文章编号: 1001-0920 (2013) 03-0385-06

二型模糊粗糙集

赵 涛[a], 肖 建[b]

(西南交通大学 a. 交通运输与物流学院，b. 电气工程学院，成都 610031)

摘 要: 基于二型模糊关系, 研究二型模糊粗糙集. 首先, 在二型模糊近似空间中定义了二型模糊集的上近似和下近似; 然后, 研究二型模糊粗糙上下近似算子的基本性质, 讨论二型模糊关系与二型模糊粗糙近似算子的特征联系; 最后, 给出二型模糊粗糙近似算子的公理化描述.

关键词: 二型模糊粗糙集；二型模糊集；粗糙集；近似算子

中图分类号: TP18　　**文献标志码:** A

Type-2 fuzzy rough sets

ZHAO Tao[a], *XIAO Jian*[b]

(a. School of Transportation and Logistics，b. School of Electrical Engineering，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China．Correspondent：ZHAO Tao，E-mail：zhaotaozhaogang@126.com)

Abstract: This paper studies type-2 fuzzy rough sets based on the type-2 fuzzy relation. Firstly, the upper approximation and the lower approximation of type-2 fuzzy sets of a type-2 fuzzy approximate space are defined. Then, basic properties of type-2 fuzzy rough approximation operators are derived, and the fact that type-2 fuzzy relation having special property can be characterized by the essential properties of these operators is discussed. Finally, type-2 fuzzy rough approximation operators are defined by axioms.

Key words: type-2 fuzzy rough sets；type-2 fuzzy sets；rough sets；approximation operators

0 引 言

粗糙集理论是一种新的处理模糊性和不确定性知识的数学工具. 自 1982 年由波兰数学家Pawlak[1-2] 首次提出以来, 经过几十年的发展, 在理论与实际中都得到了广泛应用. 然而在 Pawlak 粗糙集模型中, 等价关系起到了重要作用, 这限制了它在实际中的应用, 因此将粗糙集模型进行推广就成为了粗糙集理论研究的重要内容. 人们相继提出了一般二元关系下的粗糙集模型、覆盖粗糙集模型和变精度粗糙集模型等.

文献 [3] 提出的模糊集是传统集合的扩展, 目前它在聚类分析、图像识别、自动控制、故障诊断和系统评价等多方面得到了广泛应用. 为了实际应用的需要, 各类扩展的模糊集相继被提出, 文献 [4] 提出的二型模糊集作为一种处理多重不确定性的数学工具, 给出了解决复杂系统的新思路; 文献 [5-6] 提出的直觉模糊集增加了人们判断问题的踌躇信息, 更加细腻地刻画了模糊性的本质; 文献 [7] 提出了区间值直觉模糊集, 并指出区间值模糊集等同于直觉模糊集. 模糊集和粗糙集都是处理不确定性问题的数学工具, 它们具有各自的特点与优势. 文献 [8] 首先将粗糙集和模糊集结合研究, 将清晰关系推广到模糊关系, 将确定概念推广到模糊概念, 提出了模糊粗糙集模型, 并研究其基本性质; 文献 [9] 将粗糙集和直觉模糊集相结合, 提出了直觉模糊粗糙集; 文献 [10-14] 扩充了直觉模糊粗糙集理论与应用的研究. 二型模糊集具有良好的抗噪性能, 在高度不确定的场合, 具有超越一型模糊集的性能表现, 然而, 关于二型模糊集和粗糙集相结合的研究尚未出现.

众所周知, 粗糙集的一个重要应用就是属性约简. 传统的粗糙集对包含连续数据的决策表进行约简, 需要对连续属性进行离散化, 一般的离散方式采用的是“硬划分”方式, 没有考虑实值数据对离散值的不同隶属度, 极有可能造成某种程度的信息损失. 事实上, 连续数据大多具有模糊性, 概念之间的界限并不十分明确, 一种合理的做法是采用“软划分”方式, 将实数值转化为相应的隶属度值, 基于一

收稿日期: 2011-11-17；**修回日期:** 2012-01-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51177137, 61134001).

作者简介: 赵涛(1988−), 男, 博士生, 从事模糊辨识、模糊控制的研究；肖建(1950−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、鲁棒控制等研究.

