

文章编号: 1001-0920(2013)04-0517-08

考虑多类零售商的库存与运输 VMI 集成策略

刘丹¹, 刘志学¹, 汪小京²

(1. 华中科技大学 管理学院, 武汉 430074; 2. 宁波现代物流
规划研究院 物流组织与政策研究室, 浙江 宁波 315042)

摘要: 研究由单批发商多零售商构成的供应商管理库存(VMI)供应链, 批发商向外部供应商订货, 并为价格和缺货成本不同的零售商补货. 首先构造解析模型以分析如何为多类零售商确定不同的库存分配策略; 然后将这一最优的库存分配策略与最优的先到先服务(FCFS)策略进行比较, 同时比较相应简化的库存分配策略和简化的FCFS策略. 解析和算例结果表明, 简化的库存分配策略总是优于简化的FCFS策略, 而最优的库存分配策略大部分情况下优于最优的FCFS策略.

关键词: 库存分配; 运输; 供应商管理库存; 先到先服务

中图分类号: F224

文献标志码: A

An integrated inventory and shipment model with multi-retailers in vendor-managed inventory system

LIU Dan¹, LIU Zhi-xue¹, WANG Xiao-jing²

(1. School of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. Research Office of the Logistics Organization and Policy, Ningbo Logistics Planning Institution, Ningbo 315042, China. Correspondent: LIU Dan, E-mail: minahaen@163.com)

Abstract: This paper considers a vendor-managed inventory(VMI) system with one wholesaler and multiple retailers. The wholesaler replenishes its inventory from an outside supplier, and ships them to different retailers who are distinguished by their contractual prices and backorder costs. An analytical model is proposed to coordinate the inventory and shipment decisions, and ration inventory among various retailers. Firstly, the optimal rationing policy is compared with the optimal first-come first serviced(FCFS) policy. Then the reduced rationing policy is compared with the reduced FCFS policy. The results show that the performance under the reduced rationing policy is always better than that of reduced FCFS policy, while the optimal rationing policy is superior to the optimal FCFS policy most of the time.

Key words: inventory rationing; shipment; vendor-managed inventory; first come first served

0 引言

供应商管理库存(VMI)作为一种供应链的协调策略在多个行业得到普及, 如个人电脑、汽车等行业. 实施VMI策略的供应商不仅要负责下游客户的库存补货, 还要决定自身的库存补货策略, 因而它能更好地协同其库存的补货和出库策略. 基于VMI的这种特性, 很多研究都在VMI的框架下探讨如何同时决定库存的补货和发货策略, 以更好地节约成本、提高利润. 除了VMI策略外, 另一个较为常用的绩效改善策略是实施客户分类, 进行差异化管理. 如奇瑞汽车根据经销商销售额度的高低将其分为A、B、C三类, 实

行差异化的奖励返利政策.

目前, 关于库存和发货集成策略的研究大多假定采用特殊的发货策略, 如基于时间的发货策略、基于数量的发货策略和混合发货策略. 文献[1]采用基于时间的发货策略, 补货策略为 (s, S) 策略, 其中 $s = 0$, $S = Q$. 同时假定需求为泊松分布, 并采用解析的方法确定补货和发货的频率. 文献[2]在文献[1]的基础上考察 $s = -1$, $S = Q$ 的 (s, S) 策略, 并采用一个更准确的方法分析文献[1]中的问题. 而文献[3]将运输成本结构和运输车辆容量限制考虑到库存运输集成模型中, 但其假定需求是确定的. 文献[4]采取基于时间

收稿日期: 2011-12-08; 修回日期: 2012-03-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71072034).

作者简介: 刘丹(1987-), 女, 博士生, 从事物流与供应链管理的研究; 刘志学(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理等研究.

的发货策略,并探讨集货运输对长期平均成本的影响.还有一些学者考虑不同的库存成本结构^[5-7],有些研究则考虑动态需求的情形^[8].以上这些解析模型都聚焦于同质的零售商,且未考虑如何利用不同零售商之间的差别来更好地降低成本.关于多类客户的问题总是与库存分配策略有关.Veinott^[9]于1965年首次探讨了多类客户等级库存问题.文献[10-12]综述了关于库存分配的研究.考虑库存分配策略的研究一般是提出最优的库存分配策略及其特征,并为每类客户都设定一个临界值,超过这一临界值,则不再满足此类客户的需求^[13-14].还有些学者考虑了有限的生产能力和运输决策^[10,15].文献[16]则将运输成本考虑到库存分配决策中.

与上述研究不同,本文将在库存补货与运输集成策略的基础上考虑库存分配策略.批发商利用不同零售商之间的差异,为每类零售商设立需求满足优先等级,通过推迟低等级零售商的需求以更多地满足高等级零售商的需求.但本文并不试图证明该分配策略的最优性,而是重点探讨考虑库存分配策略后系统绩效如何变化.求解该给定库存分配策略下决策值的关键在于:分配库存满足不同零售商的需求,并同时获得集货运输的好处.

本文首先提出最优的库存分配策略,求解相应最优的库存运输策略,在此基础上简化最优库存运输分配策略的结构,获得较易实施的简化库存运输分配策略;然后,不对零售商进行分类,采取先到先服务(FCFS)策略,并提出最优的库存运输策略,同时给出简化的FCFS库存运输策略;最后,通过模型比较了简化的最优库存运输分配策略和简化的最优库存运输策略,并通过算例比较了4种策略下系统的绩效.

