

文章编号: 1001-0920(2013)06-0879-05

## 基于灰色定性理论的无陷阱人工势场

李书杰, 王 鹏, 陈宗海

(中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230027)

**摘 要:** 针对传统人工势场中存在局部陷阱问题, 提出一种基于灰色定性理论的人工势场算法. 首先将环境中自由空间分解为一组凸多边形, 以凸多边形的顶点和邻接关系作为关键信息, 并分别构成灰色定性基本元和灰色定性关系, 由灰色定性关系推理从起始点到目标点需经过的凸多边形序列, 再用广义白化函数计算凸多边形序列中的势场. 理论分析和实验均表明该算法能够确保机器人在有限的时间内安全到达目标点.

**关键词:** 灰色定性; 人工势场; 路径规划; 移动机器人

**中图分类号:** TP24

**文献标志码:** A

## Artificial potential field without traps based on grey qualitative theory

LI Shu-jie, WANG Peng, CHEN Zong-hai

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China.

Correspondent: CHEN Zong-hai, E-mail: chenzh@ustc.edu.cn)

**Abstract:** Aiming at the local traps problem in the traditional artificial potential field, an artificial potential field algorithm based on grey qualitative theory is proposed. The free space of environment is decomposed into series of convex polygons by using the convex decomposition algorithm. Vertices of convex polygons and the adjacency relationship between them are taken as the key information of environment, which are defined as the grey qualitative fundamental element and the grey qualitative relationship respectively. The sequence of convex polygons from start point to target point is deduced by grey qualitative relationship, and then the potential field in those convex polygons is calculated by generalized whitening function. Theoretical analysis and the experiment verify that the proposed algorithm can ensure the robot reach the target safely in finite time.

**Key words:** grey qualitative; artificial potential field; path planning; mobile robot

## 0 引 言

传统人工势场以机器人和障碍物以及目标点的相对位置计算机器人受到的引力和斥力, 并叠加控制机器人从起始点避开障碍物到达目标位置<sup>[1]</sup>. 由于规则简单、计算方法清晰, 基于人工势场的机器人路径规划得以广泛的应用. 传统人工势场往往因存在陷阱而使机器人停止于非目标点. 针对此问题, 国内外学者提出了多种改进方法, 如 Dennis 等<sup>[2-3]</sup>提出的“能见度势场”通过障碍物消减策略解决多障碍物环境中的陷阱问题; Jaradat 等<sup>[4-5]</sup>利用障碍物斥力和目标点引力的模糊模型解决局部极小问题; 于振中等<sup>[6]</sup>应用“填平势场”使机器人走出陷阱区域. 但这些方法仅用障碍物的斥力和目标点的吸引力计算势场, 在传统人工势场的基础上通过局部调整使机器人走出陷阱,

但并未从根本上解决问题.

灰色定性理论<sup>[7-9]</sup>由陈宗海教授提出, 该理论体系融合了灰色理论和定性理论二者的优势, 模拟人类智能进行知识表达、推理和决策, 其思想精髓包括: 1) 模拟人类智能在思维过程中利用不完备知识进行定性分析、推理和决策; 2) 将定性定量知识综合集成于灰色定性基本元中, 实现定性推理和定量执行的充分协调. 不完备知识有两种类型<sup>[10]</sup>: 1) 智能体从外界获得的知识不完备; 2) 智能体存储的知识不完备, 即智能体从获得的信息中仅抽取足以支撑其后续推理、决策过程的关键信息存储. 本文将灰色定性理论应用于势场计算: 模拟人类智能利用第2类不完备知识对环境进行知识表达, 即从环境中抽取关键定性定量信息并集成于灰色定性基本元中, 再以机器人的位

收稿日期: 2012-01-06; 修回日期: 2012-05-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61075073).

作者简介: 李书杰(1983-), 女, 博士生, 从事灰色定性知识表达、机器人导航的研究; 陈宗海(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模与控制、模式识别与智能机器等研究.

