

文章编号: 1001-0920(2013)06-0945-05

基于MDD不动点迭代的控制分配方法

池程芝, 章卫国, 朱江乐, 刘小雄

(西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

摘要: 针对航空航天领域中存在的控制分配问题, 提出一种基于最大方向导数(MDD)不动点迭代的控制分配策略. 定义MDD为当前迭代点沿所有单位向量方向中最大导数对应的单位向量, 沿MDD方向, 取前一迭代点和当前迭代点的迭代增量作最小二乘拟合, 下一迭代点在该方向上的估计迭代增量作为当前迭代点的更新迭代增量, 并对改进算法的收敛性进行证明. 通过不同方法的仿真对比验证, 表明了所提出算法的有效性和快速性.

关键词: 飞机; 控制分配; 不动点; 梯度法; 伪逆法; 改进

中图分类号: V249.1; TP273

文献标志码: A

Control allocation method based on MDD fixed-point iteration

CHI Cheng-zhi, ZHANG Wei-guo, ZHU Jiang-le, LIU Xiao-xiong

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: CHI Cheng-zhi, E-mail: chengzhi.chi@gmail.com)

Abstract: For the control allocation problem in the field of aeronautics and astronautics, a control allocation method based on max direction derivative(MDD) fixed-point(FXP) iteration is proposed. MDD is defined as the unit vector which has the max derivative among all the directions of the unit vector at current iteration point. Along the MDD direction, the increment of next iteration point is estimated by using least square fitting of the increments of the former and current iteration point, which is taken as a update for the increment of current iteration along the MDD direction. The convergence of the method is also proved. Finally, the comparison of different methods is carried out. The simulation results show the effectiveness and the rapidity of the proposed method.

Key words: aircraft; control allocation; fixed-point; gradient method; pseudo-inverse; improvement

0 引言

随着航空航天领域中多操纵面和推力矢量技术的应用, 飞行器具备较多的气动控制余度, 使得飞行器操纵面的控制方式和组合方式不再唯一^[1]. 如果仍按传统的控制系统设计思路, 则其设计的难度和复杂性将大大增加, 因此, 有必要采用先进的控制策略——控制分配技术来设计控制系统. 控制分配技术将控制律和分配律分开设计, 简化了控制律的设计. 随着Durham^[2]的研究, 学者们将注意力集中到研究快速高效的控制分配算法上, 使得控制指令可以合理、有效、迅速地分配到各个操纵面上, 从而提高飞行器正常飞行时的控制性能和发生故障时的生存能力, 这是飞控系统设计的关键环节.

Härkegård^[3]研究了不同控制分配方法在飞控系统中的应用. 在现有的控制分配方法中, 伪逆法具有

计算量小和易于实现等优点, 但没有直接考虑到操纵面的饱和(位置和速率)约束限制, 不能避免操纵面进入饱和, 也不能实现可达集中的所有控制. 工程实际上要求控制分配方法要综合地考虑操纵面的气动效率、位置约束和速率约束等因素^[4-5], 但某些方法依然存在计算量较大、难以满足工程应用的实时性要求等问题, 如线性规划、二次规划方法等^[6-7]. 不动点(FXP)迭代法是研究较多的方法之一, 它利用递归不动点紧缩算法, 易于编程实现, 对于大多数输入指令是快速而有效的^[8], 且在飞控系统控制分配问题的应用中取得了较好的效果^[9-10]. Lu^[11]对FXP方法的全局收敛性进行了证明, 同时指出FXP方法对较大的指令输入收敛较慢.

考虑到飞控系统对控制分配问题求解的快速性要求, 本文在保证改进算法收敛性的基础上, 探索

收稿日期: 2012-01-04; 修回日期: 2012-05-24.

基金项目: 航空科学基金项目(20100753009).

作者简介: 池程芝(1984—), 男, 博士生, 从事飞行控制、智能故障诊断与容错控制的研究; 章卫国(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制理论与应用、飞行控制等研究.