1 建模与求解

1.1 问题描述

考虑一个由单批发商多零售商构成的VMI系统,如图1所示.

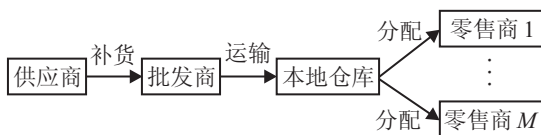


图1 单批发商多零售商 VMI 供应链结构图

批发商向具有无限供应能力的外部供应商订货,并将库存发送至离 M 个零售商较近的本地仓库以满足需求.不同零售商的价格和缺货成本不同.假定零售商和本地仓库的地理位置较近,因而从本地仓库发至零售商的运输成本可以忽略不计.每当零售商的订单到达时,批发商需决定是否立即满足该零售商的需求,

或者推迟至下一个发货周期进行满足.此决定称为库存分配策略.

批发商每隔 nT 周期向上游补货 Q_R , 并产生固定补货成本 A_R ; 同时每隔 T 周期向下游本地仓库发货, 在每个补货周期内一共发 n 次, 第 k 次发货的数量为 $Q_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 并产生固定运输成本 A_S . 此外, 假定所有未满足的需求都缺货回补. 由于非零提前期的问题可以很容易转化为零订货提前期问题, 本文假定补货提前期和运输提前期均为 0.

综上, 对于批发商而言, 需决定补货/运输周期和库存分配策略以最大化平均利润.

根据上述模型假设, 引入如下符号.

T : 运输周期;

i : 零售商等级, 其中 $i = 1, 2, \dots, M$;

P_i : 第 i 类零售商的成交价格;

b_i : 第 i 类零售商的缺货成本(单位时间单个物品);

A_R : 补货固定成本;

A_S : 运输固定成本;

c_R : 单位补货成本;

c_S : 单位运输成本;

Q_R : 每个补货周期内的补货数量;

Q_k : 第 k 个运输周期内的运输数量, 其中 $1 \leq k \leq n$;

h_v : 批发商处单位库存持有成本;

h_w : 本地仓库单位库存持有成本;

$x^+ = \max\{x, 0\}$.

不失一般性, 假定不同零售商的价格关系为 $P_M \geq \dots \geq P_1$, 即零售商等级越高, 价格越高. 同理, 假定 $b_M \geq \dots \geq b_1$, 并引入另一个假定 $b_0 = 0$. 此外, 还有一个重要假设是 $h_v \leq h_w$, 将在第 1.3 节中解释这一假定.

1.2 模型构建

在第 k 个运输周期, 定义 $r_{ki} \in [0, 1]$ 为第 i 类零售商的即时满足率, 令

$$y_{kit} = \begin{cases} 1, & \text{时刻 } r_{ki}T \text{ 为第 } i \text{ 类零售商提供即时服务;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令 $\pi(n, T, y)$ 表示长期平均利润, 批发商需决定最优的运输周期 t 、补货周期 nT 和库存分配策略 $Y = \{y_{kit}\}$, 以最大化期望平均利润. 在每个补货周期, 总收益为 $R = n \sum_{i=1}^M P_i \lambda_i T$. 在每个运输周期, 第 i 类

零售商被即时满足的需求为 $\int_0^T \lambda_i y_{kit} dt$, 推迟至下期满足的需求为 $\int_0^T \lambda_i (1 - y_{kit}) dt$. 总成本包括: 补货固

定成本和变动成本、运输成本、缺货成本、批发商处的库存持有成本和本地仓库的库存持有成本. 各项成本表达式如下:

1) 补货成本

$$C_R = A_R + c_R Q_R;$$

2) 运输成本

$$C_S = \sum_{i=1}^n (A_S + c_S Q_k) = n A_S + c_S Q_R;$$

3) 缺货回补成本

$$B = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^M \lambda_i \int_0^T (1 - y_{kit}) b_i (T - t) dt;$$

4) 批发商处的持货成本

$$H_v = \sum_{k=1}^n (k - 1) Q_k T h_v;$$

5) 本地仓库的持货成本

$$h_w = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^M \lambda_i h_w \int_0^t t y_{kit} dt.$$

长期平均利润为

$$\pi(n, T, Y) = \frac{1}{nT} \left(n \sum_{i=1}^M P_i \lambda_i T - C_R - C_S - B - H_v - H_w \right). \quad (1)$$

问题可以描述为

$$\max \pi(n, T, y).$$

$$\text{s.t. } y_{kit} = 1 \text{ or } 0, i \in M \text{ and } r_{ki} \in [0, 1];$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^M \lambda_i (r_{ki} + (1 - r_{(k-1)t})) T, 2 \leq k \leq n;$$

$$Q_1 = n \sum_{i=1}^M \lambda_i T - \sum_{i=2}^n Q_k T \geq 0, n \in Z;$$

$$Q_R = n \sum_{i=1}^M \lambda_i T. \quad (2)$$

1.3 模型求解

库存分配策略 Y^* : 给定运输周期 T 和 n , 有

$$r_{ki}^* = \begin{cases} \frac{b_i + h_v}{b_i + h_w}, & 1 \leq k \leq n - 1; \\ \left\{ \frac{b_i - (n - 1)h_v}{b_i + h_w} \right\}^+, & k = n. \end{cases}$$

于是库存分配策略 Y^* 可以表示为

$$y_{kit} = \begin{cases} 1, & t \leq r_{ki}^* T; \\ 0, & t > r_{ki}^* T. \end{cases} \quad (3)$$