型模糊粗糙集, 对原数据集进行属性约简, 这种思想已经被广泛研究, 例如: 文献[15]提出了模糊粗糙QuickReduct算法; 文献[16]声称[15]的算法有一定的缺陷, 进而提出了一种基于模糊粗糙集紧计算域的属性约简算法. 一般地, 连续数据具有高度的不确定性[17], 而二型模糊集的特征是对模糊集合的隶属度值再次进行模糊化表示, 从而提高了处理不确定性的能力, 因此在处理连续数据集方面, 二型模糊粗糙集比一型模糊粗糙集更优越. 基于此, 本文将普通二型模糊集和粗糙集相结合, 在二型模糊近似空间中定义了二型模糊集的上近似和下近似; 然后, 研究了二型模糊粗糙上下近似算子的基本性质, 讨论了二型模糊关系与二型模糊粗糙近似算子的特征联系; 最后, 给出了二型模糊粗糙近似算子的公理化描述.

1 预备知识

本节主要给出二型模糊集的基本概念及相应运算.

定义 1[15-16] 设 X 为论域, 一个二型模糊集 A 可以描述为

$$A=\int_{x\in X}u_A(x)/x=\int_{x\in X}\left[\int_{u\in J_x}f_x(u)/u\right]\Big/x,$$
$$J_x\subseteq[0,1].$$

其中: J_x 为 x 的主要成员, $f_x(u)$ 为 x 的次隶属度, $u_A(x)=\int_{u\in J_x}f_x(u)/u$ 为次隶属函数.

定义 2[18-19] 设 X, Y 为论域, $X\times Y$ 上的二型模糊关系

$$R=\int_{(x,y)\in X\times Y}u_R(x,y)/(x,y)=$$
$$\int_{(x,y)\in X\times Y}\left[\int_{u\in J_{(x,y)}}f_{(x,y)}(u)/u\right]\Big/(x,y),$$
$$J_{(x,y)}\subseteq[0,1].$$

定义 3[18-19] 设 A, B 是论域 X 上的两个二型模糊集, 令

$$A=\int_{x\in X}u_A(x)/x=$$
$$\int_{x\in X}\left[\int_{u\in J_x^u}f_x(u)/u\right]\Big/x,\ J_x^u\subseteq[0,1];$$
$$B=\int_{x\in X}u_B(x)/x=$$
$$\int_{x\in X}\left[\int_{w\in J_x^w}g_x(w)/w\right]\Big/x,\ J_x^w\subseteq[0,1].$$

其并运算为

$$u_{A\bigcup B}(x)=u_A(x)\Delta u_B(x)=$$
$$\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w}f_x(u)\bigwedge g_x(w)/u\bigvee w;$$

交运算为

$$u_{A\bigcap B}(x)=u_A(x)\nabla u_B(x)=$$
$$\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w}f_x(u)\bigwedge g_x(w)/u\bigwedge w;$$

补运算为

$$u_{A^c}(x)=\neg u_A(x)=\int_{u\in J_x^u}f_x(u)/(1-u).$$

其中: Δ, ∇ 和 $\neg$ 分别表示次隶属函数的join运算、meet运算和negation运算.

定理 1[18-20] 设 A, B, C 是论域 X 上的3个二型模糊集, 若对任意 $x\in X$, $u_A(x)$, $u_B(x)$, $u_C(x)$ 为标准的凸一型模糊集, 则在 $\bigcup$, $\bigcap$, c 运算下, 交换律、结合律、幂等律、对合律、De Morgan律、分配律、吸收律和两级律成立.

若 $u_A(x)$, $u_B(x)$, $u_C(x)$ 不是标准的凸一型模糊集, 则定理1的许多性质将不再成立, 例如分配律和吸收律. 另一方面, 在实际应用中, 为了便于计算, 常常选择次隶属函数为标准的凸一型模糊集, 比如常见的高斯二型模糊集和区间二型模糊集. 对此本文研究的二型模糊集和二型模糊关系具有如下性质: 次隶属函数是标准的凸一型模糊集.

定义 4[18, 20] 假如 A, B 是论域 X 上的两个二型模糊集, 规定

$$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in X,\ u_A(x)\prec u_B(x),$$

其中序关系 $\prec$ 定义为

$$u_A(x)\prec u_B(x)\Leftrightarrow u_A(x)\nabla u_B(x)=$$
$$u_A(x)\Leftrightarrow u_A(x)\Delta u_B(x)=u_B(x).$$

2 二型模糊粗糙集

二型模糊集具有处理高度不确定性的能力, 将二型模糊集与粗糙集结合研究, 具有一定的理论与应用价值. 本节将粗糙集推广到二型模糊环境中, 利用二型模糊关系定义了二型模糊粗糙集, 讨论了它和模糊粗糙集的关系, 最后研究了二型模糊粗糙集的一些基本性质. 本文用 $F_2(U)$ 表示 U 上的所有二型模糊集.