置坐标通过广义白化函数计算机器人受到的控制力。本文算法利用环境中的关键信息计算势场,保留了传统人工势场规则简单、计算方法清晰的优点,但无需任何局部调整即可使任意环境下的机器人在有限的时间内安全到达目标点,从根本上解决了传统人工势场算法的不足。

## 1 灰色定性模型

**定义 1** 设  $P = \{p_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  是平面  $R^2$  上的非空点集,用  $\otimes(P)$  表示点集  $P$  的凸壳,不致混淆则简记为  $\otimes$ ,称  $\otimes(P)$  为由点集  $P$  张成的二维灰数。

**定义 2** 设  $B(\otimes)$  为二维灰数  $\otimes(P)$  的边界,称  $K = P \cap B(\otimes)$  为  $\otimes$  的关键点集。

**定义 3** 设  $S$  为研究对象的连续论域,若存在满映射  $q: S \rightarrow \tilde{S}$ ,  $\tilde{S} = \{\otimes_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ ,其中  $\otimes_i$  为二维灰数,且  $\otimes_i \cap \otimes_j = \phi, i \neq j$ ,则称  $\tilde{S}$  为  $S$  的一个灰色定性量空间,称  $\otimes_i$  为  $\tilde{S}$  内的灰色定性基本元。

**定义 4** 设  $R$  为  $\tilde{S} \times \tilde{S}$  的子集,称  $R$  为  $\tilde{S}$  上的一个灰色定性关系。

**定义 5** 设灰色定性基本元  $\otimes$  的关键点集为  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ ,定义函数  $f: K \rightarrow R$ ,其中  $R$  为一维实数集,称  $f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_m)$  为  $\otimes$  的灰色定性特征值。

灰色定性特征值是灰色定性基本元的关键定量信息,可以利用这些关键定量信息通过广义白化函数获得全部所需的定量信息。

**定义 6** 设灰色定性基本元  $\otimes$  的灰色定性特征值为  $f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_m)$ ,对于  $\forall p \in \otimes$ ,令

$$f(p) = \lambda_1 f(k_1) + \lambda_2 f(k_2) + \dots + \lambda_m f(k_m). \quad (1)$$

其中:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  可由  $p$  与  $\otimes$  的关键点集的相对位置唯一确定,称  $f$  为  $\otimes$  上的广义白化函数。

灰色理论中,白化函数  $f(x)$  用点  $x$  相对于区间灰数  $[a, b]$  边界  $a$  和  $b$  的位置计算点  $x$  的函数值,  $f(x)$  的意义仅限于取  $x$  作为该灰数的白化值的意愿程度,而广义白化函数用点  $p$  与  $\otimes$  的关键点集的相对位置和关键点集的函数值计算点  $p$  的函数值,  $f(p)$  的意义取决于关键点集函数值的意义,所以广义白化函数既传承了白化函数的思想,又拓展了白化函数的意义。

## 2 势场计算及路径规划算法

### 2.1 势场计算

对机器人工作环境作如下约定:二维平面上的机器人工作环境  $S$  及其内部有限数量的静态障碍物  $Ob_1, Ob_2, \dots, Ob_t$  的边界均可由直线段构成。在  $S$  中建立右手直角坐标系  $\Sigma_0, \forall P \in S$  在  $\Sigma_0$  中都有确定的坐标  $(x, y)$ 。

可利用文献[11]中凸剖分算法将机器人工作环境  $S$  分解为一组凸多边形,而且凸多边形是其顶点集的凸壳,符合二维灰数的定义,所以可将凸多边形作为灰色定性基本元,全体凸多边形作为  $S$  的一个灰色定性量空间  $\tilde{S}$ 。

设  $S$  经过剖分后生成了  $n$  个凸多边形,分别记为  $\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n$ 。记凸多边形  $\otimes_i$  的顶点集为  $K_i$ 。  $\tilde{S} = \{\otimes_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  为  $S$  的一个灰色定性量空间,  $\otimes_i$  为  $\tilde{S}$  内的灰色定性基本元(为几何意义清晰起见,下文中仍称  $\otimes_i$  为凸多边形)。  $\tilde{S}$  上的灰色定性关系  $R$  定义为凸多边形之间的邻接关系。依据邻接关系通过定性推理可获得从起始点到达目标点需经过的凸多边形序列,不失一般性,记为  $\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_g$ ;再分别计算  $\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_g$  内的势场以得到控制机器人从起始点到达目标点的势场。

