

文章编号: 1001-0920(2013)05-0657-07

## 随机退货环境下最优补货和处理控制策略

娄山佐<sup>1</sup>, 田新诚<sup>1</sup>, 吕文<sup>2</sup>

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061; 2. 烟台大学数学与信息科学学院, 山东烟台 264005)

**摘要:** 随机退货会导致库存增加, 为了控制库存位于某一合理区间内, 在假设库存水平的动态变化由布朗运动描述条件下, 利用更新过程和鞅理论构建了提前期为随机时系统的期望折扣总费用(包括库存、短缺、补货和处理费用)模型, 并在此基础上, 采用交叉熵法确定最优的产品补充和退货处理策略. 最后通过仿真实验分析了系统参数变化对最优控制策略和期望折扣总费用的影响.

**关键词:** 库存控制; 退货处理; 更新过程; 布朗运动; Kella-Whitt鞅

**中图分类号:** F253.4; N945.12

**文献标志码:** A

## Optimal replenishment-disposal control policy under stochastic returns

LOU Shan-zuo<sup>1</sup>, TIAN Xin-cheng<sup>1</sup>, LV Wen<sup>2</sup>

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Ji'nan 250061, China; 2. School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai 264005, China. Correspondent: LOU Shanzuo, E-mail: Lshanzuo@163.com)

**Abstract:** Stochastic returns can lead to the increase of inventory. In order to keep the inventory level between a reasonable interval, under the assumption that the inventory level is expressed as a Brownian motion(BM), the total expected discounted cost(including inventory, shortage, replenishment and disposal cost) model is established by utilizing renewal process and martingale theorems for some random lead times. Subsequently, the cross-entropy method is applied to obtain the optimal replenishment and disposal policies are returned. Numerical results illustrate the effect of system parameters on the optimal control policies and the total expected discounted cost.

**Key words:** inventory control; returns disposal; renewal process; Brownian motion; Kella-Whitt martingale

### 0 引言

目前,许多企业都面临退货困扰,如Wal-Mart每年的退货处理费高达6亿美元<sup>[1]</sup>.退货不但在经济上造成巨大损失,而且在数量和时间上的高度不确定性导致库存变化失去了单调性,从而很难有效地管理.近年来,该问题已引起一些学者的关注.由于建模的复杂性,所做的研究大多集中在确定性<sup>[2]</sup>或动态确定性需求和退货环境下库存管理问题<sup>[3-4]</sup>.

现实中,需求和退货经常是不确定的.需求导致库存减少,而退货又造成库存增加,它们共同作用下的库存水平呈现出随机波动的特点.当需求和退货到达强度较小时,库存变化表现为离散的跳跃运动,此情况下常采用排队理论解决库存问题<sup>[5]</sup>;当需求和退货到达强度较大时,库存水平变化可近似描述为连续

的布朗运动(BM).下面,给出近年来与此有关的研究成果.由于存在提前期,极大地增加了问题的求解难度.文献[6-7]在假设提前期为零的条件下,利用脉冲控制法,分别研究了库存被控制在某一范围和趋近给定目标值的最优策略问题;文献[8]在假设确定提前期执行中,库存总高于订货水平的情况下,分析了退货处理和订货策略问题,但它仅能得到次优解.文献[9]假设在提前期执行中,若退货造成库存超出控制阈值,且订单可取消的条件下,则给出了补货和订单控制的联合最优策略.遗憾的是,它无法将库存控制在一定范围内.

为有效控制库存变化,本文在上述成果基础上,针对随机提前期研究了集成退货处理和产品补充控制问题.在描述问题后,构建了系统期望折扣总费用

收稿日期: 2012-01-31; 修回日期: 2012-04-26.

基金项目: 国家科技重大专项基金项目(2010ZX04001-161); 国家863计划项目(2012AA041307); “泰山学者”建设工程专项经费项目; 济南市高校自主创新计划基金项目.

作者简介: 娄山佐(1964—),男,副教授,博士,从事现代物流网络复杂特性分析、库存控制、智能算法等研究; 田新诚(1965—),男,教授,博士生导师,从事先进制造技术、机电一体化、复杂系统优化和控制等研究.

模型, 并利用仿真实验分析了系统参数对最优策略和费用的影响.

## 1 问题描述

一零售商面临顾客对某种产品连续的需求和退货. 假设退货经简单处理(如擦洗)后如同新品一样能够满足未来顾客需要, 则零售商库存水平动态变化过程可采用BM近似描述. 若系统实施供应商管理库存策略, 其目标是控制库存存在某一合理区间内, 即当大量退货使库存到达处理水平 $S$ 时, 则供应商将超出水平 $Q$ 的退货回收或运到其他零售商; 当库存到达订货水平 $r$ 时, 供应商开始备货, 经过与库存独立的参数为 $\xi$ 的指数分布提前期, 若此时库存水平小于 $Q$ , 则供应商将库存补充到 $Q$ ; 若大于 $Q$ , 则将超出部分处理掉. 假设供应商在提前期执行中仅备一次货, 期间若库存水平为零, 则用户需求丢失. 若每次退货处理和补货的固定费用分别为 $\kappa_u$ 和 $\kappa_o$ , 单位产品的退货处理、补货和短缺费用分别为 $k_u$ 、 $k_o$ 和 $\pi$ , 单位时间每单位产品库存费用为 $h$ , 则可确定 $S$ 、 $Q$ 和 $r$ , 使系统的期望折扣总费用最小.

由以上描述可知, 若每次选择提前期结束后, 库存位于水平 $Q$ 时作为起始点, 则它的变化是一个更新过程. 图1给出了一次循环库存水平的变化过程.