FXP改进算法应用于二次规划控制分配问题中的快速性. 通过与伪逆法、多级广义逆分配方法、线性规划方法和基本 FXP 方法等算法进行仿真对比验证, 表明了该改进策略的有效性和快速性.

1 MDFFXP 迭代方法

1.1 基本 FXP 迭代方法

基于基本 FXP 方法的二次规划控制分配问题如下所示^[3,9]:

$$J = \frac{1}{2}[(1 - \varepsilon)(Gu - v)^T Q_1(Gu - v) + \varepsilon u^T Q_2 u],$$

$$\text{s.t. } \underline{u} \leq u \leq \bar{u}. \quad (1)$$

其中: v 为虚拟输入; u 为控制分配输出; G 为控制效率矩阵; $Q_1 = W_v^T W_v > 0$, $Q_2 = W_u^T W_u > 0$ 为加权矩阵; $\varepsilon = (1 + \gamma)^{-1}$, $\gamma > 0$ 为加权因子.

对于任意 $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in R^m$, 若满足

$$s_i(u) = \begin{cases} \underline{u}, & u_i \leq \underline{u}; \\ u_i, & \underline{u} < u_i < \bar{u}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \bar{u}, & u_i \geq \bar{u}. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $s(\cdot)$ 为操纵面约束限制. 则式 (1) 的二次规划问题的解满足如下 FXP 等式:

$$u = s[(1 - \varepsilon)\omega G^T Q_1 v - (\omega H - I)u] \triangleq f(u). \quad (3)$$

其中: $H = (1 - \varepsilon)G^T Q_1 G + \varepsilon Q_2$; $\omega = \|H\|_F^{-1}$ 为步长因子; $\varepsilon \in (0, 1)$ 用于平衡控制分配误差和控制能量. 这样可得到 FXP 迭代格式为

$$u^{k+1} = f(u^k), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

1.2 MDFFXP 迭代方法的原理

MDFFXP 迭代方法是在基本 FXP 的基础上对沿 MDD 方向上的迭代增量进行改进, 在描述改进设计之前先给出 MDD 的定义^[12].

定义 1 设 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是连续函数, 对于 $u_0 \in R^n$ 和单位向量 $e_i = (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_n^i)^T$ ($\delta_j^i = 0, j \neq i, i = 1, 2, \dots, n$), 函数 $f(u_0 + t)e_i$ 在 $t = 0$ 处的导数 (若存在) 称为 f 在点 u_0 关于 u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的一阶偏导数. 对于任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 若 f 在点 u 关于 u_i 的一阶偏导数存在, 则称 $f(u)$ 在点 u 的梯度定义为

$$\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u_1}, \frac{\partial f(u)}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f(u)}{\partial u_n} \right)^T. \quad (5)$$

定义 2 对于 $u_0 \in R^n$ 和 $d \in R^n$, 函数 f 在点 u_0 关于 d 的方向导数定义为

$$\frac{\partial f(u_0)}{\partial d} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u_0 + td) - f(u_0)}{t}. \quad (6)$$

用 $Df(u_0; d)$ 表示 f 在点 u_0 关于 d 的方向导数, 当 f 的一阶偏导数连续可微时, 方向导数可以计算为

$$Df(u_0; d) = \nabla f(u_0)^T d. \quad (7)$$

由上述定义可知, 用于 FXP 迭代的 $f(u)$ 在 u 点的梯度定义为

$$\nabla_f f(u) = \left(\frac{f(u + \Delta t e_1) - f(u)}{\Delta t}, \dots, \frac{f(u + \Delta t e_n) - f(u)}{\Delta t} \right). \quad (8)$$

其中: 等式左侧下标 f 表示 FXP 迭代; Δt 为迭代步数的间隔, 一般取为 1. 因此, f 在迭代点 u_0 关于 d 的方向导数可以计算为

$$Df(u_0; d) = \nabla_f f(u_0)^T d. \quad (9)$$

MDD 即为

$$\max \left\{ \frac{f(u_0 + \Delta t e_i) - f(u_0)}{\Delta t} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

所对应的单位方向.