定义 5 设 R 是论域 $U\times U$ 上二型模糊关系, 称二元组 (U,R) 是二型模糊近似空间. 对于任意的 $A\in F_2(U)$, A 关于近似空间 (U,R) 的上近似和下近似是定义在 U 上的二型模糊集, 具体形式如下:

$$R(A)=\int_{x\in U}u_{R(A)}(x)/x,u_{R(A)}(x)=$$
$$\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta u_A(t)],$$
$$\bar{R}(A)=\int_{x\in U}u_{\bar{R}(A)}(x)/x,$$
$$u_{\bar{R}(A)}(x)=\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_A(t)].$$

称 $(R(A),\bar{R}(A))$ 为 A 关于 (U,R) 的二型模糊粗糙集, $R,\bar{R}:F_2(U)\to F_2(U)$ 分别为二型模糊粗糙下近似算子和二型模糊粗糙上近似算子.

若 R 退化为 U 上的模糊关系, A 退化为 U 上的一型模糊集, 则二型模糊粗糙集退化为一般的模糊粗

糙集. 事实上, 此时 A 和 R 可重新表达为

$$A=\int_{x\in X}u_A(x)/x=\int_{x\in X}\left[\int_{u\in J_x\in[0,1]}1/u\right]\Big/x;$$

$$R=\int_{(x,y)\in X\times Y}u_R(x,y)/(x,y)=\int_{(x,y)\in X\times Y}\left[\int_{p\in J_{(x,y)}\in[0,1]}1/p\right]\Big/(x,y).$$

故

$$u_{R(A)}(x)=\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta u_A(t)]=\mathop{\nabla}_{t\in U}\left[\int_{p\in J_{(x,t)}}1/(1-p)\Delta\int_{u\in J_t}1/u\right]=\mathop{\nabla}_{t\in U}\left[\int_{p\in J_{(x,t)}\in[0,1]}\int_{u\in J_t\in[0,1]}1/u\bigvee(1-p)\right]=\frac{1}{\bigwedge\limits_{t\in U}\left[\int_{p\in J_{(x,t)}\in[0,1]}\int_{u\in J_t\in[0,1]}u\bigvee(1-p)\right]}=\frac{1}{\bigwedge\limits_{t\in U}[(1-J_{(x,t)})\bigvee J_t]}.$$

类似地有

$$u_{\bar{R}(A)}(x)=\frac{1}{\bigvee\limits_{t\in U}(J_{(x,t)}\bigwedge J_t)}.$$

即二型模糊粗糙集退化为一般模糊关系下的模糊粗糙集.

下面给出二型模糊粗糙集的基本性质, 并比较二型模糊粗糙集与一型模糊粗糙集在性质方面存在的不同.

定理 2 设 $\bar{R}$ 和 R 是定义 5 中的上、下近似算子, $\forall A,B\in F_2(U)$, 则有如下性质:

1) $R^c(A^c)=\bar{R}(A)$, $\bar{R}^c(A^c)=R(A)$;

2) 若对于 $\forall x\in U$, 有 $u_A(x)=\dfrac{1}{0}$, $u_B(x)=\dfrac{1}{1}$, 则对于 $\forall x\in U$, 有 $u_{\bar{R}(A)}(x)=\dfrac{1}{0}$, $u_{R(B)}(x)=\dfrac{1}{1}$;

3) $A\subseteq B\Rightarrow\bar{R}(A)\subseteq\bar{R}(B)$, $A\subseteq B\Rightarrow R(A)\subseteq R(B)$;

4) $R(A\bigcap B)=R(A)\bigcap R(B)$, $\bar{R}(A\bigcup B)=\bar{R}(A)\bigcup\bar{R}(B)$;

5) $R(A)\bigcup R(B)\subseteq R(A\bigcup B)$, $\bar{R}(A\bigcap B)\subseteq\bar{R}(A)\bigcap\bar{R}(B)$;

6) $R_1\subseteq R_2\Rightarrow\bar{R}_1(A)\subseteq\bar{R}_2(A)$, $R_1\subseteq R_2\Rightarrow R_2(A)\subseteq R_1(A)$.