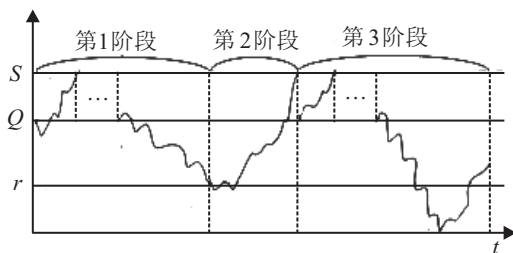


图1 一次循环库存水平的变化过程

为便于分析, 将一次循环分为3个阶段: 1) 从更新水平 $Q$ 开始, 至库存到达订货水平 $r$ 为止; 2) 从水平 $r$ 开始, 至提前期结束或库存到达水平 $S$ 为止; 3) 从水平 $Q$ 开始, 至提前期结束为止. 在第2阶段, 若库存到达水平 $S$ 前提前期结束, 则该次循环不包含第3阶段. 另外, 除退货处理时间点外, 第1阶段库存变化可用BM描述. 第2和第3阶段, 为避免提前期执行中库存是负的, 库存变化用在0点反射BM(RBM)描述.

## 2 费用模型的建立及求解

建模工具是Kella-Whitt鞅, 它是有效解决Levy过程问题的方法<sup>[10]</sup>. 假设 $X$ 是从0点出发, 漂移和扩散参数分别为 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的BM, 对应的RBM为 $W(t) = X(t) + L(t)$ , 其中 $L(t) = -\lim_{0 \leq s \leq t} [X(s)]^-$ 为局部时间过程, 则

$$M(t) = (\varphi(\alpha) - \beta) \int_0^t e^{-\alpha W(s) - \beta s} ds + e^{-\alpha W(0)} - e^{-\alpha W(t) - \beta t} - \alpha \int_0^t e^{-\beta s} dL(s) \quad (1)$$

是一个零均值鞅, 这里 $\varphi(\alpha) = \log E \exp^{-\alpha X(1)} = \sigma^2 \alpha^2 / 2 - \mu \alpha$ 为 $X$ 的特征指数. 若过程无反射, 则式(1)不含最后一项. 不失一般性, 本文取 $\sigma^2 = 2$ , 所以 $\varphi(\alpha) = \alpha^2 - \mu \alpha$ .

另外, 为便于说明, 采用如下标记:  $E_x[\cdot] = E[\cdot | W(0) = x]$ .

### 2.1 第1阶段费用模型的建立

退货处理的存在导致库存变化不再具有连续性, 为此, 先构建库存水平变化过程函数.

定义 $\tau_1 = z_1 = \inf\{t > 0 : X(t) = S - Q \text{ or } X(t) = r - Q\}$ , 若对某一 $n \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $\tau_n$ 已定义, 令 $z_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ ,  $\tau_{n+1} = \inf\{t > z_n : X(t - z_n) = S - Q \text{ or } X(t - z_n) = r - Q\} - z_n$ , 则 $\tau_1, \tau_2, \dots$ 是独立同分布的.

定义

$$W_1(t) = \begin{cases} Q + X(t), & 0 \leq t \leq z_1; \\ Q + X(t - z_n), & z_n < t \leq z_{n+1}. \end{cases}$$

显然, 在时刻 $z_n$ ,  $W_1(t)$ 是不连续的, 有 $W_1(z_n) \in \{r, S\}$ , 右极限 $W_1(z_n+) = Q$ , 不难证明, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $W_1(t)$ 是从 $Q$ 出发的更新过程.

定义停时 $T_1 = \inf\{t > 0 : W_1(t) = r\}$ , 则 $T_1 = z_{N_1}$ , 其中 $N_1$ 服从参数为 $p_1$ 的几何分布. 据由BM理论<sup>[11]</sup>可知,  $p_1$ 等于从水平 $Q$ 出发的BM在到达水平 $S$ 前到达 $r$ 的概率, 其值为

$$p_1 = P_Q(W_1(\tau_1) = r) = (e^{-\mu S} - e^{-\mu Q}) / (e^{-\mu S} - e^{-\mu r}).$$

至此,  $0 \sim T_1$ 时间的 $W_1(t)$ 描述了第1阶段库存的变化过程. 基于更新过程理论, 可依据 $t \in [0, \tau_1]$ 的 $W_1(t)$ , 给出此阶段所有费用函数.

下面确定有关函数. 因该阶段无反射, 式(1)不含最后一项, 对停时 $\tau$ 应用最优抽样定理得

$$\begin{aligned} & (\varphi(\alpha) - \beta) E_Q \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha W_1(t) - \beta t} dt = \\ & E_Q [e^{-\alpha W_1(\tau_1) - \beta \tau_1}] - E_Q [e^{-\alpha W_1(0)}] = \\ & e^{-\alpha r} E_Q [e^{-\beta \tau_1} \mathbf{I}_{\{W_1(\tau_1)=r\}}] + \\ & e^{-\alpha S} E_Q [e^{-\beta \tau_1} \mathbf{I}_{\{W_1(\tau_1)=S\}}] - e^{-\alpha Q} = \\ & e^{-\alpha r} \phi_r + e^{-\alpha S} \phi_S - e^{-\alpha Q}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_r &= E_Q [e^{-\beta \tau_1} \mathbf{I}_{\{W_1(\tau_1)=r\}}], \\ \phi_S &= E_Q [e^{-\beta \tau_1} \mathbf{I}_{\{W_1(\tau_1)=S\}}]. \end{aligned}$$

依据 $\varphi(\alpha) - \beta = 0$ , 求得 $\alpha$ 的两个根如下:

$$\alpha_1 = [\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\beta}]/2, \alpha_2 = [\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\beta}]/2.$$

将  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别代入式(2)得

$$e^{-\alpha_i r} \phi_r + e^{-\alpha_i S} \phi_S - e^{-\alpha_i Q} = 0, i = 1, 2,$$