设凸多边形  $\otimes_i$  的各顶点  $k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{im_i}$  按逆时针排列,线段  $k_{i,l_i} k_{i,l_i+1} (k_{i+1,1} k_{i+1,2})$  为  $\otimes_i$  和  $\otimes_{i+1}$  的公共边。如图 1 所示,机器人将依次穿过边  $k_{21} k_{22}, k_{31} k_{32}, \dots, k_{g1} k_{g2}$  从  $\otimes_1$  进入  $\otimes_g$ ,  $mid_i$  为边  $k_{i+1,1} k_{i+1,2}$  的中点。

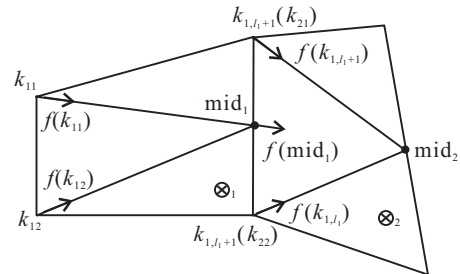


图 1 灰色定性特征值定义方法

$\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_{g-1}$  内的势场确保机器人在有限的时间内离开当前凸多边形进入序列中的下一个凸多边形,  $\otimes_g$  内的势场确保机器人在有限的时间内停止于目标点。首先讨论凸多边形  $\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_{g-1}$  内势场的计算方法,以  $\otimes_1$  为例,势场计算分为两步:

1) 定义  $\otimes_1$  的灰色定性特征值。

首先定义  $k_{1j} (j \neq l_1, l_1 + 1)$  处的势场向量,即灰色定性特征值。设想人类智能的路径规划方法:如图 1 所示,当人类处于点  $k_{11}$  时,如需穿过  $k_{1,l_1} k_{1,l_1+1}$  进入  $\otimes_2$ ,其一般做法是从点  $k_{11}$  走向  $k_{1,l_1} k_{1,l_1+1}$  的中点  $mid_1$ ,据此思路定义  $k_{1j}$  处的势场向量的方向指向  $mid_1$ ,即

$$f(k_{1j}) = \frac{\overrightarrow{k_{1j}mid_1}}{|\overrightarrow{k_{1j}mid_1}|}. \quad (2)$$

其中:  $|\overrightarrow{k_{1j}mid_1}|$  为向量  $\overrightarrow{k_{1j}mid_1}$  的模,  $\eta \in (0, 1]$  为比例系数,下同。

其次定义  $k_{1,l_1}$  和  $k_{1,l_1+1}$  处的势场向量。若

$$n_{l_1-1}^T \overrightarrow{k_{1,l_1}mid_2} < 0,$$

则定义

$$f(k_{1,l_1}) = \overrightarrow{\eta k_{1,l_1} \text{mid}_2} / |\overrightarrow{k_{1,l_1} \text{mid}_2}|, \quad (3)$$

其中  $n_{l_1-1}$  为边  $k_{1,l_1-1}k_{1,l_1}$  的外法线方向; 否则定义

$$f(k_{1,l_1}) = \overrightarrow{\eta k_{1,l_1} k_1} / |\overrightarrow{k_{1,l_1} k_1}|, \quad (4)$$

$k_1$  为线段  $k_{1,l_1-1}k_{1,l_1}$  延长线上的一点. 式(3)和(4)是为了确保机器人在  $\otimes_1$  内可以避开边界  $k_{1,l_1-1}k_{1,l_1}$  并向边界  $k_{1,l_1}k_{1,l_1+1}$  运动, 详见第3节中定理2的证明. 对于  $k_{1,l_1+1}$  类似.

2) 定义广义白化函数, 计算  $\otimes_1$  内部的势场.