证明 1) 对于 $\forall x\in U$, 有

$$u_{R^c(A^c)}(x)=\neg\{\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta u_{A^c}(t)]\}=\mathop{\Delta}_{t\in U}[\neg u_{R^c(x,t)}\nabla\neg u_{A^c}(t)]=\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_A(t)]=u_{\bar{R}(A)}(x),$$

则 $R^c(A^c)=\bar{R}(A)$. 类似地, $\bar{R}^c(A^c)=R(A)$.

2) 由定义可直接得到.

3) 由于 $A\subseteq B$, 对于 $\forall x\in U$, $u_A(x)\prec u_B(x)$, 则对于 $\forall x\in U$, 有

$$u_{\bar{R}(A)}(x)=\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_A(t)]\prec\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_B(t)]=u_{\bar{R}(B)}(x),$$

即 $\bar{R}(A)\subseteq\bar{R}(B)$. 类似地, $A\subseteq B\Rightarrow R(A)\subseteq R(B)$.

4) 对于 $\forall x\in U$, 有

$$u_{R(A\bigcap B)}(x)=\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta u_{A\bigcap B}(t)]=\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta(u_A(t)\nabla u_B(t))]=\mathop{\nabla}_{t\in U}\{[u_{R^c(x,t)}\Delta u_A(t)]\nabla[u_{R^c(x,t)}\nabla u_B(t)]\}=\{\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta u_A(t)]\}\nabla\{\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\nabla u_B(t)]\}=u_{R(A)}(x)\nabla u_{R(B)}(x),$$

则 $R(A\bigcap B)=R(A)\bigcap R(B)$. 类似地, $\bar{R}(A\bigcup B)=\bar{R}(A)\bigcup\bar{R}(B)$.

5) 由性质 (3) 可直接得到.

6) 由于 $R_1\subseteq R_2$, 对于 $\forall x,y\in U$, 有

$$u_{R_1}(x,y)\prec u_{R_2}(x,y),\ u_{R_2^c}(x,y)\prec u_{R_1^c}(x,y).$$

因此有

$$u_{\bar{R}_1(A)}(x)=\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R_1(x,t)}\nabla u_A(t)]\prec\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R_2(x,t)}\nabla u_A(t)]=u_{\bar{R}_2(A)}(x),$$

此外,

$$u_{R_2(A)}(x)=\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R_2^c(x,t)}\Delta u_A(t)]\prec\mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R_1^c(x,t)}\Delta u_A(t)]=u_{R_1(A)}(x),$$

即 $R_1\subseteq R_2\Rightarrow\bar{R}_1(A)\subseteq\bar{R}_2(A)$, $R_1\subseteq R_2\Rightarrow R_2(A)\subseteq R_1(A)$. □

需要指出的是, 上述性质成立的前提条件是, 所有二型模糊集的次隶属函数是标准的凸一型模糊集. 如果没有此限制条件, 定理 2 的许多性质将不再成立. 事实上, 依据文献 [20] 可知, 若二型模糊集的次隶属函数不限制为标准的凸一型模糊集, 分配律、吸收律和两级律中的 $u_A(x)\nabla\dfrac{1}{0}=\dfrac{1}{0}$, $u_A(x)\Delta\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}$ 便不再成立. 由定理 2 的证明过程可见, 性质 2) 需要使用两极律, 性质 4) 需要使用分配律, 若无前述限制条件, 则定理 2 中的性质 2) 与性质 4) 就不再成立. 然而, 不论是否对一型模糊集的隶属函数有所限制, 定理 2 中的所有性质对一型模糊粗糙集都成立.

3 二型模糊关系与近似算子

本节给出二型模糊关系与上下近似算子的特征联系.

定义 6 设 R 是论域 $U\times U$ 上二型模糊关系, 则规定

1) R 是自反的 $\Leftrightarrow \forall x \in U, u_R(x,x) = \dfrac{1}{1}$;

2) R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall x, y \in U, u_R(x,y) = u_R(y,x)$;

3) R 是传递的 $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in U$,

$$\mathop{\Delta}_{y\in U}[u_R(x,y)\nabla u_R(y,z)] \prec u_R(x,z).$$

定义 7 对于 $\forall y \in U$, 二型单值模糊集 1_y 和其补集 $1_{U-\{y\}}$ 分别定义如下:

$$u_{1_y}(x) = \begin{cases} 1/1 = y, \\ 1/0 \neq y; \end{cases}$$

$$u_{1_{U-\{y\}}}(x) = \begin{cases} 1/0 = y, \\ 1/1 \neq y. \end{cases}$$

定理 3 设 (U, R) 是一个二型模糊近似空间, 则下列条件等价:

1) R 是自反二型模糊关系;

2) $\forall A \in F_2(U), \underline{R}(A) \subseteq A$;

3) $\forall A \in F_2(U), A \subseteq \bar{R}(A)$.