解得

$$\phi_r = \frac{e^{-\alpha_1 Q - \alpha_2 S} - e^{-\alpha_1 S - \alpha_2 Q}}{e^{-\alpha_1 r - \alpha_2 S} - e^{-\alpha_1 S - \alpha_2 r}},$$

$$\phi_S = \frac{e^{-\alpha_1 r - \alpha_2 Q} - e^{-\alpha_1 Q - \alpha_2 r}}{e^{-\alpha_1 r - \alpha_2 S} - e^{-\alpha_1 S - \alpha_2 r}}.$$

因此, 式(2)可表示为

$$E_Q \int_0^{T_1} e^{-\alpha W_1(t) - \beta t} dt = (e^{-\alpha r} \phi_r + e^{-\alpha S} \phi_S - e^{-\alpha Q}) / (\varphi(\alpha) - \beta). \quad (3)$$

对式(3)两边关于  $\alpha$  求导, 并令  $\alpha = 0$  得

$$E_Q \int_0^{T_1} e^{-\beta t} W_1(t) dt = [(Q - r\phi_r - S\phi_S)\beta - (\phi_r + \phi_S - 1)\mu] / \beta^2.$$

另有

$$\Gamma_1 = E_Q[e^{-\beta T_1}] = \sum_{n=1}^{\infty} E_Q[e^{-\beta T_1} \mathbf{I}_{\{N_1=n\}}] = \sum_{n=1}^{\infty} [E_Q(e^{-\beta \tau_1} \mathbf{I}_{\{W_1(\tau_1)=S\}})]^{n-1} E_Q[e^{-\beta \tau_1} \mathbf{I}_{\{W_1(\tau_1)=r\}}] = \phi_r / (1 - \phi_S). \quad (4)$$

下面构建费用函数模型. 本阶段包含两种费用:

1) 退货处理期望折扣费用.

定义  $T_u = \inf\{t > 0 : W_1(t) = S\}$ ;  $K_u$  表示每次库存到达水平  $S$  时的退货处理费用, 即  $K_u = \kappa_u + k_u(S - Q)$ ;  $N(t)$  表示到  $t$  时退货处理次数. 由上面分析可知, 到  $T_1$  时的退货处理次数为  $N_1 - 1$ , 故该费用为

$$C_D^1 = K_u E_Q \int_0^{T_1} e^{-\beta t} dN(t) = K_u E_Q \left[ \sum_{i=1}^{N_1-1} (E_Q e^{-\beta T_u})^i \right] = K_u \phi_S / (1 - \phi_S). \quad (5)$$

2) 库存期望折扣费用.

借鉴文献[12]求解思路, 在  $N_1$  服从参数为  $p_1$  的几何分布条件下, 该费用可表示为

$$C_P^1 = h E_Q \int_0^{T_1} e^{-\beta t} W_1(t) dt = h E_Q \int_0^{T_1} e^{-\beta t} W_1(t) dt / p_1 = h [(Q - r\phi_r - S\phi_S)\beta - (\phi_r + \phi_S - 1)\mu] / (p_1 \beta^2). \quad (6)$$

## 2.2 第2阶段费用模型的建立

为便于分析, 本阶段计时从第1阶段结束开始. 定义RBM为  $W_2(t) = r + X(t) + L_2(t)$ , 其中  $L_2(t) = -\inf_{0 \leq s \leq t} [r + X(s)]^-$ . 定义  $\hat{T}_2 = \inf\{t > 0 : W_2(t) = S\}$ ,  $T_\xi$  表示参数为  $\xi$  的指数分布随机变量(即提前期),  $T_2 = \hat{T}_2 \wedge T_\xi$ . 因此, 当  $t \in [0, T_2]$  时,  $W_2(t)$  描述了第2

阶段库存水平的变化过程.

为了确定有关库存和短缺函数, 先利用式(1)对  $T_2$  应用最优抽样定理, 得

$$(\varphi(\alpha) - \beta) E_r \int_0^{T_2} e^{-\alpha W_2(t) - \beta t} dt = E_r [e^{-\alpha W_2(T_2) - \beta T_2}] - e^{-\alpha r} + \alpha E_r \int_0^{T_2} e^{-\beta t} dL_2(t). \quad (7)$$

其中

$$E_r [e^{-\alpha W_2(T_2) - \beta T_2}] = E_r [e^{-\alpha W_2(\hat{T}_2) - \beta \hat{T}_2} \mathbf{I}_{\{\hat{T}_2 < T_\xi\}}] + E_r [e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi} \mathbf{I}_{\{T_\xi \leq \hat{T}_2\}}] = E_r [e^{-\alpha W_2(\hat{T}_2) - \beta \hat{T}_2} \mathbf{I}_{\{\hat{T}_2 < T_\xi\}}] + E_r [e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi}] - E_r [e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi} \mathbf{I}_{\{\hat{T}_2 < T_\xi\}}] = e^{-\alpha S} E_r [e^{-(\beta + \xi)\hat{T}_2}] + E_r [e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi}] - E_r [e^{-(\beta + \xi)\hat{T}_2}] E_S [e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi}].$$

故式(7)可简化为

$$(\varphi(\alpha) - \beta) E_r \int_0^{T_2} e^{-\alpha W_2(t) - \beta t} dt = -e^{-\alpha r} \theta_1 + \Phi_r(\alpha) - \theta_1 \Phi_S(\alpha) + \alpha E_r \int_0^{T_2} e^{-\beta t} dL_2(t). \quad (8)$$

其中

$$\theta_1 = E_r [e^{-(\beta + \xi)\hat{T}_2}], \Phi_r(\alpha) = E_r [e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi}], \Phi_S(\alpha) = E_S [e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi}].$$

下面利用式(1)来确定式(8)的各项具体形式.