计算几何学指出, 凸多边形内部任意一点均可以表示为凸多边形顶点的凸组合, 且当凸多边形为三角形时这种表示法唯一. 由此, 可以考虑令式(1)中的  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1}$  为将点  $p$  表示为  $\otimes_1$  的关键点集  $K_1$  凸组合的系数. 如图2(a)所示, 连接  $k_{1j}\text{mid}_1$ , 其中  $j = 1, 2, \dots, l_1 - 1, l_1 + 2, \dots, m_1$ . 将凸多边形  $\otimes_1$  分解为  $m_1 - 1$  个三角形,  $\forall p \in \otimes_1$ , 必然存在  $j$  使得  $p \in \Delta k_{1j}k_{1,j+1}\text{mid}_1$ . 若  $j = m_1$ , 则  $j + 1$  为 1. 令

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1j} & k_{1,j+1} & \text{mid}_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

则

$$p = \lambda_1 k_{1j} + \lambda_2 k_{1,j+1} + \lambda_3 \text{mid}_1. \quad (6)$$

定义  $p$  点的势场向量为

$$f(p) = \lambda_1 f(k_{1j}) + \lambda_2 f(k_{1,j+1}) + \lambda_3 f(\text{mid}_1), \quad (7)$$

其中

$$f(\text{mid}_1) = (f(k_{l_1}) + f(k_{l_1+1}))/2. \quad (8)$$

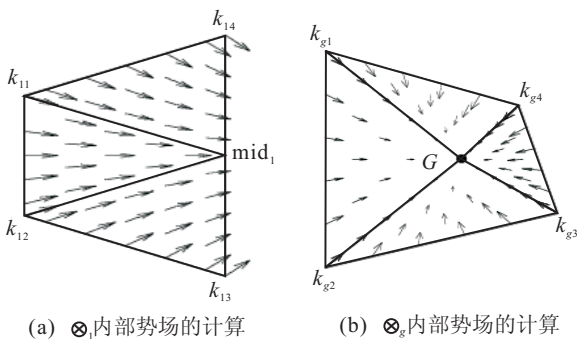


图2 凸多边形内部势场计算方法

计算凸多边形  $\otimes_g$  内部的势场同样分为两步. 首先定义  $\otimes_g$  的灰色定性特征值

$$f(k_{gj}) = \overrightarrow{\eta k_{gj} G} / |\overrightarrow{k_{gj} G}|, \quad j = 1, 2, \dots, m_g, \quad (9)$$

其中  $G$  为目标点. 再定义广义白化函数, 如图2(b)所示, 连接  $k_{gj}\text{mid}_g$  ( $j = 1, 2, \dots, m_g$ ), 将凸多边形  $\otimes_g$  分解为  $m_g$  个三角形, 并定义  $f(G) = 0$ . 广义白化函数与定义  $\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_{g-1}$  上的广义白化函数类似, 不再赘述.

## 2.2 路径规划算法

机器人路径规划算法如下.

**Step 1:** 初始化. 建立环境的灰色定性模型, 包括灰色定性基本元、灰色定性邻接关系、从起始点到目标点经过的凸多边形序列, 由第2.1节中方法定义灰色定性特征值和广义白化函数.

**Step 2:** 判断机器人当前位置坐标  $p$  和所属凸多边形  $\otimes_i$ .

**Step 3:** 根据  $\otimes_i$  的灰色定性特征值和广义白化函数计算点  $p$  的势场向量. 设置机器人的运动速率为  $|f(p)|$ , 运动方向为向量  $f(p)$  的方向, 运动时间持续一个采样周期.

**Step 4:** 若到达目标点则停止, 否则转至 Step 2.

## 3 算法分析

### 3.1 算法收敛性分析

**定理 1** 基于灰色定性理论计算的人工势场可使机器人在有限的时间内从起始点到达目标点.

**证明** 首先证明机器人可以在有限的时间内从  $\otimes_1$  到达  $\otimes_g$ , 只需证明机器人可以在有限的时间内从  $\otimes_1$  到达  $\otimes_2$ , 其余类似. 根据凸多边形的性质, 由式(2), (3)或(4)定义的势场向量  $f(k_{1j})$  均满足

$$n_{l_i}^T f(k_{1j}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_1, \quad (10)$$