定义 3 对于 $u^k, u^{k+1} \in R^n$ 和单位向量 e_i , 函数 f 在点 u^{k+1} 关于方向 e_i 的增量定义为

$$\Delta f(u^{k+1}; e_i) = \frac{f(u^{k+1} + \Delta t e_i) - f(u^{k+1})}{\Delta t} - \frac{f(u^k + \Delta t e_i) - f(u^k)}{\Delta t}. \quad (11)$$

在引入 MDD 的定义和函数 f 在某点关于方向 e_i 的增量定义后, 设计 MDFFXP 迭代算法. 将当前迭代点及其前一个迭代点在 MDD 上的迭代增量作最小二乘拟合, 得到下一迭代点在该 MDD 上的估计迭代增量, 作为当前迭代点的更新迭代增量. 对于 MDFFXP 迭代 ($k \geq 1, k \in N$), 算法步骤如下.

Step 1: 取 $f(u^k)$ 和 $f(u^{k+1})$.

Step 2: 计算 $\nabla_f f(u^{k+1})^T e_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 取 $\max\{(f(u^{k+1} + \Delta t e_i) - f(u^{k+1}))/\Delta t\}$ 所对应的单位方向 e_i 为 MDD, 记为 e_M .

Step 3: 计算 $\Delta f(u^{k+1}; e_M)$ 和 $\Delta f(u^k; e_M)$ ($k \geq 2, k \in N$) 并进行最小二乘拟合, 得到由当前迭代点 (u^{k+1}) 估计的下一迭代点在 e_M 方向上的迭代增量 $\Delta^* f(u^{k+1}; e_M)$.

Step 4: 更新

$$f(u^{k+1}) = f(u^{k+1}) + \Delta^* f(u^{k+1}; e_M) e_M.$$

Step 5: 以 $u^{k+2} = f(u^{k+1})$ 作为新的迭代点, 计算 $f(u^{k+2})$ 和 $f(u^{k+3})$.

Step 6: 当满足 $k < K$ ($K \in N$) 且 $\|\nabla_f f(u^{k+1})\| > \xi$ ($\xi > 0$) 时, 重复 Step 1 ~ Step 5; 否则, 转为基本 FXP 迭代过程.

注意到, 对于存在约束条件的控制分配问题, Step 4 更新的 $f(u^{k+1})$ 还应满足其约束条件.

1.3 MDFFXP 迭代方法的收敛性

以下讨论 MDFFXP 迭代方法的收敛性, 首先将控制分配问题变为如下标准的二次规划问题:

$$J = \frac{1}{2}[(1 - \varepsilon)(Gu - v)^T Q_1(Gu - v) + \varepsilon u^T Q_2 u] =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1-\varepsilon)(u^T G^T Q_1 G u - u^T G^T Q_1 v - v^T Q_1 v) + \\ & \varepsilon u^T Q_2 u / 2 = \\ & \frac{1}{2} u^T [(1-\varepsilon) G^T Q_1 G + \varepsilon Q_2] u + \\ & u^T (1-\varepsilon)(-G^T Q_1 v) + (1-\varepsilon) v^T Q_1 v / 2. \end{aligned} \quad (12)$$

由于 $(1-\varepsilon)v^T Q_1 v / 2$ 对于采样周期而言是常数, 移除后不影响对目标函数优化的求取, 令 $c = (1-\varepsilon)(-G^T Q_1 v)$, 基于二次规划的控制分配问题描述为

$$J = u^T H u / 2 + u^T c, \text{ s.t. } A u \geq b. \quad (13)$$

其中 A 和 b 可由式 (1) 经过简单变化获得.