证明 ① "条件 1) $\Rightarrow$ 条件2)". 若 R 是自反二型模糊关系, 则对于 $\forall x \in U$, $u_R(x,x) = \dfrac{1}{1}$, 那么有 $\forall A \in F_2(U), x \in U$, 故

$$u_{\underline{R}(A)}(x) = \mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta u_A(t)] \prec$$

$$u_{R^c(x,x)}\Delta u_A(x) = u_A(x).$$

即 $\forall A \in F_2(U), \underline{R}(A) \subseteq A$.

② "条件 2) $\Rightarrow$ 条件 3)". 由定理 2 中的性质 1) 可直接得到.

③ "条件 3) $\Rightarrow$ 条件 1)". 对于 $\forall x \in U$, 令 $A = 1_x$, 于是 $1_x \subseteq \bar{R}(1_x)$, 则有

$$1/1 = u_{1_x}(x) \prec u_{\bar{R}(1_x)}(x) =$$

$$\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{1_x}(t)] = u_{R(x,x)},$$

故 $u_{R(x,x)} = 1/1$, 因此 R 是自反二型模糊关系. □

定理 4 设 (U, R) 是一个二型模糊近似空间, 则下列条件等价:

1) R 是对称二型模糊关系;

2) $\forall x, y \in U, u_{\bar{R}(1_x)}(y) = u_{\bar{R}(1_y)}(x)$;

3) $\forall x, y \in U, u_{\underline{R}(1_{U-\{y\}})}(x) = u_{\underline{R}(1_{U-\{x\}})}(y)$.

证明 ① "条件 1) $\Rightarrow$ 条件2)". 若 R 是对称二型模糊关系, 则对于 $\forall x, y \in U$, $u_R(x,y) = u_R(y,x)$, 那么有

$$u_{\bar{R}(1_x)}(y) = \mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(y,t)}\nabla u_{1_x}(t)] = u_{R(y,x)},$$

$$u_{\bar{R}(1_y)}(x) = \mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{1_y}(t)] = u_{R(x,y)}.$$

因此对于 $\forall x, y \in U, u_{\bar{R}(1_x)}(y) = u_{\bar{R}(1_y)}(x)$.

② "条件 2) $\Rightarrow$ 条件 3)". 由定理 2 中的性质 1) 可直接得到.

③ "条件 3) $\Rightarrow$ 条件 1)". 对于 $\forall x, y \in U$, 有

$$u_{\underline{R}(1_{U-\{y\}})}(x) = \mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(x,t)}\Delta u_{1_{U-\{y\}}}(t)] = u_{R^c(x,y)},$$

$$u_{\underline{R}(1_{U-\{x\}})}(y) = \mathop{\nabla}_{t\in U}[u_{R^c(y,t)}\Delta u_{1_{U-\{x\}}}(t)] = u_{R^c(y,x)}.$$

则 $u_{R^c(x,y)} = u_{R^c(y,x)}$, 即 $u_{R(x,y)} = u_{R(y,x)}$, 因此 R 是对称二型模糊关系. □

定理 5 设 (U, R) 是一个二型模糊近似空间, 则下列条件等价:

1) R 是传递二型模糊关系;

2) $\forall A \in F_2(U), \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(\underline{R}(A))$;

3) $\forall A \in F_2(U), \bar{R}(\bar{R}(A)) \subseteq \bar{R}(A)$.

证明 ① "条件 1) $\Rightarrow$ 条件3)". 若 R 是传递二型模糊关系, 则对于 $\forall x, y, z \in U$, 有

$$\mathop{\Delta}_{y\in U}[u_R(x,y)\nabla u_R(y,z)] \prec u_R(x,z).$$

而对于 $\forall A \in F_2(U), x \in U$, 有

$$u_{\bar{R}(\bar{R}(A))}(x) = \mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{\bar{R}(A)}(t)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{t\in U}\{u_{R(x,t)}\nabla[\mathop{\Delta}_{p\in U}(u_{R(t,p)}\nabla u_A(p))]\} =$$

$$\mathop{\Delta}_{t\in U}\mathop{\Delta}_{p\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{R(t,p)}\nabla u_A(p)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{p\in U}\{[\mathop{\Delta}_{t\in U}(u_{R(x,t)}\nabla u_{R(t,p)})]\nabla u_A(p)\} \prec$$

$$\mathop{\Delta}_{p\in U}[u_{R(x,p)}\nabla u_A(p)] = u_{\bar{R}(A)}(x),$$

故 $\bar{R}(\bar{R}(A)) \subseteq \bar{R}(A)$.