证明 固定 n 和 T , $\pi(n, T, Y)$ 最大化的必要条件为 $\partial \pi(n, T, Y) / \partial r_{ki} = 0$. $\pi(n, T, Y)$ 可以表示为

$$\pi(n, T, Y) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{nT} \left(n \sum_{i=1}^M P_i \lambda_i T - A_R - c_R Q_R - n A_S - c_S Q_R - \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^M \lambda_i b_i \left(\frac{1}{2} T^2 - r_{ki} T^2 + \frac{1}{2} r_{ki}^2 T^2 \right) + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v T^2 \sum_{k=1}^{n-1} r_{ki} - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v T^2 (n - 1) r_{ni} - \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^M \frac{n(n - 1)}{2} \lambda_i h_w T^2 - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} \lambda_i h_w r_{ki}^2 T^2 \right). \end{aligned}$$

因而

$$r_{ki}^* = \begin{cases} \frac{b_i + h_v}{b_i + h_w}, & 1 \leq k \leq n - 1; \\ \left\{ \frac{b_i - (n - 1)h_v}{b_i + h_w} \right\}^+, & k = n. \end{cases} \quad \square$$

在每个运输周期内, r_{ki}^* 是第 i 类零售商的最大需求满足时刻, 即批发商只满足第 i 类零售商在此时刻之前的需求, 并推迟其他需求至下一个运输周期. 在第 1.1 节中曾假定 $h_v \leq b_w$, 若无此假定, 则 $r_{ki}^* \geq 1$, 与 r_{ki}^* 的定义相悖. r_{ki}^* 反映了两种不同的权衡因素: h_w 与 b_i 的权衡, 这与 EOQ 模型类似. 另一个权衡为 h_w 与 h_v , 若 $h_v \leq h_w$, 则批发商可以将更多的库存存放在批发商处并推迟满足零售商的需求至下个周期以节约库存持有成本. 此外, 因每个补货周期的最后一个运输周期内未被满足的需求将在下一个补货周期初得到满足, 此时批发商不需负担这一部分的库存成本, 故最后一个运输周期的分配策略与其他各期不同. 如果缺货成本相对于持货成本较小, 则批发商可以选择将最后一个运输周期的需求全部推迟到下一个补货周期, 此时成本不会增加.

引理 1 在每个运输周期 T 内, 等级高的零售商有更大的即时满足率, 即 $r_{ki}^* \leq \dots \leq r_{kM}^*$.

证明 令 $1 \leq i \leq j \leq M$, 此时 $b_i \leq b_j$. 如果 $1 \leq k \leq n - 1$, 则有

$$\begin{aligned} r_{kj}^* - r_{ki}^* &= \frac{b_j + h_v}{b_j + h_w} - \frac{b_i + h_v}{b_i + h_w} = \\ & (h_w - h_v) \left(\frac{1}{b_i + h_w} - \frac{1}{b_j + h_w} \right), \end{aligned}$$

显然 $r_{kj}^* \geq r_{ki}^*$ 总是成立. 如果 $k = n$, 则以上结果依然成立. \square

在给定库存分配策略后, 将计算最优的运输周期 T^* 和 n^* .

定理 1 1) 给定库存分配策略 Y^* 和 n , 最优的运输周期 T 满足如下条件:

$$T^* = \sqrt{\frac{2(nA_S + A_R)}{(\psi + \phi)}}.$$

其中

$$\begin{aligned}\psi &= (n^* - 1) \left(\sum_{i=1}^M \frac{h_w b_i + h_v^2}{h_w + b_i} + n^* \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v - \right. \\ &\quad \left. 2 \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{h_v + b_i h_v}{h_w + b_i} \right), \\ \phi &= \sum_{i=m+1}^M \lambda_i \frac{h_w b_i + ((n^* - 1)h_v)^2}{h_w + b_i} + \\ &\quad 2(n^* - 1) \sum_{i=m+1}^M \lambda_i \frac{b_i - (n^* - 1)h_v}{h_w + b_i} h_v,\end{aligned}$$

$$m = \operatorname{argmax}\{i, b_i \leq (n - 1)h_v\}.$$

2) 给定库存分配策略 Y^* , 存在唯一的 n^* 最大化 $\pi(n, T, Y)$. 当 $h_v = h_w$ 时, $n^* = 1$.

证明 1) 给定如式(3)所示的库存分配策略, 可得

$$\begin{aligned}\pi(n, T, Y) &= \sum_{i=1}^M P_i \lambda_i - \sum_{i=1}^M \lambda_i (c_R + c_S) - \\ &\quad (nA_S + A_R) \frac{1}{nT} - (\psi + \phi) \frac{T}{2n}.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\psi &= (n^* - 1) \left(\sum_{i=1}^M \frac{h_w b_i + h_v^2}{h_w + b_i} + n^* \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v - \right. \\ &\quad \left. 2 \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{h_v + b_i h_v}{h_w + b_i} \right), \\ \phi &= \sum_{i=m+1}^M \lambda_i \frac{h_w b_i + ((n^* - 1)h_v)^2}{h_w + b_i} + \\ &\quad 2(n^* - 1) \sum_{i=m+1}^M \lambda_i \frac{b_i - (n^* - 1)h_v}{h_w + b_i} h_v,\end{aligned}$$

$$m = \operatorname{argmax}\{i, b_i \leq (n - 1)h_v\}.$$

令

$$\frac{\partial \pi}{\partial T} = (nA_S + A_R) \frac{1}{nT^2} - (\psi + \phi) \frac{1}{2n} = 0,$$

此时

$$T^* = \sqrt{\frac{2(nA_S + A_R)}{(\psi + \phi)}},$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial T^2} = -A_S + \frac{A_R}{n} \frac{1}{T^3} < 0.$$

因而 T^* 能最大化利润 $\pi(n, T, Y)$.

