^2 Q_2]X + AX + \\ XA^T + BM + M^T B^T,$$

再应用引理 3, 即可得式 (5). $\square$

注 1 对于控制器的设计, 有记忆功能的控制器保守性大, 尤其是在变时滞的情况下很难实现, 因此, 为变时滞的分布参数控制系统设计无记忆功能的控制器是非常必要的.

定理 1 给出了变时滞的分布参数控制系统的镇定性条件, 下面对常时滞分布参数控制系统这一特殊情形, 给出相应系统镇定的一个推论.

考虑系统

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{w}(x, t) / \partial t = \\ D \Delta \mathbf{w}(x, t) + A \mathbf{w}(x, t) + A_{d1} \mathbf{w}(x, t - \gamma_1) + \\ A_{d2} \int_{t-\gamma_2}^t \mathbf{w}(x, s) ds + B u(x, t), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 γ_1, γ_2 均为已知的正实常数.

推论 1 若系统 (14) 对任意给定的正定矩阵 Q_1, Q_2 都存在正定矩阵 X , 以及矩阵 M , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & A_{d1} & A_{d2} & X & 0 & 0 \\ * & -Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

则系统 (14) 在所给出的初边界条件和状态反馈控制器 (6) 下的闭环系统是渐近稳定的.

证明 假设 P 为正定矩阵, 选取类似于定理 1 中的 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{w}(x, t)) = & V_1(t, \mathbf{w}(x, t)) + V_2(t, \mathbf{w}(x, t)) + \\ & V_3(t, \mathbf{w}(x, t)) + V_4(t, \mathbf{w}(x, t)). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(t, \mathbf{w}(x, t)) &= \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(x, t) P \mathbf{w}(x, t) dx, \\ V_2(t, \mathbf{w}(x, t)) &= \int_{\Omega} \int_{t-\gamma_1}^t \mathbf{w}^T(x, s) Q_1 \mathbf{w}(x, s) ds dx, \\ V_3(t, \mathbf{w}(x, t)) &= \\ & \int_{\Omega} \int_{t-\gamma_2}^t \left[\int_s^t \mathbf{w}^T(x, \theta) d\theta \right] Q_2 \left[\int_s^t \mathbf{w}(x, \theta) d\theta \right] ds dx, \\ V_4(t, \mathbf{w}(x, t)) &= \\ & \int_{\Omega} \int_0^{\gamma_2} \int_{t-s}^t (\theta - t + s) \mathbf{w}^T(x, \theta) Q_2 \mathbf{w}(x, \theta) d\theta ds dx. \end{aligned}$$

下面的证明过程与定理 1 的方法相类似, 不再赘述. $\square$

注 2 定理 1 讨论的是变时滞的抛物型控制系统的控制器设计与系统的镇定性问题, 所得到的线性反馈控制器设计简单, 系统渐近稳定性的条件比较容易验证, 而且定理 1 还适用于常时滞的抛物型控制系统的控制器设计与系统镇定.

3 仿真算例

根据文献 [12] 中提到的材料热加工过程中的热传导问题, 考虑二维热传导过程的数学模型, 同时, 为了方便讨论, 二阶分布参数控制系统 (14) 选取如下参数:

$$\begin{aligned} D = 1.2, \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_1 = 0.1, \quad \gamma_2 = 0.05, \end{aligned}$$

并取外参数矩阵

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

根据推论 1, 利用 Matlab LMI-Toolbox, 可解得符合要求的一组可行解为

$$X = \begin{bmatrix} 1.6892 & 0.1268 \\ 0.1268 & 2.0337 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1.8784 & 5.5855 \\ -5.4593 & -3.8694 \end{bmatrix}.$$

此时, 存在原系统的状态反馈控制器 (6), 使得闭环系统为渐近稳定的, 且控制器的增益为

$$K = \begin{bmatrix} 0.9101 & 2.6897 \\ -3.1035 & -1.7091 \end{bmatrix}.$$

取初始条件和边界条件如下:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \begin{bmatrix} (t + 0.3)x^{\frac{1}{10}} \sin(2x) \\ (t + 0.6)x^{\frac{1}{6}} \sin(2x) \end{bmatrix}, \\ (x, t) &\in [0, \pi] \times [-0.1, 0]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{w}(x, t) = 0, \text{ 或者 } \frac{\partial \mathbf{w}(x, t)}{\partial t} = 0, \quad x = 0, \pi, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