② "条件 3) $\Rightarrow$ 条件 1)". 对于 $\forall x, y, z \in U$, 有

$$u_{\bar{R}(1_z)}(x) = \mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{1_z}(t)] = u_{R(x,z)},$$

另外,

$$u_{\bar{R}(\bar{R}(1_z))}(x) = \mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{\bar{R}(1_z)}(t)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{t\in U}\{u_{R(x,t)}\nabla[\mathop{\Delta}_{p\in U}(u_{R(t,p)}\nabla u_{1_z}(p))]\} =$$

$$\mathop{\Delta}_{t\in U}\mathop{\Delta}_{p\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{R(t,p)}\nabla u_{1_z}(p)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{p\in U}\{[\mathop{\Delta}_{t\in U}(u_{R(x,t)}\nabla u_{R(t,p)})]\nabla u_{1_z}(p)\} =$$

$$\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{R(t,z)}],$$

因为条件 3) 成立, 所以 $u_{\bar{R}(\bar{R}(1_z))}(x) \prec u_{\bar{R}(1_z)}(x)$, 即 $\mathop{\Delta}_{t\in U}[u_{R(x,t)}\nabla u_{R(t,z)}] \prec u_{R(x,z)}$. 因此 R 是传递二型模糊关系.

③ "条件 2) $\Leftrightarrow$ 条件 3)". 由定理 2 中的性质 1) 可直接得到. □

4 近似算子的公理化定义

在二型模糊粗糙集的公理化方法中, 基本概念是系统 $(F_2(U), \bigcap, \bigcup, c, L, H)$, 其中 $L, H : F_2(U) \to F_2(U)$ 是两个一元算子. 本节讨论二型模糊粗糙近似算子的公理化描述.

定义 8　算子 $L, H: F_2(U) \to F_2(U)$ 称为是对偶的, 如果对于 $A \in F_2(U)$, 它们满足

1) $L(A) = H^c(A^c)$;

2) $H(A) = L^c(A^c)$.

定义 9　在论域 U 上, 称每点次隶属函数都相同的二型模糊集为常二型模糊集, 具体形式如下:

$$\widehat{\alpha} = \int_{x \in U} u_{\widehat{\alpha}}(x)/x = \int_{x \in U} \alpha/x.$$

其中: $\widehat{\alpha}$ 是常二型模糊集, α 是次隶属函数.

引理 1　设 $\bar{R}$, R 是定义 5 中的上、下近似算子, 则对于 $\forall A \in F_2(U)$, 以及任意常二型模糊集 $\widehat{\alpha}$, 有以下关系成立:

$$\bar{R}(A \bigcap \widehat{\alpha}) = \bar{R}(A) \bigcap \widehat{\alpha},\ R(A \bigcup \widehat{\alpha}) = R(A) \bigcup \widehat{\alpha}.$$

证明　对于 $\forall x \in U$, 有

$$u_{\bar{R}(A \bigcap \widehat{\alpha})}(x) = \mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{R(x,t)} \nabla u_{A \bigcap \widehat{\alpha}}(t)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{R(x,t)} \nabla u_A(t) \nabla u_{\widehat{\alpha}}(t)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{R(x,t)} \nabla u_A(t) \nabla \alpha] = \mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{R(x,t)} \nabla u_A(t)] \nabla \alpha =$$

$$u_{\bar{R}(A)}(x) \nabla u_{\widehat{\alpha}}(x) = u_{\bar{R}(A) \bigcap \widehat{\alpha}}(x).$$

则 $\bar{R}(A \bigcap \widehat{\alpha}) = \bar{R}(A) \bigcap \widehat{\alpha}$.

类似地, $R(A \bigcup \widehat{\alpha}) = R(A) \bigcup \widehat{\alpha}$. □

引理 2　对于 $\forall A \in F_2(U)$, 以及任意常二型模糊集 $\widehat{\alpha}$, 则 $A = \bigcup\limits_{y \in U} [1_y \bigcap \widehat{u}_A(y)]$.