2) 假定

$$\begin{aligned}\pi(x, y) &= \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^M P_i \lambda_i y - C_R - C_S - B - H_v - H_w \right) / xy.\end{aligned}$$

其中: $x > 0, y > 0, \pi(x, y)$ 是一个二元连续函数. 假定 ϵ 和 ν 为任意小的实数, θ 和 ρ 为足够大的实数. 实际中 x 会落入区间 (ϵ, θ) , 而 y 会落入区间 (ν, ρ) . 根据二元连续函数的性质, $\pi(x, y)$ 的值将会落在一个封闭的区域, 因此, 存在唯一的 (x, y) 值使 $\pi(x, y)$ 最大化. 若

将 (x, y) 替代为 (n, T) , 则此结果也同样适用, 不过此时 n 必须为整数. 当 $h_w = h_v$ 时, 若批发商在补货后未尽快发货至本地仓库, 则只会增加固定运输成本, 不会节省任何的持货成本. 因而 $n^* = 1$ 合理. \square

定理1表明计算 n^* 有一点困难, 因为在最后一个运输周期的库存分配策略结构与其他运输周期不同, 而不同的 h_w, b_i 和 h_v 会带来不同的 r_{ki}^* , 进而增加了求解和分析的难度. 若将 r_{kn}^* 简化为 r_{ki}^* ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), 则可以获得如下的 R 策略.

定理2 1) 库存分配策略 R . 给定运输周期 T 和 n , 令 $r_{ki}^R = (b_i + h_v)/(b_i + h_w)$ 代表第 i 类零售商的满足率, 此时

$$y_{kit} = \begin{cases} 1, & t \leq r_{ki}^R T; \\ 0, & t > r_{ki}^R T. \end{cases} \quad (4)$$

2) 运输策略. 给定库存分配策略 R 和运输频率 n^R , 则存在唯一的运输周期 T^R 满足条件

$$T^R = \sqrt{\frac{2(A_S + A_R/n)}{\psi^R + (n - 1)\phi^R}}.$$

其中

$$\psi^R = \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{h_w b_i + h_v^2}{h_w + b_i}, \quad \phi^R = \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v.$$

3) 补货策略. 给定库存分配策略 R , 如果 $\psi^R - \phi^R > 0$, 则最优的 n^R 满足条件 $n^R(n^R - 1) \leq (A_R(\psi^R - \phi^R))/A_S\phi^R \leq n^R(n^R + 1)$; 否则 $n^R = 1$.

证明 运输策略证明. 给定如式(4)中的库存分配策略 R , 则有

$$\begin{aligned}\pi(n, T, Y) &= \sum_{i=1}^M P_i \lambda_i - \sum_{i=1}^M \lambda_i (c_S + c_R) - \\ &\quad (nA_S + A_R) \frac{1}{nT} - (\psi^R + (n - 1)\phi^R) \frac{T}{2}.\end{aligned}$$

其中

$$\psi^R = \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{h_w b_i + h_v^2}{h_w + b_i}, \quad \phi^R = \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v.$$

令

$$\frac{\partial \pi}{\partial T} = (nA_S + A_R) \frac{1}{nT^2} - \frac{1}{2}(\psi^R + (n - 1)\phi^R) = 0,$$

则

$$T^R = \sqrt{\frac{2(A_S + A_R/n)}{\psi^R + (n - 1)\phi^R}},$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial T^2} = -2 \frac{(A_S + A_R/n)}{T^3} < 0.$$

因而 T^R 能最大化 $\pi^R(n, T, Y)$.

补货策略证明. 将 t 替代为 T^R , 则可得

$$\text{ATC}(n)^2 =$$

$$\left(\pi^R(n, T, Y) - \sum_{i=1}^M P_i \lambda_i - \sum_{i=1}^M (c_R + c_S) \lambda_i \right)^2 =$$

$$2\left(nA_S\psi^R + \frac{1}{n}A_R(\psi^R - \phi^R) + A_R\phi^R + A_S(\psi^R - \phi^R)\right).$$

显然, 能最小化 $ATC(n)^2$ 的 n 也能最大化 $\pi(n, T, Y)$. 若 $\psi^R - \phi^R \leq 0$, 则 $ATC(n)^2$ 会随 n 增加而增加, 因而当 $n_R = 1$ 时, $ATC(n)^2$ 最小. 令

$$ATC(n)^2 - ATC(n+1)^2 \leq 0, \\ ATC(n)^2 - ATC(n-1)^2 \leq 0.$$

若 $\psi^R - \phi^R > 0$, 则最优的 n^* 满足条件

$$n^R(n^R - 1) \leq \frac{A_R(\psi^R - \phi^R)}{A_S\phi^R} \leq n^R(n^R + 1). \quad \square$$

2 FCFS 策略

为探讨库存分配策略对整个系统的影响, 这里分析一个比较简单的 FCFS 策略, 令上标 f 代表最优的 FCFS 策略 F^* . 与上文所提出的库存分配策略不同, 批发商并不会区分不同的零售商, 并推迟满足低等级零售商的需求以优先满足高等级零售商的需求, 他会一直满足零售商的需求直到库存耗尽. 采用类似的分析过程, 可以获得如下最优的 FCFS 策略 F^* .