其中  $n_{l_i}$  为边  $k_{1,l_i}k_{1,l_i+1}$  的外法线. 由式(5)计算的  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是将  $p$  表示为点  $k_{1j}, k_{1,j+1}$  和  $\text{mid}_1$  的凸组合的系数, 满足  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ , 所以有

$$\begin{aligned} n_{l_i}^T f(p) &= \lambda_1 n_{l_i}^T f(k_{1j}) + \lambda_2 n_{l_i}^T f(k_{1,j+1}) + \\ &\lambda_3 n_{l_i}^T f(\text{mid}_1) > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

在  $\otimes_1$  内任意一点, 机器人都会有一个朝向边  $k_{1j}k_{1,j+1}$  运动的速度, 又因为  $\otimes_1$  为有界区间, 所以机器人会在有限的时间内穿过  $k_{1j}k_{1,j+1}$ , 离开  $\otimes_1$  进入  $\otimes_2$ .

在  $\otimes_g$  内部, 由式(9)和广义白化函数的定义方法可知  $\otimes_g$  内任意一点(除去目标点  $G$ )均有朝目标点  $G$  运动的速度, 且  $f(G) = 0$ ,  $\otimes_g$  为有界区域, 所以机器人在有限的时间内停止于目标点  $G$ .  $\square$

### 3.2 路径安全性分析

**定理 2** 基于灰色定性理论计算的人工势场可使机器人安全避开障碍物.

**证明** 证明机器人可以安全避开障碍物即证明在任意一个凸多边形内机器人均会朝向离开凸多边形边界(除公共边  $k_{i,l_i}k_{i,l_i+1}, i = 1, 2, \dots, g - 1$ )的方向运动. 仍以  $\otimes_1$  为例, 设  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_1$ ) 为边  $k_{1j}k_{1,j+1}$  的外法线向量. 根据凸多边形性质, 由式(2), (3)或(4)定义的势场向量  $f(k_{1t})$  均满足

$$n_j^T f(k_{1t}) < 0. \quad (12)$$

其中:  $j \neq l_1, t = 1, 2, \dots, m_1$ . 在  $\otimes_1$  内任意一点, 机器人都朝向离开边界  $k_{1j}k_{1,j+1} (j \neq l_1)$  的方向运动, 所以机器人在  $\otimes_1$  内可以安全避开障碍物, 在  $\otimes_2, \dots, \otimes_{g-1}$  内相同. 在凸多边形  $\otimes_g$  内部证明过程类似, 不再赘述.  $\square$

### 4 实验与分析

为了验证所提出的算法可以有效地解决传统人工势场的不足, 在 Pioneer3-DX 机器人平台提供的 MobileSim 仿真环境中进行实验, 仿真用机器人与实际机器人完全相同.

实验环境如图 3(a) 所示. 环境规模为  $18\text{ m} \times 11\text{ m}$ , 起始点  $T$  位于障碍物  $Ob_1$  上  $\angle ABC$  的角平分线上, 目标点  $G$ 、障碍物  $Ob_1$  上的点  $B$  和起始点  $T$  在同一条直线上, 目标点  $G$  靠近障碍物  $Ob_2$ . 由于  $TB$  为  $\angle ABC$  的角平分线, 在传统人工势场中的机器人会在直线  $TB$  上震荡, 并停止于局部极小点 (见图 4(a)).