图 1 和图 2 为闭环系统的状态响应曲线. 由图 1 和图 2 可以看出, 在所设计控制器的作用下, 在时间

$t > 1$ s时,系统的状态与平面 $w(x, t) = 0$ 的距离逐渐减少,因此系统具有快速响应的稳态性能。

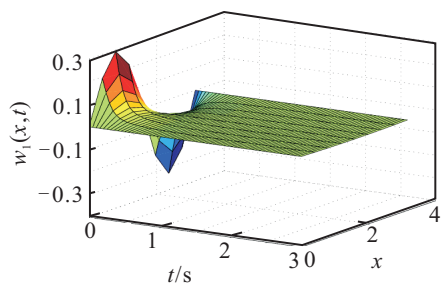


图1 系统的状态分量 $w_1(x, t)$ 的响应曲线

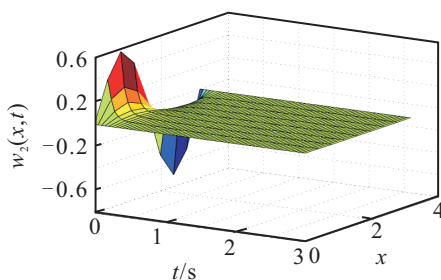


图2 系统的状态分量 $w_2(x, t)$ 的响应曲线

4 结 论

本文研究了一类具有变时滞和连续分布时滞的分布参数系统的状态反馈控制问题,通过选择适当的 Lyapunov-Krasovskii 函数,采用线性矩阵不等式 (LMI) 的方法,得到了系统可镇定的一个新判据;设计了线性无记忆的状态反馈控制器,且控制器参数可通过求解线性矩阵不等式得到,从而推广了现有关于该类系统的设计方法;最后,通过仿真实例表明了所给出设计方法的可行性和有效性。

顺便指出,对于时滞分布参数系统 (1),若系统中带有时滞的状态变量含有导数,即时滞中立型分布参数系统,利用本文方法可给出类似的结论。限于篇幅,将另文给出。

参考文献(References)

- [1] Orlov Y V, Utkin V L. Sliding mode control in indefinite dimensional systems[J]. Automatica, 1987, 23(6): 753-757.
- [2] 郑立辉, 冯珊, 潘德惠. 描述群体消费者行为的分布参数系统方法[J]. 系统工程学报, 1997, 12(4): 65-71.
(Zheng L H, Feng S, Pan D H. A distributed parameter system approach to the modeling of consumers collective behavior[J]. J of Systems Engineering, 1997, 12(4): 65-71.)
- [3] 刘永清, 谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定与变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
(Liu Y Q, Xie S L. The stability and control of distributed parameter system with delay[M]. Guangzhou: South China University of Technology Publishers, 1998.)
- [4] Banks H T, Musante C J, Raye J K. Predictions for a distributed parameter model describing the Hepatic processing of TCDD[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2002, 33: 49-64.
- [5] 崔宝同, 邓飞其, 王伟, 等. 时滞分布参数系统的指数渐近稳定性[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(5): 579-583.
(Cui B T, Deng F Q, Wang W, et al. Exponential asymptotical stability for distributed parameter systems with time delays[J]. Systems Engineering and Electronics, 2003, 25(5): 579-583.)
- [6] 罗毅平, 邓飞其, 刘国荣. 基于 LMI 方法的时滞分布参数控制系统的镇定[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 625-628.
(Luo Y P, Deng F Q, Liu G R. LMI-based approach for stabilization of distributed parameter control systems with delay[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 625-628.)
- [7] 罗毅平, 邓飞其. 变时滞分布参数系统的全局指数稳定性[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 562-566.
(Luo Y P, Deng F Q. Global exponential stability for distributed parameter systems with varying time-delay[J]. Control Theory and Applications, 2005, 22(4): 562-566.)
- [8] 罗毅平, 邓飞其. 不确定时滞分布参数系统鲁棒控制的 LMI 方法[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 217-220.
(Luo Y P, Deng F Q. LMI-based approach of robust control for uncertain distributed parameter control systems with time-delay[J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(2): 217-220.)
- [9] 周国鹏, 邓飞其. 一类时滞分布参数系统的指数渐近稳定性[J]. 武汉科技大学学报, 2004, 27(2): 211-213.
(Zhou G P, Deng F Q. Exponential asymptotical stability for a class of distributed parameter systems with time delays[J]. J of Wuhan University of Science and Technology, 2004, 27(2): 211-213.)
- [10] 李延波, 高存臣, 殷礼胜. 不确定时滞分布参数系统的指数稳定性[J]. 合肥工业大学学报, 2010, 33(7): 1109-1111.
(Li Y B, Gao C C, Yin L S. Exponential stability of distributed parameter systems with uncertain time delay[J]. J of Hefei University of Tech, 2010, 33(7): 1109-1111.)
- [11] 董学平, 温锐, 刘洪亮. 一类时滞分布参数切换系统的反馈镇定[J]. 应用科学学报, 2011, 29(1): 92-96.
(Dong X P, Wen R, Liu H L. Feedback stabilization for a class of distributed parameter switched systems with time-delay[J]. J of Applied Sciences, 2011, 29(1): 92-96.)
- [12] Kolmanovskii V, Myshkis A. Applied theory of functional differential equations[M]. Dordrecht: Kluwer Academic publishers, 1992.