首先, 针对循环时间  $\hat{T}_2$ , 应用最优抽样定理得

$$(\varphi(\alpha) - \beta) E_r \int_0^{\hat{T}_2} e^{-\alpha W_2(t) - \beta t} dt = E_r [e^{-\alpha W_2(\hat{T}_2) - \beta \hat{T}_2}] - e^{-\alpha r} + \alpha E_r \int_0^{\hat{T}_2} e^{-\beta t} dL_2(t). \quad (9)$$

令  $\varphi(\alpha) - \beta = 0$  中  $\beta$  取  $\hat{\beta} = \beta + \xi$ , 求得  $\alpha$  的两根如下:

$$v_1 = [\mu + \sqrt{\mu^2 + 4(\beta + \xi)}] / 2,$$

$$v_2 = [\mu - \sqrt{\mu^2 + 4(\beta + \xi)}] / 2.$$

因式(9)对任意  $\alpha$  及非负  $\beta$  均成立, 故令  $\beta$  取  $\hat{\beta}$ ,  $\alpha$  分别取  $v_1$  和  $v_2$ , 可得

$$e^{-v_i S} \theta_1 + v_i E_r \int_0^{\hat{T}_2} e^{-\hat{\beta} t} dL_2(t) = e^{-v_i r}, i = 1, 2,$$

解得

$$\theta_1 = \frac{v_2 e^{-v_1 r} - v_1 e^{-v_2 r}}{v_2 e^{-v_1 S} - v_1 e^{-v_2 S}}.$$

若  $\beta$  取  $\hat{\beta}$ ,  $\alpha$  取 0, 则得

$$E_r \int_0^{\widehat{T}_2} e^{-(\beta+\xi)t} dt = (1 - E_r[e^{-(\beta+\xi)\widehat{T}_2}]) / (\beta + \xi) = (1 - \theta_1) / (\beta + \xi).$$

从而, 可求得

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= E_r[e^{-\beta T_2}] = \\ &E_r[e^{-\beta \widehat{T}_2} \mathbf{I}_{\{\widehat{T}_2 < T_\xi\}}] + E_r[e^{-\beta T_\xi} \mathbf{I}_{\{\widehat{T}_2 \geq T_\xi\}}] = \\ &E_r[e^{-(\beta+\xi)\widehat{T}_2}] + \xi E_r \int_0^{\widehat{T}_2} e^{-(\beta+\xi)t} dt = \\ &(\theta_1 \beta + \xi) / (\beta + \xi). \end{aligned} \quad (10)$$

其次, 针对循环时间  $T_\xi$ , 应用最优抽样定理得

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha) - \beta) E_r \int_0^{T_\xi} e^{-\alpha W_2(t) - \beta t} dt &= \\ E_r[e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi}] - e^{-\alpha r} + \\ \alpha E_r \int_0^{T_\xi} e^{-\beta t} dL_2(t). \end{aligned} \quad (11)$$

根据更新过程理论和 PASTA 原则, 有下列关系:

$$\begin{aligned} E_r[e^{-\alpha W_2(T_\xi) - \beta T_\xi}] &= \\ E_r \int_0^{T_\xi} e^{-\alpha W_2(t) - \beta t} dt / E_r[T_\xi] &= \\ \xi E_r \int_0^{T_\xi} e^{-\alpha W_2(t) - \beta t} dt, \end{aligned}$$

故式 (11) 可表示为

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha) - \beta - \xi) E_r \int_0^{T_\xi} e^{-\alpha W_2(t) - \beta t} dt &= \\ -e^{-\alpha r} + \alpha E_r \int_0^{T_\xi} e^{-\beta t} dL_2(t). \end{aligned} \quad (12)$$

将  $v_1$  代入式 (12), 得

$$E_r \int_0^{T_\xi} e^{-\beta t} dL_2(t) = e^{-v_1 r} / v_1, \quad (13)$$

故由式 (11)~(13), 可求得

$$\Phi_r(\alpha) = \xi(\alpha e^{-v_1 r} - v_1 e^{-\alpha r}) / [v_1(\varphi(\alpha) - \beta - \xi)],$$

同理

$$\Phi_S(\alpha) = \xi(\alpha e^{-v_1 S} - v_1 e^{-\alpha S}) / [v_1(\varphi(\alpha) - \beta - \xi)].$$

至此, 式 (8) 右边各项的具体形式已确定.

最后, 将  $\alpha_1$  代入式 (8), 可得

$$\begin{aligned} E_r \int_0^{T_2} e^{-\beta t} dL_2(t) &= \\ [e^{-\alpha_1 r} - e^{-\alpha_1 S} \theta_1 - \Phi_r(\alpha_1) + \theta_1 \Phi_S(\alpha_1)] / \alpha_1. \end{aligned}$$

将式 (8) 两边对  $\alpha$  求导, 并令  $\alpha = 0$  得

$$\begin{aligned} E_r \int_0^{T_2} e^{-\beta t} W_2(t) dt &= \\ \left[ r - S\theta_1 + E_r \int_0^{T_2} e^{-\beta t} dL_2(t) + \Phi_r'(0) - \theta_1 \Phi_S'(0) \right] / \\ \beta - \mu[\theta_1 - 1 + \Phi_r(0) - \theta_1 \Phi_S(0)] / \beta^2. \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\Phi_r'(0)$  和  $\Phi_S'(0)$  是  $\Phi_r(\alpha)$  和  $\Phi_S(\alpha)$  关于  $\alpha$  一阶导数在 0 点的值.

本阶段包含以下 3 种费用:

1) 库存期望折扣费用

$$C_P^2 = h E_r \int_0^{T_2} e^{-\beta t} W_2(t) dt. \quad (15)$$

将式 (14) 代入, 即可得其值.

2) 短缺期望折扣费用

$$\begin{aligned} C_S^2 &= \pi E_r \int_0^{T_2} e^{-\beta t} dL_2(t) = \\ \pi [e^{-\alpha_1 r} - e^{-\alpha_1 S} \theta_1 - \Phi_r(\alpha_1) + \theta_1 \Phi_S(\alpha_1)] / \alpha_1. \end{aligned} \quad (16)$$

3) 补货和退货处理期望折扣费用.