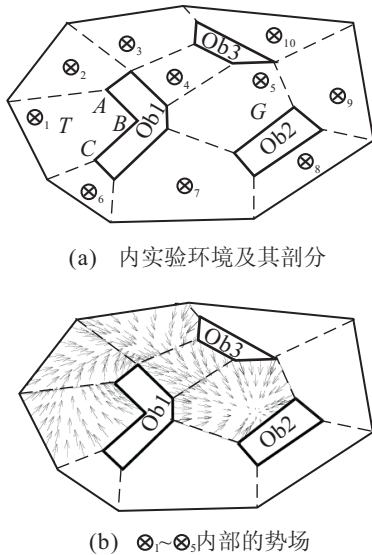


图 3 实验环境图示

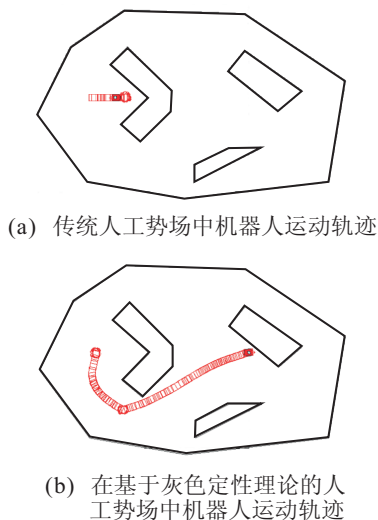


图 4 机器人运动轨迹对比

使用本文方法建立人工势场. 首先对环境进行凸剖分, 结果如图 3(a) 所示, 建立灰色定性量空间  $\tilde{S} = \{\otimes_i | i = 1, 2, \dots, 10\}$ . 从起始点  $T$  到目标点  $G$  经过的凸多边形序列为  $\otimes_1 \sim \otimes_5$ ,  $\otimes_1 \sim \otimes_5$  内的势场如图 3(b) 所示. 设置凸多边形各顶点处势场向量比例系数  $\eta = 1/2$ , 机器人的采样周期为  $1\text{ s}$ . 在用本文方法建立的人工势场中, 机器人运动轨迹如图 4(b) 所示, 且由图 4(b) 可见, 当机器人靠近目标点时, 并不会因为来自于障碍物的斥力使机器人不能到达目标点.

由图 5(a) 可见, 在传统的人工势场中, 当机器人的运动速率为  $0$  时, 机器人到目标点的距离却不为  $0$ . 由图 5(b) 可见, 在基于灰色定性理论的人工势场中, 机器人仅在绕过障碍物  $Ob_1$  端点  $A$  时使机器人与目标点的距离略有增加, 其后机器人与目标点的距离逐步减小无震荡过程, 而且机器人靠近目标点时机器人的运动速率也逐步减小, 机器人与目标点的距离和机器人速率同时减小到  $0$ , 验证了在基于灰色定性理论的人工势场中不存在陷阱.

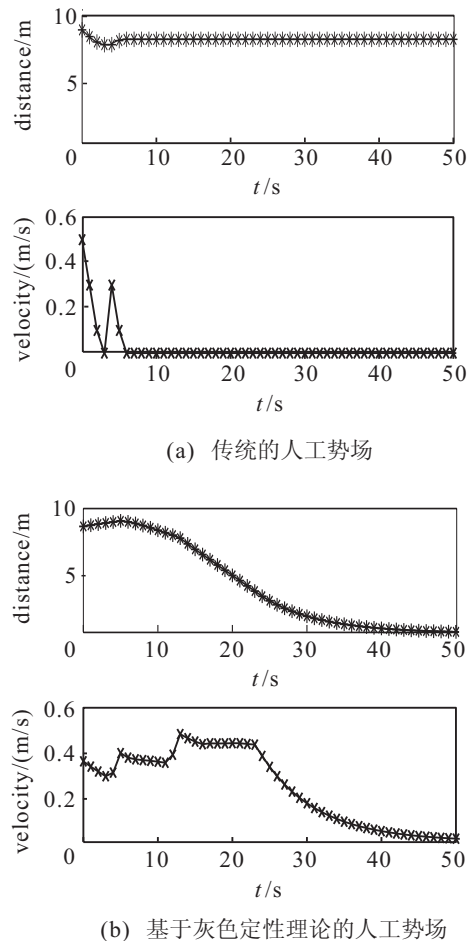


图 5 机器人运动速率及与目标点的距离和时间的关系对比

### 5 结 论

本文主要工作在于从环境中抽取关键信息存储于灰色定性基本元中, 通过分析人类智能行为定义灰色定性基本元上的灰色定性特征值, 然后利用这

些“小样本、贫信息”的不完备知识通过广义白化函数计算获得全部所需信息。

理论分析表明: 利用环境中少量关键信息计算的势场可以确保机器人在有限的时间内安全到达目标点, 既保留了传统人工势场中计算简单便于应用的优点, 又克服了传统人工势场的不足。