当代价函数为凸函数时, 对于任意优化算法, 均应满足库恩-塔克 (Kuhn-Tucker) 条件^[12], 基于二次规划的优化算法也不例外. 对于凸规划, Kuhn-Tucker 条件既是必要条件, 也是充分条件. 点 u^* 是正定二次规划问题全局最优解的充要条件为 u^* 是 Kuhn-Tucker 点^[12]. 由文献 [13] 可知, FXP 等式 (3) 的解也是二次规划问题 (13) 的唯一解, 从而可以得到 FXP 迭代法能够精确求解二次规划问题^[11], 表明了基本 FXP 迭代法的收敛性. 由此, 设 u^* 是该二次规划控制分配问题的全局最优解. 设基本 FXP 的迭代序列为 $\{u^n\}$, 则数列收敛于 u^* . 由 MDDFXP 迭代方法的设计步骤可知, 该方法仅改变了 FXP 迭代序列 $\{u^n\}$ 的有限项, 因此不影响该序列的收敛性. 进一步, 由数列极限的唯一性可知, MDDFXP 迭代序列也收敛于 u^* .

2 仿真实例及分析

2.1 简单算例的验证

首先给出一个简单的控制分配实例^[3]. 设

$$\begin{aligned} G &= [2 \ 1], \quad v = 3, \quad Q_1 = Q_2 = I^2, \quad \varepsilon = 0.001, \\ \bar{u} &= [1 \ 1]^T, \quad \underline{u} = [-1 \ -1]^T, \end{aligned}$$

取初始迭代点为 $u^0 = [0 \ 0]^T$, 由 FXP 迭代公式可得 $u^1 = [0.11998 \ 0.5999]^T$. 取 $K = 15, \xi = 1e-4$, 进行基本 FXP 方法和 MDDFXP 方法的对比仿真, 结果如图 1 所示. MDDFXP 与基本 FXP 的前 10 次迭代结果如表 1 所示.

对上述控制分配算例进行 100 次仿真, CPU 平均计算时间均为 0.015 6 s, FXP 方法的迭代次数为 44, MDDFXP 方法的迭代次数为 38 次. 由表 1 可见, 在第 10 个迭代点, MDDFXP 方法的 u_2 输出值为 0.975 7, 基本 FXP 方法的 u_2 输出值为 0.945 5, 这表明与基本 FXP 方法相比, MDDFXP 方法在迭代前期的收敛速度更快. 另外, 由图 1 可知, MDDFXP 方法在一定程度上是最小二乘估计和基本 FXP 方法在迭代增量上的博弈. 在博弈的过程中, 初期 MDDFXP 占明显优势, 随着迭代的进行, MDDFXP 的优势逐渐降低, 直至处于劣势, 此时需要及时地终止改进的迭代过程.

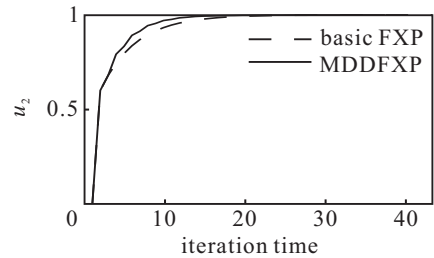


图 1 MDDFXP 与基本 FXP 的迭代过程对比

表 1 MDDFXP 与基本 FXP 前 10 次的迭代结果

迭代次数	基本 FXP		MDDFXP	
	u_1	u_2	u_1	u_2
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	1.0000	0.5999	1.0000	0.5999
2	1.0000	0.6798	1.0000	0.6798
3	1.0000	0.7437	1.0000	0.7916
4	1.0000	0.7948	1.0000	0.8331
5	1.0000	0.8357	1.0000	0.8912
6	1.0000	0.8683	1.0000	0.9128
7	1.0000	0.8945	1.0000	0.9430
8	1.0000	0.9154	1.0000	0.9542
9	1.0000	0.9321	1.0000	0.9699
10	1.0000	0.9455	1.0000	0.9757