由文献 [13-14] 可知,  $W_2(t)$  是从水平  $r$  出发的 RBM, 若它与  $T_\xi$  独立, 则提前期结束时,  $W_2(T_\xi)$  的密度函数为

$$\begin{aligned} g_r^+(x) &= \eta_r \lambda_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x > r; \\ g_r^-(x) &= \rho_r (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{\lambda_2 x}), \quad 0 < x \leq r. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= [\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\xi}] / 2, \quad \lambda_2 = [\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\xi}] / 2, \\ \eta_r &= (\lambda_1 e^{-\lambda_2 r} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 r}) / (\lambda_2 - \lambda_1), \\ \rho_r &= \lambda_2 e^{-\lambda_1 r} / (\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned}$$

本阶段的补货和退货处理期望折扣费用, 仅当  $T_\xi$  小于  $\widehat{T}_2$  的情况下发生, 此时,  $W_2(T_\xi)$  落在  $(0, S)$  之间, 其值分别为

$$\begin{aligned} C_o^2 &= \\ E_r \{ e^{-\beta T_2} [\kappa_o + k_o(Q - W_2(T_\xi))] \cdot \mathbf{I}_{\{W_2(T_\xi) \leq Q\}} \} &= \\ \Gamma_2 \left[ \kappa_o \left( \int_0^r g_r^-(x) dx + \int_r^Q g_r^+(x) dx \right) + \right. \\ k_o \left( \int_0^r (Q - x) g_r^-(x) dx + \right. \\ \left. \left. \int_r^Q (Q - x) g_r^+(x) dx \right) \right] / G(S) &= \\ \Gamma_2 \{ k_o [\rho_r e^{\lambda_1 r} - (\rho_r + \eta_r) e^{\lambda_2 r} + \\ \eta_r e^{\lambda_2 Q}] + k_o [(Q - r + \lambda_1^{-1}) \rho_r e^{\lambda_1 r} - \\ (\rho_r + \eta_r)(Q - r + \lambda_2^{-1}) e^{\lambda_2 r} + \eta_r \lambda_2^{-1} e^{\lambda_2 Q} - \\ \rho_r (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})] \} / G(S), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} C_u^2 &= \\ E_r \{ e^{-\beta T_2} [\kappa_u + k_u(W_2(T_\xi) - Q)] \cdot \mathbf{I}_{\{Q < W_2(T_\xi) < S\}} \} &= \\ \Gamma_2 \left[ \kappa_u \int_Q^S g_r^+(x) dx + k_u \int_Q^S (x - Q) g_r^+(x) dx \right] / G(S) &= \\ \Gamma_2 \eta_r \{ \kappa_u (e^{\lambda_2 S} - e^{\lambda_2 Q}) + k_u [(S - Q - \lambda_2^{-1}) e^{\lambda_2 S} + \\ \lambda_2^{-1} e^{\lambda_2 Q}] \} / G(S), \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $G(S) = 1 - \int_S^\infty g_r^+(x) dx = 1 + \eta_r e^{\lambda_2 S}$ .

### 2.3 第 3 阶段费用模型的建立

与前面相同, 本阶段从 0 开始计时. 为构建库存变化过程函数, 定义 RBM 为  $V(t) = Q + X(t) + L_3(t)$ , 其中  $L_3(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} [Q + X(s)]^-$ . 定义  $\bar{T}_1 = \inf\{t > 0 : V(t) = S\}$ ,  $\bar{\tau}_1 = \gamma_1 = \bar{T}_1 \wedge T_\xi$ . 若对某一  $n \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $\bar{\tau}_n$  已定义, 令  $\gamma_n = \sum_{i=1}^n \bar{\tau}_i$ ,  $\bar{T}_{n+1} = \inf\{t > \gamma_n : V(t - \gamma_n) = S\} - \gamma_n$ ,  $\bar{\tau}_{n+1} = \bar{T}_{n+1} \wedge T_\xi$ , 则  $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots$  是独立同分布的.

定义

$$W_3(t) = \begin{cases} V(t), & 0 \leq t \leq \gamma_1; \\ V(t - \gamma_n), & \gamma_n < t \leq \gamma_{n+1}. \end{cases}$$

易证, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $W_3(t)$  是从  $Q$  出发的更新过程.

取  $N_2 = \min\{n \geq 1 : \bar{\tau}_n = T_\xi\}$ , 则它服从参数为  $p_2$  的几何分布,  $p_2 = P_Q(T_\xi < \bar{T}_1) = 1 - E_Q[e^{-\xi\bar{T}_1}]$ . 故第3阶段时间  $T_3$  等于  $\gamma_{N_2}$ , 且  $0 \sim T_3$  时间的  $W_3(t)$  描述了该阶段库存的变化过程. 同样, 由  $t \in [0, \bar{\tau}_1]$  的  $W_3(t)$ , 可求出此阶段所有费用函数.

按式(8)求解方法, 对  $\bar{\tau}_1$  应用最优抽样定理得

$$\begin{aligned} & (\varphi(\alpha) - \beta)E_Q \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\alpha W_3(t) - \beta t} dt = \\ & -e^{-\alpha Q} + e^{-\alpha S} \theta_2 + \Phi_Q(\alpha) - \\ & \theta_2 \Phi_S(\alpha) + \alpha E_Q \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\beta t} dL_3(t). \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$\theta_2 = E_Q[e^{-(\beta+\xi)\bar{T}_1}]$ ,  $\Phi_Q(\alpha) = E_Q[e^{-\alpha W_3(T_\xi) - \beta T_\xi}]$ , 等于用  $Q$  分别取代  $\theta_1$  和  $\Phi_r(\alpha)$  中  $r$  得到的值. 令  $\theta_2$  中的  $\beta = 0$ , 得到  $E_Q[e^{-\xi\bar{T}_1}]$ , 进而可求出  $p_2$  值.