定理 3 1) 令

$$r_{ki}^f = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i(b_i + h_w)}{M}, & 1 \leq k \leq n-1; \\ \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i(b_i + h_w)}{M} \\ \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i(b_i - (n-1)h_w)}{\sum_{i=1}^M \lambda_i(b_i + h_w)}, & k = n. \end{cases}$$

此时 FCFS 策略 F^* 可以表示为

$$y_{kit} = \begin{cases} 1, & t \leq r_{ki}^f T; \\ 0, & t > r_{ki}^f T. \end{cases} \quad (5)$$

2) 给定 FCFS 策略 F^* 和 n^f , 存在唯一的最优运输周期 $T^f = \sqrt{\frac{2(n^f A_S + A_R)}{\psi^f + \phi^f}}$. 其中

$$\psi^f = (n^f - 1) \left(\frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i h_w \sum_{i=1}^M \lambda_i b_i + \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i h_w \right)^2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} + \right.$$

$$\left. n^f \sum_{i=1}^M \lambda_i h_w - 2 \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} h_w \right),$$

$$\phi^f =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i h_w \sum_{i=1}^M \lambda_i b_i + \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i h_w \right)^2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} + \\ & 2(n^f - 1) \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i - (n^f - 1)h_w)}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} h_w, \\ & \sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i - (n^f - 1)h_w) > 0; \\ & 0, \text{ 其他.} \end{aligned} \right.$$

3) 给定 FCFS 策略 F^* , 存在唯一最优的 n^f 最大化 $\pi(n, T, Y)$. 当 $h_w = h_v$ 时, $n^f = 1$.

定理 3 的证明过程与定理 1 类似, 此处略去.

引理 2 与最优的 FCFS 策略 F^* 相比, 最优的库存分配策略 Y^* 可以提高高等级零售商的即时满足率.

证明 令 $i = j, 1 \leq j \leq M$. 当 $1 \leq k \leq n-1$ 时, 有

$$r_{kj}^* - r_{ki}^f = \frac{b_j + h_w}{b_j + h_w} - \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} = \frac{h_w - h_v}{(b_j + h_w) \sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^M \lambda_i b_j \right).$$

若 $\sum_{i=1}^M \lambda_i b_i \leq \sum_{i=1}^M \lambda_i b_j, r_{kj}^* \leq r_{ki}^f$, 则有更多的库存分配给第 j 类零售商, 并提高其满足率; 反之亦然.

考察两种极端情况: 若 $j = M$, 则 $r_{kj}^* \geq r_{ki}^f$ 总是成立, 此等级零售商总能获得更多的库存; 若 $j = 1$, 则 $r_{kj}^* \leq r_{ki}^f$ 也总是成立, 此等级零售商获得的库存总是比较少.

当 $k = n$ 时, 上述结果也同样成立. \square

库存分配策略总是能改进高等级零售商的即时满足率, 并提高利润. 然而库存分配策略能多大程度改善系统的绩效将取决于系统参数, 第 4 节将具体探讨这个问题. 下面简化 FCFS 策略并获得与定理 2 类似的简化 FCFS 策略 F .

定理 4 1) FCFS 策略 F . 给定运输周期 T 和 n , 令

$$r_{ki}^F = \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w) \right) / \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w) \right),$$

此时 FCFS 策略 F 可以表示为

$$y_{kit} = \begin{cases} 1, & t \leq r_{ki}^F T; \\ 0, & t > r_{ki}^F T. \end{cases} \quad (6)$$

2) 运输策略. 给定如上的 FCFS 策略 F 和运输频率 n^F , 存在唯一最优的运输周期

$$T^F = \sqrt{\frac{2(A_S + A_R/n^F)}{\psi^F + (n^F - 1)\phi^F}}.$$

其中

$$\psi^F = \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i b_i \sum_{i=1}^M \lambda_i h_w + \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i h_v\right)^2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)},$$

$$\phi^F = \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v.$$

3) 补货策略. 给定 FCFS 策略 F , 若 $\psi^F - \phi^F > 0$, 则最优的 n^F 满足条件

$$n^F(n^F - 1) \leq \frac{A_R(\psi^F - \phi^F)}{A_S \phi^F} \leq n^F(n^F + 1);$$

否则 $n^F = 1$.

证明过程与定理 2 类似, 在此略去.

引理 3 库存分配策略 R 下的运输周期总是等于或者长于 FCFS 策略 F . 若所有的缺货成本相同, 则这两个运输周期将相同. 相应地, 采用库存分配策略 R 的平均利润总是等于或者高于采用 FCFS 策略 F 的平均利润.