证明　对于 $\forall x \in U$, 有

$$u_{\bigcup\limits_{y \in U} [1_y \bigcap \widehat{u}_A(y)]}(x) = \mathop{\Delta}_{y \in U} u_{1_y \bigcap \widehat{u}_A(y)}(x) =$$

$$\mathop{\Delta}_{y \in U} [u_{1_y}(x) \nabla u_{\widehat{u}_A(y)}(x)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{y \in U} [u_{1_y}(x) \nabla u_A(y)] = u_A(x),$$

故 $A = \bigcup\limits_{y \in U} [1_y \bigcap \widehat{u}_A(y)]$. □

引理 3　对 $\forall A \in F_2(U)$, 以及任意常二型模糊集 $\widehat{\alpha}$, 有 $A = \bigcap\limits_{y \in U} [1_{U-\{y\}} \bigcup \widehat{u}_A(y)]$.

证明　对于 $\forall x \in U$, 有

$$u_{\bigcap\limits_{y \in U} [1_{U-\{y\}} \bigcup \widehat{u}_A(y)]}(x) = \mathop{\nabla}_{y \in U} u_{1_{U-\{y\}} \bigcup \widehat{u}_A(y)}(x) =$$

$$\mathop{\nabla}_{y \in U} [u_{1_{U-\{y\}}}(x) \Delta u_{\widehat{u}_A(y)}(x)] =$$

$$\mathop{\nabla}_{y \in U} [u_{1_{U-\{y\}}}(x) \Delta u_A(y)] = u_A(x),$$

故 $A = \bigcap\limits_{y \in U} [1_{U-\{y\}} \bigcup \widehat{u}_A(y)]$. □

定理 6　设 $L, H: F_2(U) \to F_2(U)$ 是一对对偶一元算子, 则存在一个 U 上的二型模糊关系 R 使 $L(A) = \underline{R}(A)$, $H(A) = \bar{R}(A)$ 对任意 $A \in F_2(U)$ 都成立的充分必要条件是 H 满足如下性质:

1) $H(A \bigcap \widehat{a}) = H(A) \bigcap \widehat{a}$;

2) $H(A \bigcup B) = H(A) \bigcup H(B)$.

其中: $A, B \in F_2(U)$, $\widehat{a}$ 为任意常二型模糊集.

证明　基于算子 H 定义 $U \times U$ 上的二型模糊关系 R 为 $u_R(x, y) = u_{H(1_y)}(x)$, 对于 $\forall x \in U$, 有

$$u_{\bar{R}(A)}(x) = \mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{R(x,t)} \nabla u_A(t)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{H(1_t)}(x) \nabla u_{\widehat{u}_A(t)}(x)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{H(1_t) \bigcap \widehat{u}_A(t)}(x)] =$$

$$\mathop{\Delta}_{t \in U} [u_{H(1_t \bigcap \widehat{u}_A(t))}(x)] = u_{\bigcup\limits_{t \in U} H(1_t \bigcap \widehat{u}_A(t))}(x) =$$

$$u_{H(\bigcup\limits_{t \in U} (1_t \bigcap \widehat{u}_A(t)))}(x) = u_{H(A)}(x),$$

则 $H(A) = \bar{R}(A)$, 再由对偶性易证 $L(A) = R(A)$. □

定理 7　设 $L, H: F_2(U) \to F_2(U)$ 是一对对偶一元算子, 则存在一个 U 上的二型模糊关系 R 使 $L(A) = \underline{R}(A)$, $H(A) = \bar{R}(A)$ 对任意 $A \in F_2(U)$ 都成立的充分必要条件是 L 满足如下性质:

1) $L(A \bigcup \widehat{a}) = L(A) \bigcup \widehat{a}$;

2) $L(A \bigcap B) = L(A) \bigcap L(B)$.

其中: $A, B \in F_2(U)$, $\widehat{a}$ 为任意常二型模糊集.