据式(19), 按与第2阶段相同方法, 可得到

$$\begin{aligned} & E_Q \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\beta t} dL_3(t) = \\ & [e^{-\alpha_1 Q} - e^{-\alpha_1 S} \theta_2 - \Phi_Q(\alpha_1) + \theta_2 \Phi_S(\alpha_1)] / \alpha_1, \\ & E_Q \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\beta t} W_3(t) dt = \\ & [Q - S \theta_2 + E_Q \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\beta t} dL_3(t) + \Phi'_Q(0) - \\ & \theta_2 \Phi'_S(0)] / \beta - \mu[\theta_2 - 1 + \Phi_Q(0) - \theta_2 \Phi_S(0)] / \beta^2. \end{aligned} \quad (20)$$

结合式(4)和(10)的求解方法, 可得

$$\Gamma_3 = E_Q[e^{-\beta T_3}] = \xi / (\beta + \xi). \quad (21)$$

下面, 构建有关费用模型. 本阶段包含3种费用:

1) 库存期望折扣费用

$$\begin{aligned} C_P^3 &= h E_Q \int_0^{T_3} e^{-\beta t} W_3(t) dt = \\ & h E_Q \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\beta t} W_3(t) dt / p_2, \end{aligned} \quad (22)$$

将式(20)代入, 即可得到该值.

2) 短缺期望折扣费用

$$\begin{aligned} C_S^3 &= \pi E_Q \int_0^{T_3} e^{-\beta t} dL_3(t) = \\ & \pi E_Q \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\beta t} dL_3(t) / p_2 = \\ & \pi [e^{-\alpha_1 Q} - e^{-\alpha_1 S} \theta_2 - \Phi_Q(\alpha_1) + \\ & \theta_2 \Phi_S(\alpha_1)] / (\alpha_1 p_2). \end{aligned} \quad (23)$$

3) 退货处理和补货期望折扣费用.

根据提前期执行情况, 又分以下两部分:

1) 提前期结束前发生的退货处理期望折扣费用.

令  $\bar{N}(t)$  表示到  $t$  时的退货处理次数. 由上面分析知, 该阶段退货处理  $N_2 - 1$  次, 考虑到开始前发生的

一次退货处理, 期望折扣费用为

$$\begin{aligned} C_D^3 &= K_u + K_u E_Q \int_0^{T_3} e^{-\beta t} d\bar{N}(t) = \\ & K_u \left( 1 + E_Q \left[ \sum_{i=1}^{N_2-1} (E_Q e^{-\beta \bar{T}_1})^i \right] \right) = \\ & K_u / (1 - q_2 \theta_3). \end{aligned} \quad (24)$$

其中:  $K_u$  与前面定义相同;  $\theta_3 = E_Q[e^{-\beta \bar{T}_1}]$ , 它等于  $\theta_2$  中  $\xi$  取0后的值;  $q_2 = 1 - p_2$ .

2) 提前期结束时发生的期望折扣费用.

与前面类似, 当  $W_3(t)$  从水平  $Q$  出发时,  $W_3(T_\xi)$  的密度函数为

$$\begin{aligned} g_Q^+(x) &= \eta_Q \lambda_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x > Q; \\ g_Q^-(x) &= \rho_Q (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{\lambda_2 x}), \quad 0 < x \leq Q. \end{aligned}$$

其中

$$\eta_Q = (\lambda_1 e^{-\lambda_2 Q} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 Q}) / (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\rho_Q = \lambda_2 e^{-\lambda_1 Q} / (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$\lambda_1$  和  $\lambda_2$  定义同上.

据此, 求得补货和退货处理期望折扣费用分别为

$$\begin{aligned} C_o^3 &= \\ & E_Q \{ e^{-\beta T_3} [\kappa_o + k_o(Q - W_3(T_\xi))] \cdot \mathbf{I}_{\{W_3(T_\xi) \leq Q\}} \} = \\ & \Gamma_3 \left[ \kappa_o \int_0^Q g_Q^-(x) dx + k_o \int_0^Q (Q - x) g_Q^-(x) dx \right] / H(S) = \\ & \Gamma_3 \rho_Q [\kappa_o (e^{\lambda_1 Q} - e^{\lambda_2 Q}) + k_o (\lambda_1^{-1} e^{\lambda_1 Q} - \\ & \lambda_2^{-1} e^{\lambda_2 Q} - \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1})] / H(S), \end{aligned} \quad (25)$$

$C_u^3 =$

$$\begin{aligned} & E_Q \{ e^{-\beta T_3} [\kappa_u + k_u(W_3(T_\xi) - Q)] \cdot \mathbf{I}_{\{Q < W_3(T_\xi) < S\}} \} = \\ & \Gamma_3 \left[ \kappa_u \int_Q^S g_Q^+(x) dx + k_u \int_Q^S (x - Q) g_Q^+(x) dx \right] / H(S) = \\ & \Gamma_3 \eta_Q \{ \kappa_u (e^{\lambda_2 S} - e^{\lambda_2 Q}) + k_u [(S - Q - \lambda_2^{-1}) e^{\lambda_2 S} + \\ & \lambda_2^{-1} e^{\lambda_2 Q}] \} / H(S), \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$H(S) = 1 - \int_S^\infty g_Q^+(x) dx = 1 + \eta_Q e^{\lambda_2 S}.$$

## 2.4 系统优化模型的建立和求解

由问题描述知, 一次循环的时间为  $T = T_1 + T_2 + T_3 \cdot \mathbf{I}_{\{\hat{T}_2 < T_\xi\}}$ , 由RBM的强Markov性知,  $T_1$ ,  $T_2$  和  $T_3$  是独立的, 从而可求得

$$\begin{aligned} \Gamma &= E_Q[e^{-\beta T}] = \\ & E_Q[e^{-\beta T_1}] E_r[e^{-\beta T_2}] (1 - \theta_4 + \theta_4 E_Q[e^{-\beta T_3}]) = \\ & \Gamma_1 \Gamma_2 (1 - \theta_4 + \theta_4 \Gamma_3), \end{aligned} \quad (27)$$

其中:  $\theta_4 = P_r(\hat{T}_2 < T_\xi) = E_r[e^{-\xi \hat{T}_2}]$ , 它等于  $\theta_1$  中  $\beta$  取0后的值. 将式(4), (10)和(21)代入, 即得其值.