证明 给定 n , 比较 T^R 和 T^F , 其差别来源于 ψ^R 和 ϕ^F . 为完成证明, 只需证明 $\psi^R \geq \phi^F$. 因为

$$\begin{aligned} \psi^R - \phi^F &= \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i b_i \sum_{i=1}^M \lambda_i h_w + \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i h_v\right)^2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v \\ &= \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{h_w b_i + h_v^2}{h_w + b_i}}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_v \\ &= \frac{(h_w^2 - h_v^2)}{\sum_{i=1}^M \lambda_i (b_i + h_w)} \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i\right)^2 \right) + \\ &\quad \sum_{i \neq j; i, j=1}^M \lambda_i \lambda_j \left(\frac{b_i + h_v}{b_j + h_w} + \frac{b_j + h_v}{b_i + h_w} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\psi^F - \phi^R \geq 0. \quad (7)$$

采用式 (7), 并比较定理 2 的 3) 和定理 4 的 3) 中的 n^R 和 n^F , 可以容易证明 $n^R \leq n^F$. 将 ψ^F 降低至 n^R , $A_S + A_R/n^F$ 会增加至 $A_S + A_R/n^R$, $(n^F - 1)\phi^F$ 会减少至 $(n^F - 1)\phi^R$, 从而导致 T^R 等于或大于 T^F , 当且仅当 $b_i = b_j (i \neq j)$ 时, 等号才成立. 相应地, 在库存

分配策略 R 下的平均利润等于或大于 FCFS 策略 F . 证明过程此处略去. \square

3 算例分析

本节首先比较最优的库存分配策略 Y^* 与最优的 FCFS 策略 F^* 的总体绩效, 然后考察不同参数对库存分配效果的影响. 为简化分析, 假定 $M = 2$, $P_1 = 20$, $P_2 = 30$, $c_R = c_S = 0$. 其他参数有多种取值组合: $A_S = 10, 20, 40$; $A_R = 80, 160, 320$; $\lambda_1 = 2, 4, 6$; $\lambda_2 = 2, 4, 6$; $h_w = 2, 4, 6$; $h_v = 2, 4, 6$; $b_1 = 2, 4$; $b_2 = 2, 4, 6$. 考虑前文的假定, 例如 $h_w \geq h_v$ 和 $b_1 \leq b_2$, 共有 2430 组算例.

3.1 库存分配策略 Y^* 与 FCFS 策略 F^* 的总体绩效比较

若 $b_1 = b_2$, 则策略 Y^* 和策略 F^* 的表现相同, 因此下面只考虑 $b_1 < b_2$ 的情况, 此时有 1458 组算例可供分析. 在所有情况中, 若采用策略 Y^* 而不是策略 F^* , 则第 1 类零售商的即时满足率总是降低, 而第 2 类零售商的即时满足率总是增加. 下面采用一些符号来代表绩效的差异. 假定 APD 代表两个策略平均利润的差异, 即 $APD = (AP_{Y^*} - AP_{F^*}) / (AP_{F^*})$. 若 $APD > 0$, 则采用策略 Y^* 所带来的利润将高于策略 F^* . 令 ArD_1 表示第 1 类客户的平均利润差异, ArD_2 表示第 2 类客户的平均利润差异; TD 表示运输周期差异, nTD 表示补货周期差异. ArD_1 、 ArD_2 、TD 和 nTD 的表达式与 APD 类似, 此处略去.

表 1 给出了库存分配策略 Y^* 与 FCFS 策略 F^* 的总体绩效比较.

表 1 库存分配策略 Y^* 与 FCFS 策略 F^* 的绩效比较 %

指标	APD	ArD ₁	ArD ₂	TD	nTD
最大值	34.3	0	50	151	46.4
最小值	-41.02	-53.85	-20	-58.87	-37.43
平均值	0.31	-14.47	6.99	11.25	-0.63
大于 0 的算例数量	1283	0	1367	1289	1003

表 1 的数据表明, 库存分配策略大部分情况下能够改善系统的绩效. 在 1458 组算例中, 有 1283 组算例的库存分配策略 Y^* 的利润高于 FCFS 策略 F^* , 且最大改善幅度高达 34.3%, 而平均利润改善程度仅为 0.31%. 相较于即时满足率, 两类零售商的平均利润显示出不一致的变化. 第 1 类零售商的平均满足率总是降低, 而第 2 类零售商的平均满足率均值为 6.99%; 但也有接近 100 组算例中第 2 类零售商的平均满足率在库存分配策略 Y^* 下有所降低. 造成此种现象的原因是运输周期延长, 运输频率降低, 使得第 2 类零售商的平均利润降低. APD 与 ArD_2 同时大于 0 的相应算例数量为 1192, 即在绝大部分情况下, 能同时改善高等级零售商的满足率和平均利润. 从表 1 中还观察

到, 即使有时两类零售商的利润率同时降低, 此时平均利润仍然会增加, 原因在于此时运输周期或补货周期被延长, 使得平均固定成本有所降低, 从而降低了总成本。

3.2 缺货成本对平均利润差异的影响

为探讨不同缺货成本对库存分配效果的影响, 假定 b_2 有多个取值, 并固定其他取值为: $A_R = 80$; $A_S = 10$; $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 6$; $h_w = 2, 4, 6, 8$; $h_v = 2$; $b_1 = 2$ 。

图2给出了缺货成本对平均利润AP的影响。

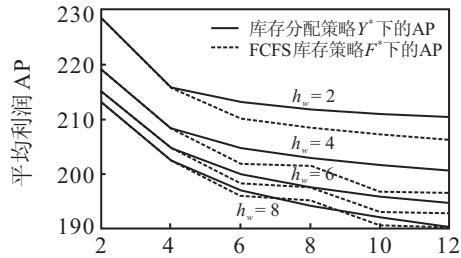


图2 缺货成本对平均利润AP的影响

从图2可以看出, 库存分配策略 Y^* 下的平均利润有时低于FCFS策略。随着 b_2 增加, 两个策略下平均利润的差异并非一直减少。当 $h_w = 4$ 时, 平均利润差异先增加, 后减少至1.26, 此后又增加。而当 b_1 与 b_2 相等时, 两个策略下的表现将一样。因此若零售商同质, 则批发商无必要对其库存进行分配。