在 Pioneer3-DX 机器人平台上的实验表明: 在起始点和目标点之间存在 U 形障碍物以及目标点距离障碍物较近的情况下, 仍可以使机器人安全到达目标点, 从而验证了本文方法的正确性和有效性。

#### 参考文献(References)

- [1] 朱大奇, 颜明重. 移动机器人路径规划综述[J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 961-966.  
(Zhu D Q, Yan M Z. Survey on technology of mobile robot path planning[J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 961-966.)
- [2] Dennis B, Jeroen H, Renvan M. Real-time motion path generation using sub-targets in a rapidly changing environment[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2007, 55(3): 470-479.
- [3] Erdinc S C. Path planning using potential fields for highly redundant manipulators[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2005, 52(2): 209-228.
- [4] Jaradat M, Garibeh M H, Feilat E A. Dynamic motion planning for autonomous mobile robot using fuzzy potential field[C]. The 6th Int Symposium on Mechatronics and Its Applications. Sharjah: IEEE, 2009: 1-6.
- [5] Jaradat M, Garibeh M H, Feilat E A. Autonomous mobile robot dynamic motion planning using hybrid fuzzy potential field[J]. Soft Computing, 2011, 16(1): 153-164.
- [6] 于振中, 闫继宏, 赵杰. 改进人工势场法的移动机器人路径规划[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(1): 50-55.  
(Yu Z Z, Yan J H, Zhao J. Mobile robot path planning based on improved artificial potential field method[J]. J of Harbin Institute of Technology, 2011, 43(1): 50-55.)
- [7] Huang Y L, Chen Z H, Gui W S. Grey qualitative simulation[J]. The J of Grey System, 2004, 16(1): 52-20.
- [8] Chen C L, Dong D Y, Chen Z H. Grey systems for intelligent sensors and information processing[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2008, 19(4): 659-665.
- [9] 段家庆, 陈宗海, 罗杨宇. 基于灰色定性理论的移动机器人地图创建[J]. 控制与决策, 2009, 24(10): 1473-1482.  
(Duan J Q, Chen Z H, Luo Y Y. Map building for mobile robot based on GQSIM[J]. Control and Decision, 2009, 24(10): 1473-1482.)
- [10] Alexander M. Intelligent systems: Architecture, design and control[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc. 2005: 115-151.
- [11] Zhou P D. An algorithm for partitioning polygons into convex parts[J]. J Beijing Insititute of Technology, 1997, 6(4): 363-368.
- 
- (上接第878页)
- [8] 闵克学, 葛宏伟, 张毅, 等. 基于蚁群和粒子群优化的混合算法求解 TSP 问题[J]. 吉林大学学报: 信息科学版, 2006, 24(4): 402-405.  
(Min K X, Ge H W, Zhang Y, et al. Solving traveling salesman problems by an ACO-and-PSO-Based hybrid algorithm[J]. J of Jilin University: Information Science Edition, 2006, 24(4): 402-405.)
- [9] 柴宝杰, 刘大为. 基于粒子群优化的蚁群算法在 TSP 中的应用[J]. 计算机仿真, 2009, 26(8): 89-91.  
(Chai B J, Liu D W. Application of an ant colony algorithm in TSP based on particle swarm[J]. Computer Simulation, 2009, 26(8): 89-91.)
- [10] 夏辉, 王华, 陈熙. 一种基于微粒群思想的蚁群参数自适应优化算法[J]. 山东大学学报: 工学版, 2010, 40(3): 26-30.  
(Xia H, Wang H, Chen X. A kind of ant colony parameter adaptive optimization algorithm based on particle swarm optimization thought[J]. J of Shandong University: Engineering Science, 2010, 40(3): 26-30.)
- [11] 杨亚南. 蚁群算法参数优化及其应用[D]. 南京: 南京理工大学计算机科学与工程学院, 2008.  
(Yang Y N. The parameter optimization of ant colony algorithm and its application[D]. Nanjing: School of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, 2008.)