2.2 ADMIRE 模型中的对比

ADMIRE 是多操纵面飞机控制分配经常采用的模型之一^[3,10,15], 本文利用该模型进行仿真, 仿真中所用主要数据如下:

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} 0.7984 & -0.7984 & -4.5787 & -3.9413 \\ 1.3841 & 1.3841 & -1.0906 & -1.7433 \\ -0.3970 & 0.3970 & -0.2014 & -0.4256 \\ & 3.9413 & 4.5787 & 2.6919 \\ \leftarrow & -1.7433 & -1.0906 & 0.0046 \\ & 0.4256 & 0.2014 & -1.6265 \end{bmatrix}, \\ W_v &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad W_u = I_7, \quad \varepsilon = \xi = 1e-3. \end{aligned}$$

操纵面定义如下, 其饱和约束限制如文献 [3] 所示.

$$u = [\delta_{cl} \ \delta_{cr} \ \delta_{roe} \ \delta_{rie} \ \delta_{lie} \ \delta_{loe} \ \delta_r]^T.$$

仿真中, 在 0.5 s 输入两组虚拟阶跃输入信号 (每组分别包含 v_1, v_2 和 v_3 三个方向的输入), 设置两组仿真中 MDDFXP 算法的参数 K 分别为 3 和 4. 对两组输入信号分别进行基于伪逆法 (PINV)、多级广义逆分配方法 (CGI)^[12]、线性规划 (LP) 方法、FXP 方法和 MDDFXP 方法的对比仿真实验, 每种方法各进行 100 次仿真, 各方法的平均运行时间如表 2 所示. 由表 2 可知, 在两组仿真中, MDDFXP 均是除 PINV 方法外运行时间最少的方法, 且 PINV 方法的运行时间相比 MDDFXP 方法并没有绝对的优势. 同时, 由图 3 可见,

对于第 2 组虚拟输入, 采用 PINV 方法的控制分配后, 各输出均存在明显的稳态误差.

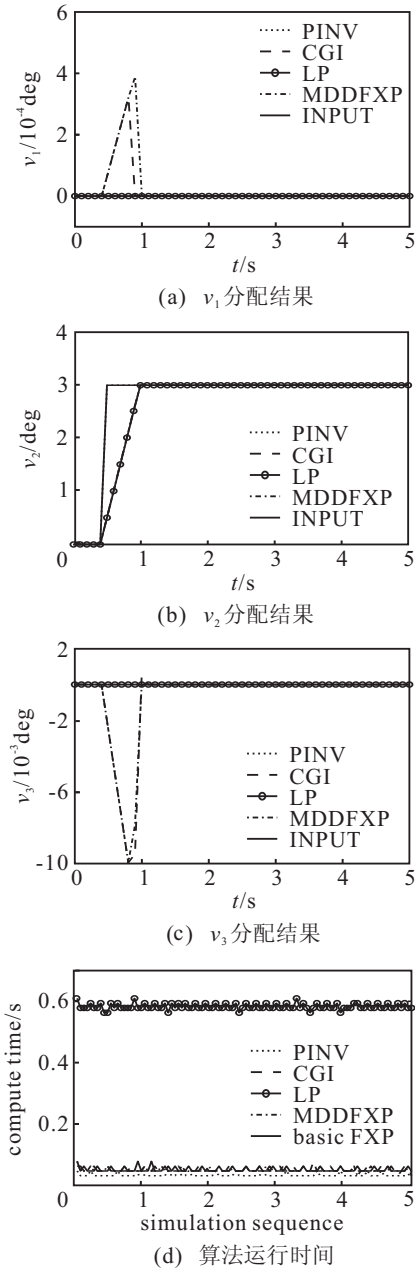


图 2 第 1 组虚拟输入下不同控制分配方法的对比

表 2 不同方法的平均运行时间对比

组号	平均运行时间/s				
	PINV	CGI	LP	FXP	MDDFXP
1	0.0338	0.0511	0.5830	0.0511	0.0500
2	0.0320	0.0550	0.5064	0.0505	0.0478