- [13] 郑峰, 程勉, 高为炳. 分布时滞系统的反馈镇定[J]. 自动化学报, 1995, 21(3): 257-265.
(Zheng F, Cheng M, Gao W B. Feedback stabilization of linear systems with distributed delays in state and control variable[J]. Acta Automatica Sinica, 1995, 21(3): 257-265.)
- [14] 周志波, 王进祥, 吴立刚. 不确定分布式时滞系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制[J]. 电机与控制学报, 2006, 10(6): 609-614.
(Zhou Z B, Wang J X, Wu L G. Robust H_∞ state-feedback control for a class of uncertain systems with distributed delay[J]. Electric Machines and Control, 2006, 10(6): 609-614.)
- [15] 陈振韬. 一类时滞抛物型偏微分方程解的振动性[J]. 数学物理学报, 1994, 14(1): 115-120.
(Chen Z T. Oscillation of solutions for a class of parabolic partial differential equations with time-delay[J]. Acta Mathematica Scientia, 1994, 14(1): 115-120.)
- [16] Henrique H R. Stabilization of hereditary distributed parameter Control system[J]. Systems and Control Letters, 2001, 44(1): 35-43.
- [17] 罗毅平, 邓飞其, 李安平. 具分布时滞的抛物型系统的指数镇定[J]. 物理学报, 2007, 56(2): 637-642.
(Luo Y P, Deng F Q, Li A P. Global exponential stabilization for parabolic type systems with continuously distributed delays[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(2): 637-642.)
- [18] 高存臣, 赵林. 一类具有连续分布时滞的抛物型系统的无记忆滑模控制器设计[J]. 信息与控制, 2011, 40(4): 438-444.
(Gao C C, Zhao L. Memoryless sliding mode controller design for a class of parabolic type systems with continuously distributed delays[J]. Information and Control, 2011, 40(4): 438-444.)
- [19] 崔宝同, 楼旭阳. 时滞分布参数系统理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009: 8-12.
(Cui B T, Lou X Y. Theory and its application for distributed parameter systems with time-delays[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2009: 8-12.)
- [20] Sanchez E N, Perez J P. Input-to-state stability analysis for dynamic Neural Networks[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-I, 1999, 46(11): 1395-1398.
- [21] Boyd S, Eighaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

(上接第444页)

- [12] Vedat Togan, Ayse T Daloglu. An improved genetic algorithm with initial population strategy and self-adaptive member grouping[J]. Computers and Structures, 2008, 86(11/12): 1204-1218.
- [13] Nima Amjady, Hadi Nasiri-Rad. Solution of nonconvex and nonsmooth economic dispatch by a new adaptive real coded genetic algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(7): 5239-5245.
- [14] Mennon A, Mehrotra K, Mohan C K, et al. Characterization of a class of sigmoid functions with applications to neural networks[J]. Neural Networks, 1996, 9(5): 819-835.
- [15] 张世铮. 燃气热力性质的数学公式表示法[J]. 工程热物理学报, 1980, 2(1): 9-16.
(Zhang S Z. Polynomial expressions of thermodynamic properties of the products of combustion of fuel with air[J]. J of Engineering Thermophysics, 1980, 1(1): 10-16.)
- [16] Chappell M S, Cochshut E P. Thermodynamic data tables for air and combustion products for three systems of units[M]. AD A003438, 1974.
- [17] Jan Tommy Gravdahl, Olav Egeland. Centrifugal compressor surge and speed control[J]. IEEE Trans on Control System Technology, 1999, 7(5): 567-579.