证明　基于算子 L 定义 $U \times U$ 上的二型模糊关系 R 为 $u_{R^c}(x, y) = u_{L(1_{U-\{y\}})}(x)$, 对于 $\forall x \in U$, 有

$$u_{\underline{R}(A)}(x) = \mathop{\nabla}_{t \in U} [u_{R^c(x,t)} \Delta u_A(t)] =$$

$$\mathop{\nabla}_{t \in U} [u_{L(1_{U-\{t\}})}(x) \Delta u_{\widehat{u}_A(t)}(x)] =$$

$$\mathop{\nabla}_{t \in U} [u_{L(1_{U-\{t\}}) \bigcup \widehat{u}_A(t))}(x)] =$$

$$\mathop{\nabla}_{t \in U} [u_{L(1_{U-\{t\}} \bigcup \widehat{u}_A(t))}(x)] =$$

$$u_{\bigcap\limits_{t \in U} L(1_{U-\{t\}} \bigcup \widehat{u}_A(t))}(x) =$$

$$u_{L(\bigcap\limits_{t \in U} (1_{U-\{t\}} \bigcup \widehat{u}_A(t)))}(x) = u_{L(A)}(x),$$

则 $L(A) = R(A)$, 再由对偶性易证 $H(A) = \bar{R}(A)$. □

5　结　论

本文在二型模糊环境中, 基于二型模糊关系, 首先构建了二型模糊粗糙集, 并讨论了一些基本性质; 然后, 研究了二型模糊关系与上下近似算子的特征联系; 最后, 给出了二型模糊粗糙近似算子的公理化描述. 二型模糊粗糙集为处理高度不确定性数据提供了一定的理论依据, 特别是使高度不确定数据的规则提取和知识发现拥有了一定的数学基础, 在一定程度上丰富了不确定性理论. 下一步, 可以考虑将已有的一型模糊粗糙算法推广到二型模糊粗糙环境中, 基于二型模糊粗糙集对连续数据集进行属性约简.

参考文献(References)

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Computer and Information Science, 1982, 11(5): 341-356.

[2] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991: 9-11.

[3] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(1): 338-356.

[4] Zadeh L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. Information Science, 1975, 8(2): 199-249.

[5] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[6] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications[M]. Heidelberg: Physical-Verlag, 1999: 2-10.

[7] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[8] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. Int J of General Systems, 1990, 17(2): 191-209.

[9] Cornelis C, Cock M D, Kerre E E. Intuitionistic fuzzy rough sets: At the crossroads of imperfect knowledge[J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 260-270.

[10] 徐小来, 雷英杰, 谭巧英. 基于直觉模糊三角模的直觉模糊粗糙集[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 900-904.
(Xu X L, Lei Y J, Tan Q Y. Intuitionistic fuzzy rough sets based on triangle norm[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 900-904.)

[11] Zhou L, Wu W Z. On generalized intuitionistic fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences, 2008, 178(11): 2448-2465.

[12] Zhou L, Wu W Z, Zhang W X. On characterization of intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy implicators[J]. Information Sciences, 2009, 179(7): 883-898.

[13] 路艳丽, 雷英杰, 华继学. 基于直觉模糊粗糙集的属性约简[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 335-341.
(Lu Y L, Lei Y J, Hua J X. Attribute reduction based on intuitionistic fuzzy set[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 335-341.)

[14] 张植明, 白云超, 田景峰. 基于覆盖的直觉模糊粗糙集[J]. 控制与决策, 2010, 25(9): 1369-1373.
(Zhang Z M, Bai Y C, Tian J F. Intuitionistic fuzzy rough sets based on coverings[J]. Control and Decision, 2010, 25(9): 1369-1373.)

[15] Jensen R, Shen Q. Fuzzy-rough attribute reduction with application to web categorization[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 144(3): 469-485.

[16] Bhatt R B, Copal M. On fuzzy-rough sets approach to feature selection[J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(7): 965-975.

[17] 潘永平, 黄道平, 孙宗海. II型模糊控制综述[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(1): 13-23.
(Pan Y P, Huang D P, Sun Z H. Overview of type-2 fuzzy logic control[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(1): 13-23.)

[18] Mendel J M. Uncertain rule-based fuzzy logic systems: Introduction and new directions[M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001: 217-220.

[19] Niesh N Karnik, Jerry M Mendel. Operations on type-2 fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 327-348.

[20] Mizumoto M, Tanaka K. Some properties of fuzzy sets of type-2[J]. Information and Control, 1976, 31(4): 312-340.

(上接第384页)

[13] Tjønnås J, Johansen T A. Adaptive control allocation[J]. Automatica, 2008, 44(11): 2754-2765.

[14] Skjetne R. The manuevering problem[D]. Trondheim: Faculty of Information Technology, Mathematics, and Electrical Engineering, Norwegian University of Science and Technology, 2005.

[15] Stevens B L, Lewis F L. Aircraft control and simulation[M]. New Jersey: John Wiley and Sons, 2003: 109-110.