此外, 在两组仿真中, MDDFXP 方法比基本 FXP 方法在运行时间上分别减少了 2.15% 和 5.35%. 这表明了 MDDFXP 方法在控制分配中的可行性和相比基本 FXP 方法的快速性. 由于 MDDFXP 方法与基本 FXP 方法在分配输出上是一样的, 图 2 和图 3 仅给出 MDDFXP 方法与其他方法的对比输出.

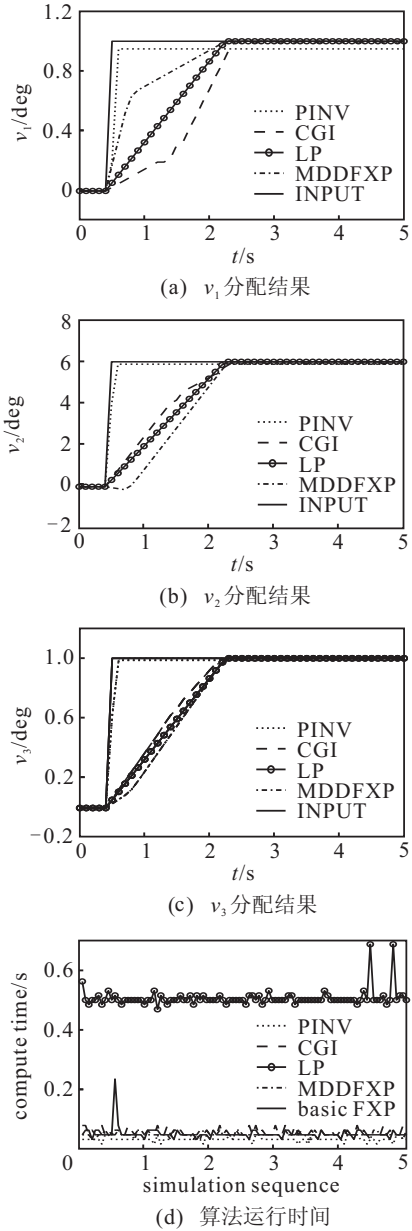


图 3 第 2 组虚拟输入下不同控制分配方法的对比

3 结论

本文研究了 FXP 迭代过程的迭代增量沿最大方向导数 (MDD) 方向上的改进算法, 将最小二乘拟合法用于下一迭代点的迭代增量估计, 给出了详细的算法设计步骤, 并对改进算法的收敛性进行了证明. 所提出的 MDDFXP 算法考虑了操纵面的饱和约束限制, 且算法在运行时间上比基本 FXP 算法更接近伪逆法, 可应用于多种控制分配问题中. 下一步将研究改进算法 Step 6 中的跳出条件对迭代速度的影响, 以求更好的改进效果.

参考文献 (References)

[1] 史静平, 章卫国, 李广文, 等. 再分配伪逆算法分配效率研究[J]. 中国科学: 信息科学, 2010, 40(4): 519-525.
(Shi J P, Zhang W G, Li G W, et al. Research on the allocation efficiency of redistributed pseudo-inverse