根据一次循环费用和时间, 确定期望折扣费用为:

1) 提前期结束前, 退货处理期望折扣费用

$$CD_\infty = (C_D^1 + \theta_4 \Gamma_1 \Gamma_2 C_D^3) / (1 - \Gamma),$$

将式(4), (5), (10), (24)和(27)代入, 即得其值.

2) 提前期结束时, 补货和退货处理期望折扣费用

$$CU_\infty = [(1 - \theta_4) \Gamma_1 (C_o^2 + C_u^2) + \theta_4 \Gamma_1 \Gamma_2 (C_o^3 + C_u^3)] / (1 - \Gamma),$$

将式(4), (3), (17), (18), (25)~(27)代入, 即得其值.

3) 库存期望折扣费用

$$CH_\infty = (C_P^1 + \Gamma_1 C_P^2 + \theta_4 \Gamma_1 \Gamma_2 C_P^3) / (1 - \Gamma),$$

将式(4), (6), (10), (15), (22)和(27)代入, 即得其值.

4) 短缺期望折扣费用

$$CS_\infty = (\Gamma_1 C_S^2 + \theta_4 \Gamma_1 \Gamma_2 C_S^3) / (1 - \Gamma),$$

将式(4), (10), (16), (23)和(27)代入, 即得其值.

最后, 系统最优期望折扣总费用模型为

$$\begin{aligned} \min TC(r, Q, S) &= CD_\infty + CU_\infty + CH_\infty + CS_\infty, \\ \text{s.t. } 0 &\leq r \leq Q \leq S. \end{aligned}$$

该模型是带约束条件  $r, Q$  和  $S$  的高度非线性函数, 传统技术很难求解. 交叉熵法是比较新的解决连续多极值优化问题的方法, 基于罚函数思想, 将约束问题转化为无约束问题. 另外, 为避免搜索陷入局部最优解, 需将更新值进行修正, 本文修正参数  $\omega$  取 0.9. 下面给出第  $m$  次迭代  $r, Q, S$  均值和方差的更新及修正公式<sup>[15]</sup>.

均值和方差更新公式为

$$\begin{aligned} \hat{u}_{k,m} &= \sum_{i=1}^N I_{\{TC_{i,m} \leq \chi_m\}} \vartheta_{i,m}^k / \sum_{i=1}^N I_{\{TC_{i,m} \leq \chi_m\}}, \\ \hat{\delta}_{k,m}^2 &= \sum_{i=1}^N I_{\{TC_{i,m} \leq \chi_m\}} (\vartheta_{i,m}^k - \hat{u}_{k,m})^2 / \sum_{i=1}^N I_{\{TC_{i,m} \leq \chi_m\}}. \end{aligned}$$

均值和方差更新值修正公式为

$$\begin{aligned} u_{k,m} &= \omega \hat{u}_{k,m} + (1 - \omega) u_{k,m}, \\ \delta_{k,m}^2 &= \omega \hat{\delta}_{k,m}^2 + (1 - \omega) \delta_{k,m}^2, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

经过  $M$  次抽样和更新,  $u_{k,M} (k = 1, 2, 3)$  非常接近最优的  $\{r^*, Q^*, S^*\}$ , 故可视为最优解.

### 3 仿真实验及结果分析

为分析参数变化对最优控制策略和总费用的影响, 给出参数基本值如下:  $\kappa_u = 15, k_u = 5, \kappa_o = 6, k_o = 3, h = 3, \pi = 20, \mu_1 = -0.1, \xi = 0.01$ . 每次仅改变一个参数值, 其他取基本值. 考虑空间限制, 折扣系数  $\beta$  取固定值 0.05. 另外, 为分析参数变化对退货处理的影响, 表 1~表 8 中给出了一次循环退货处理期望次数, 即

$$E[N] = (E[N_1] - 1) + \theta_4 E[N_2] = (1/p_1 - 1) + \theta_4/p_2.$$

表 1 和表 2 表明: 当  $\kappa_u$  和  $k_u$  增大时,  $r$  和  $E[N]$  逐渐减小, 而  $TC$  逐渐增大. 除此之外, 为减少退货处理次数, 每次的退货处理量 (即  $S - Q$ ) 也相应增大.

表 1  $\kappa_u$  变化对应的最优控制策略和费用

$\kappa_u$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
5	0.883	1.875	12.856	0.707	297.627
10	0.864	1.875	12.938	0.695	298.621
15	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
20	0.818	1.874	13.102	0.673	300.575
25	0.792	1.873	13.183	0.662	301.535

表 2  $k_u$  变化对应的最优控制策略和费用

$k_u$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
1	0.844	1.854	12.615	0.745	293.529
3	0.843	1.865	12.816	0.714	296.595
5	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
7	0.822	1.882	13.230	0.655	302.554
9	0.788	1.889	13.447	0.627	305.444

表 3 和表 4 表明: 当  $\kappa_o$  和  $k_o$  增大时,  $r, Q$  和  $S$  逐渐变小,  $E[N]$  和  $TC$  逐渐变大; 但因  $\mu$  值较大,  $\kappa_o$  和  $k_o$  对最优控制策略和费用影响不明显.

表 3  $\kappa_o$  变化对应的最优控制策略和费用

$\kappa_o$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
2	0.866	1.881	13.026	0.682	299.443
4	0.854	1.878	13.023	0.683	299.524
6	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
8	0.830	1.871	13.018	0.684	299.684
10	0.818	1.867	13.015	0.685	299.763

表 4  $k_o$  变化对应的最优控制策略和费用

$k_o$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
1	0.858	1.882	13.022	0.683	299.526
2	0.850	1.878	13.021	0.683	299.565
3	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
4	0.834	1.871	13.020	0.684	299.643
5	0.826	1.867	13.019	0.685	299.681

由表 5 可知,  $h$  对最优控制策略和费用影响比较明显. 随  $h$  的增大,  $r, Q$  和  $S$  均逐渐减小, 而  $E[N]$  和  $TC$  相应增大.