3.3 其他参数对库存分配效果的影响

令AF1和AF2代表库存分配策略下第1类和第

2类零售商的平均满足率, 而AFf表示FCFS策略下两类零售商的平均满足率。表2列出了部分算例结果, 其中TD、nTD、APD的单位为%。下面对2430组算例中得到的一些基本结论进行分析。

总体上, 不同参数对APD的影响并非单调的。随着 A_S 、 A_R 、 λ_1 、 h_w 、 h_v 和 b_2 增加, APD并非一直增加。库存分配对系统的影响取决于所有参数的综合影响, 且库存分配改善系统绩效的幅度取决于 A_R/h_w 、 h_w/h_v 、 h_w/b_i 等的值。例如, 当 b_1 与 b_2 的差异较大时, 如 $b_2 - b_1 = 4$, 此时批发商更有可能推迟第1类零售商的需求。另外, 若第1类零售商的需求率较大, 即 λ_1 较大时, 采用库存分配策略会使运输周期缩短, 进而增加总运输成本, 由第1类零售商需求所带来的缺货成本也会增加。由于第2类零售商的满足率提高会带来缺货成本降低, 此时平均利润可能会降低, 也有可能增加(如表2中第16、17行)。事实上, 平均利润的改善程度源于3个方面因素的相互作用: 由延长的补货周期所带来的固定补货成本降低, 由延长的运输周期所带来的固定运输成本降低, 以及由两类零售商的满足率提高而导致缺货成本的降低。总之, APD取决于TD、nTD、ArD₁和ArD₂。在本文的参数设置下, 前两个因素占主导作用, 即只要TD和nTD同时大于0, APD便会大于0。只要运输周期和补货周期延长, 即使两个零售商的满足率降低, 平均利润还是会增加(如表2中的第18行)。

表2 库存分配策略 Y^* 与FCFS策略 F^* 的结果比较

Num	A_S	A_R	λ_1	λ_2	h_w	h_v	b_1	b_2	n^*	T^*	π	n_f	T_f	π_f	TD	nTD	APD	AF1	AF2	AFf
1	10	80	2	2	2	2	2	4	2	3.69	72.92	3	2.62	72.03	40.84	-6.11	1.23	0.50	0.67	0.67
2	20	80	2	2	2	2	2	4	2	4.05	70.34	1	6.45	69.02	-37.33	25.34	1.91	0.50	0.67	0.60
3	40	80	2	2	2	2	2	4	1	7.17	66.53	1	7.07	66.06	1.42	1.42	0.72	0.50	0.67	0.60
4	40	80	2	4	4	2	4	6	1	4.20	102.87	1	4.18	102.63	0.42	0.42	0.23	0.50	0.60	0.57
5	40	160	2	4	4	2	4	6	1	5.42	86.24	4	0.17	86.17	150.26	-37.43	0.09	0.50	0.60	0.59
6	40	320	2	4	4	2	4	6	4	2.65	69.60	4	2.65	69.57	0.03	0.03	0.04	0.56	0.60	0.59
7	40	160	2	6	4	2	2	6	2	2.96	139.01	1	4.74	135.67	-37.53	24.94	2.46	0.33	0.60	0.56
8	40	160	4	6	4	2	2	6	2	2.80	174.21	1	4.37	168.45	-35.97	28.05	3.42	0.33	0.60	0.52
9	40	160	6	6	4	2	2	6	2	2.66	209.67	3	2.06	209.37	28.99	-14.01	0.14	0.33	0.60	0.50
10	40	320	4	6	2	2	4	6	1	7.09	158.41	1	7.06	158.02	0.85	0.39	0.72	0.67	0.70	0.72
11	40	320	4	6	4	2	4	6	4	2.06	143.35	4	2.06	143.31	0.68	0.03	0.61	0.56	0.60	0.59
12	40	320	4	6	6	2	4	6	4	1.93	135.87	4	1.93	135.79	2.25	0.07	2.19	0.45	0.50	0.48
13	40	160	4	6	6	2	2	4	2	2.74	172.36	3	2.11	171.73	29.50	-13.67	0.37	0.25	0.40	0.38
14	40	160	4	6	6	4	2	4	2	2.94	178.32	2	2.94	178.28	0.05	0.05	0.02	0.38	0.40	0.39
15	40	160	4	6	6	6	2	4	2	2.83	175.15	2	2.83	175.15	0.00	0.00	0.00	0.50	0.50	0.50
16	10	160	6	2	6	4	2	6	2	2.54	109.22	2	2.85	116.75	-10.65	-10.65	-6.45	0.38	0.46	0.39
17	40	160	6	2	2	2	2	6	2	4.47	126.33	1	6.45	118.03	-30.72	38.56	7.03	0.50	0.75	0.60
18	10	160	4	2	4	4	4	6	2	3.20	83.72	3	1.99	76.33	60.74	7.16	9.67	0.50	0.60	0.67

大多情况下库存分配策略能改善系统绩效。当固定补货成本和固定运输成本比持货成本和缺货成本相对较大时, 库存分配效果较好。此外, h_w/h_v 较大, 或 h_w/b_i 与 h_v/b_i 较大时, 库存分配效果也较好。若批发商处的库存持有成本比本地仓库的持有成本较小时, 批发商会推迟发货以节省持货成本, 并减少每个补货周期内的发货次数。当库存持有成本比缺货成本相对

较大时, 批发商更有可能推迟满足零售商的需求, 进而能集并运输需求而延长运输周期。

毫无疑问, 库存分配策略为改善系统绩效提供了一种新的途径。从算例中可以看出, 有时库存分配策略的系统绩效会劣于FCFS策略, 因而管理者若想最大化库存分配策略的效果, 则应清楚库存分配策略的适用范围。本文结果还表明, 在管理者采取各种措施

降低库存持有成本等单个因素时,为发挥库存分配策略的最优化效果,还需同时优化相应的其他参数.