- algorithm[J]. *Scientia Sinica: Informationis*, 2010, 40(4): 519-525.)
- [2] Durham W C. Constrained control allocation[J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 1993, 16(4): 717-725.
- [3] Härkegård O. Backstepping and control allocation with applications to flight control[D]. Linköping: Department of Electrical Engineering, Linköping University, 2003: 105-182.
- [4] Schofield B, Häggglund T. Optimal control allocation in vehicle dynamics control for rollover mitigation[C]. *American Control Conference*. Washington, 2008: 3231-3236.
- [5] Johansen T A, Fuglseth T P, Tøndel P, et al. Optimal constrained control allocation in marine surface vessels with rudders[J]. *Control Engineering Practice*, 2008, (16): 457-464.
- [6] Bodson M. Evaluation of optimization methods for control allocation[J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 2002, 25(4): 703-711.
- [7] Ikeda Y, Hood M. An application of L1 optimization to control allocation[Z]. AIAA-2000-4566, 2000.
- [8] Petersen J A M, Bodson M. Constrained quadratic programming techniques for control allocation[J]. *IEEE Trans on Control System Technology*, 2006, 14(1): 91-98.
- [9] Burken J J, Lu P, Wu Z, et al. Two reconfigurable flight-control design methods: Robust servomechanism and control allocation[J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 2001, 24(3): 482-493.
- [10] 曲小宇, 章卫国, 严谨, 等. 不动点法在飞控系统控制分配中的应用[J]. *计算机仿真*, 2009, 26(9): 66-69. (Qu X Y, Zhang W G, Yan J, et al. Application of fixed-point method in control allocation of flight control system[J]. *Computer Simulation*, 2009, 26(9): 66-69.)
- [11] Lu P. Constrained tracking control of nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1996, 27(5): 305-314.
- [12] 黄红选, 韩继业. 数学规划[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 17-18. (Huang H X, Han J Y. *Mathematical programming*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 17-18.)
- [13] Wang J, Longoria R G. Coordinated and reconfigurable vehicle dynamics control[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2009, 17(3): 723-732.
- [14] Bordignon K A. Constrained control allocation for systems with redundant control effectors[D]. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996.
- [15] Zhang Y M, Rabbath C A, Su C Y. Reconfigurable control allocation applied to an aircraft benchmark model[C]. *Proc of 2008 American Control Conf*. Washington, 2008: 1052-1057.

(上接第944页)

- [17] 张吉军, 樊玉英. 权重为区间数的多指标决策问题的逼近理想点法[J]. *系统工程与电子技术*, 2002, 24(11): 76-77. (Zhang J J, Fan Y Y. Topsis of multiple attribute decision making problem with interval valued weight[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2002, 24(11): 76-77.)
- [18] 于新锋, 杜跃平. 时间权重为区间值的时序多属性决策EKLMNM法[J]. *数量经济技术经济研究*, 2004, 7(3): 42-47. (Yu X F, Du Y P. Multi-attribute decision making EKLMNM method with time series based on Interval valued time weight[J]. *Quantitative and Technical Economics Research*, 2004, 7(3): 42-47.)
- [19] Lin Y H, Lee P C, Ting H I. Dynamic multi-attribute decision making model with grey number evaluations[J]. *Expert Systems with Applications*, 2008, 35(4): 1638-1644.
- [20] Xu Z S. On multi-period multi-attribute decision making[J]. *Knowledge-based Systems*, 2008, 21(2): 164-171.
- [21] Liu S F, Lin Y. *Grey information theory and practical applications*[M]. London: Springer-Verlag, 2011: 10-30.
- [22] 邱苑华. 管理决策与应用熵学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004: 79-80. (Qiu W H. *Management decision-making and application of entropy*[M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 2004: 79-80.)
- [23] 苏志欣, 王理, 夏国平. 区间数动态多属性决策的VIKOR扩展方法[J]. *控制与决策*, 2010, 25(6): 836-874. (Su Z X, Wang L, Xia G P. Extended VIKOR method for dynamic multi-attribute decision making with interval numbers[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(6): 836-874.)
- [24] 王正新, 党耀国, 宋传平. 基于区间数的多目标灰色局势决策模型[J]. *控制与决策*, 2009, 24(3): 388-392. (Wang Z X, Dang Y G, Song C P. Multi-objective decision model of grey situation based on interval number[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(3): 388-392.)