表 5  $h$  变化对应的最优控制策略和费用

$h$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
1	3.271	4.090	17.725	0.291	151.292
2	1.712	2.553	14.382	0.520	230.512
3	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
4	0.253	1.486	12.197	0.819	364.494
5	0.000	1.257	11.717	0.909	427.135

由表6可知, 当 $\pi$ 增大时, 为避免缺货造成较大费用,  $r$ 和 $Q$ 逐渐增大,  $TC$ 随之增加, 退货处理水平 $S$ 也逐渐增大, 相应的 $E[N]$ 逐渐变小.

表6  $\pi$ 变化对应的最优控制策略和费用

$\pi$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
10	0.000	1.136	11.875	0.869	250.597
15	0.215	1.487	12.391	0.786	276.241
20	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
25	1.357	2.229	13.552	0.612	321.039
30	1.800	2.558	14.010	0.559	340.893

由表7可知, 当 $\mu$ 逐渐减小时,  $r$ 和 $Q$ 逐渐增大,  $E[N]$ 逐渐减小, 直至接近为0; 而 $S$ 和 $TC$ 的变化不再具有单调性, 它们先减小, 然后又增大.

表7  $\mu$ 变化对应的最优控制策略和费用

$\mu$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
-0.001	0.668	1.578	13.520	1.202	323.444
-0.01	0.682	1.603	13.475	1.026	320.757
-0.1	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
-1	1.553	5.836	14.911	0.001	415.842
-2	4.246	11.206	25.483	0.000	719.072

由表8可知, 随着 $\xi$ 的增大,  $S$ 逐渐减小; 而 $r, Q, E[N]$ 和 $TC$ 的变化, 不再具有单调性.

表8  $\xi$ 变化对应的最优控制策略和费用

$\xi$	$r$	$Q$	$S$	$E[N]$	$TC$
0.0001	1.172	1.607	65.218	0.143	311.388
0.001	1.622	1.622	59.951	0.018	311.286
0.01	0.842	1.874	13.020	0.684	299.604
0.1	0.820	2.253	7.359	0.398	281.739
1	0.100	1.937	7.218	0.242	284.129

总之, 随机退货环境下参数 $\mu$ 和 $\xi$ 的影响比较复杂, 用传统库存管理知识, 很难对它们进行合理解释, 采用多组数据进行试验后, 可得到同样结论. 究其原因, 在于 $\mu$ 和 $\xi$ 对最优控制策略和费用的影响, 除与它们自身大小有关外, 还与系统其他参数相对大小有关.

#### 4 结 论

现实中, 受存储空间和资金限制, 人们经常面临将库存控制在某一合理区间问题. 由于随机退货环境下库存变化不具有单调性, 再加上提前期的随机性, 它们共同作用造成了模型构建非常困难, 从而导致此问题在理论上缺乏研究.

本文在假设库存水平动态变化由BM描述的条件下, 针对随机提前期, 利用更新过程理论和Kella-Whitt鞅, 构建了系统期望折扣总费用模型. 因它是控制策略高度非线性函数, 传统优化技术很难求解, 因

而利用交叉熵法, 确定了模型最优解. 最后, 通过仿真实验分析了系统参数对最优控制策略和费用的影响, 揭示了漂移参数(它近似反映单位时间系统的平均净需求)和随机提前期影响的复杂性, 进而为随机退货环境下有效管理库存, 提供了理论和方法支持.

在本文基础上, 还可从以下两个方向展开研究:

- 1) 需求和退货到达强度随时间发生变化;
- 2) 利用价格对需求和退货的影响, 考虑定价和订货联合控制策略问题. 通过进一步研究, 以期更好解决该问题.

#### 参考文献(References)

- [1] Chen J, Bell P. Coordinating a decentralized supply chain with customer returns and price-dependent stochastic demand using a buyback policy[J]. *European J of Operational Research*, 2011, 212(2): 293-300.
- [2] Teng H M, Hsu P H, Chiu Y F, et al. Optimal ordering decisions with returns and excess inventory[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217(22): 9009-9018.
- [3] Stuart X Z. Joint pricing and inventory replenishment decisions with returns and expediting[J]. *European J of Operational Research*, 2012, 216(1): 105-112.
- [4] Saadany A, Jaber M. A production/remanufacture model with returns subassemblies managed differently[J]. *Int J of Production Economics*, 2011, 133(1): 119-126.
- [5] Flapper S, Gayon J, Vercaene S. Control of a production inventory system with returns under imperfect advance return information[J]. *European J of Operational Research*, 2012, 218(2): 392-400.
- [6] Ormeci M, Dai J G, John V V. Impulse control of Brownian motion: the constrained average cost case[J]. *Operations Research*, 2008, 56(3): 618-629.
- [7] Cadenillas A, Lakner P, Pinedo M. Optimal control of a mean-reverting inventory[J]. *Operations Research*, 2010, 58(6): 1697-1710.
- [8] Pince C, Gürler U, Berk E. A continuous review replenishment-disposal policy for an inventory system with autonomous supply and fixed disposal costs[J]. *European J of Operational Research*, 2008, 190(2): 421-442.
- [9] Berman O, Perry D, Stadje W. An  $(s, r, S)$  diffusion inventory model with exponential lead time and order cancellations[J]. *Stochastic Models*, 2008, 24(2): 191-211.
- [10] Asmussen A, Kella O. A multi-dimensional martingale for Markov additive processes and its applications[J]. *Advance in Applied Probability*, 2000, 32(2): 376-393.
- [11] Karlin S, Taylor H. A first Course in Stochastic Processes[M]. The 2nd ed. New York: Academic Press, 1974.