4 结 论

本文研究一个库存与运输集成 VMI 系统,其中多个零售商具有不同的缺货成本,通过为不同零售商合理分配库存可以有效改善系统绩效.本文不仅求解给定规则下最优的库存分配运输策略和最优的 FCFS 库存运输策略,而且提出了相应的简化策略.引理 3 表明,简化的库存分配运输策略总是优于简化的 FCFS 库存运输策略.然而,最优的库存分配运输策略和最优的 FCFS 库存运输策略则无此统一结论.最优的库存分配运输策略在大多情况下优于最优的 FCFS 库存运输策略.值得一提的是,某些情况下库存分配运输策略所带来的好处较多,如固定补货和固定运输成本较大的情形下.

本文假定单位缺货成本不变,而实际中缺货成本往往与等待时间相关.未来研究可以考虑这一新的缺货成本假定.此外,本文的需求率确定,若需求随机,则整个系统会更加复杂,但也更符合实际、更有意义,进一步的研究也可以从这一方面展开.

参考文献(References)

- [1] Cetinkaya S, Lee C Y. Stock replenishment and shipment scheduling for vendor-managed inventory systems[J]. *Management Science*, 2000, 46(2): 217-232.
- [2] Axsäter S. A note on stock replenishment and shipment scheduling for vendor-managed inventory systems[J]. *Management Science*, 2001, 47(9): 1306-1310.
- [3] Cetinkaya S, Lee C Y. Optimal outbound dispatch policies: Modeling inventory and cargo capacity[J]. *Naval Research Logistics*, 2002, 49(6): 531-556.
- [4] Cetinkaya S, Tekin E, Lee C Y. A stochastic model for joint inventory and outbound shipment decisions[J]. *IIE Trans*, 2008, 40(3): 324-340.
- [5] Cetinkaya S, Bookbinder J H. Stochastic models for the dispatch of consolidated shipments[J]. *Transportation Research, Part B: Methodological*, 2003, 37(8): 747-768.
- [6] Cetinkaya S, Mutlu F, Lee C Y. A comparison of outbound dispatch policies for integrated inventory and transportation decisions[J]. *European J of Operational Research*, 2006, 171(3): 1094-1112.
- [7] Chen F Y, Wang T, Xu T Z. Integrated inventory replenishment and temporal shipment consolidation: A comparison of quantity-based and time-based models[J]. *Annals of Operations Research*, 2005, 135(1): 197-210.
- [8] Lee C Y, Cetinkaya S, Jaruphongsa W. A dynamic model for inventory lot sizing and outbound shipment scheduling at a third-party warehouse[J]. *Operations Research*, 2003, 51(5): 735-747.
- [9] Veinott Jr A F. Optimal policy in a dynamic, single product, nonstationary inventory model with several demand classes[J]. *Operations Research*, 1965, 13(5): 761-778.
- [10] Pibernik R, Yadav P. Dynamic capacity reservation and due date quoting in a make-to-order system[J]. *Naval Research Logistics*, 2008, 55(7): 593-611.
- [11] Tempelmeier H. Supply chain inventory optimization with two customer classes in discrete time[J]. *European J of Operational Research*, 2006, 174(1): 600-621.
- [12] Chang P L, Chou Y C, Huang M G. A (r, r, Q) inventory model for spare parts involving equipment criticality[J]. *Int J of Production Economics*, 2005, 97(1): 66-74.
- [13] Ayanso A, Diaby M, Nair S K. Inventory rationing via drop-shipping in internet retailing: A sensitivity analysis[J]. *European J of Operational Research*, 2006, 171(1): 135-152.
- [14] De Vericourt F, Karaesmen F, Dallery Y. Optimal stock allocation for a capacitated supply system[J]. *Management Science*, 2002, 48(11): 1486-1501.
- [15] Wang T, Toktay B L. Inventory management with advance demand information and flexible delivery[J]. *Management Science*, 2008, 54(4): 716-732.
- [16] GüllüR, Erkip N. Optimal allocation policies in a two-echelon inventory problem with fixed shipment costs[J]. *Int J of Production Economics*, 1996, 46-47(1): 311-321.

(上接第516页)

- [11] He Y J, Chen D Z, Zhao W X. Integrated method of compromise based ant colony algorithm and rough set theory and its application into toxicity mechanism classification[J]. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2008, 92(1): 22-32.
- [12] 富震, 潘伟. 基于自适应遗传约简算法的雷达故障诊断[J]. *控制与决策*, 2010, 25(4): 587-591.
(Fu Z, Pan W. Radar faults diagnosis based on adaptive genetic reduction algorithm[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(4): 587-591.)
- [13] 王林先, 李乃永. 基于粗糙集理论和故障信息网的电网故障诊断方法[J]. *继电器*, 2008, 36(8): 59-63.
(Wang L X, Li N Y. A power network fault diagnosis method based on rough set theory and fault information networks[J]. *Relay*, 2008, 36(8): 59-63.)