

文章编号: 1001-0920(2013)08-1273-04

基于SVD方法的简约型区间二型模糊模型构建

姚 兰^{1,2}, 肖 建¹, 蒋玉莲¹

(1. 西南交通大学 电气工程学院, 成都 610031; 2. 成都信息工程学院 控制工程学院, 成都 610225)

摘 要: 针对奇异值-QR分解方法存在有效奇异值难以确定的问题, 采用奇异值分解方法分析从区间二型模糊模型抽取的两个激活强度矩阵, 提出了奇异值归一化差值的概念以描述相邻奇异值的变化情况, 从而反映了重要规则和冗余规则在奇异值变化上的本质差异; 进而根据其临界点确定有效奇异值个数, 并利用QR分解得到有效奇异值所对应的重要规则构建简约型区间二型模糊结构. 仿真实例验证了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 区间二型模糊模型; 奇异值分解; 规则精简

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Construction of parsimonious interval type-2 fuzzy model based on SVD

YAO Lan^{1,2}, XIAO Jian¹, JIANG Yu-lian¹

(1. College of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. College of Control Engineering, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China. Correspondent: YAO Lan, E-mail: dancyyao@163.com)

Abstract: As the determination of number for effective singular value is a problem for the simplification of interval type-2 fuzzy model structure by using the singular value decomposition-QR method, two firing strength matrixes are got though the analysis of interval type-2 fuzzy model structure and then analyzed by using the singular value decomposition method. The concept of normalized difference of singular value is proposed to describe the change of adjacent singular value so as to reflect the essential differences between important rules and redundant rules in aspect of singular value. Then the number of effective singular can be determined according to its critical point, and the parsimonious interval type-2 fuzzy model is constructed with rules located by QR decomposition. Finally, simulation results show the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Key words: interval type-2 fuzzy model; singular value decomposition(SVD); rule reduction

0 引 言

为了将传统模糊集合的隶属度值再次进行模糊化, Zadeh^[1]于1975年提出了二型模糊集合的概念. 由于隶属度函数是三维的, 比传统模糊集合多了一维处理不确定性的自由度, 二型模糊逻辑系统已成为现实环境中解决高不确定性问题的有效手段. 与传统模糊逻辑系统类似, 二型模糊逻辑系统也存在模糊集合冗余和模糊规则冗余两方面问题, 如何消除冗余带来的不良影响, 同时保证系统的逼近性能, 成为二型模糊模型结构辨识的研究热点之一^[2]. Liang等^[3]用奇异值-QR分解(SVD-QR)方法研究了区间二型模糊系统的设计问题. 结果表明, 在有效奇异值个数选取恰当的前提下, 该方法可以明显减少规则数量. 但是, 有

效奇异值个数的确定更多是依赖经验进行选取, 目前还没有成熟的选择方法. Zhou等^[4]采用列主元QR分解算法, 给出4种新的模糊规则排序指标进行规则精简. 该方法在保证逼近精度情况下能够有效地精简规则, 但如何针对具体问题从4种排序指标中选出最有效的指标是个棘手的问题.

本文在给出区间二型模糊结构的基础上, 针对SVD-QR方法存在的问题, 提出奇异值归一化差值的概念来描述重要规则和冗余规则的本质差异, 并利用其临界点确定有效奇异值个数, 即明确重要规则数目; 然后结合矩阵QR分解, 根据矩阵 I 中每列值为1的元素位置确定重要规则, 从而构建简约型模糊模型; 最后, 采用Mackey-Glass混沌时间序列对该方法的性

收稿日期: 2012-03-14; 修回日期: 2012-07-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51177137/E070303).

作者简介: 姚兰(1980—), 女, 讲师, 博士生, 从事智能计算、二型模糊系统辨识等研究; 肖建(1950—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、交流调速控制系统等研究.

能进行仿真验证,取得了满意的结果.

1 区间二型模糊模型的描述

考虑 M 条规则的 Mamdani 区间二型模糊逻辑系统, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 n 维输入变量, $y \in Y$ 为单输出变量, 模糊规则为

If x_1 is \tilde{F}_1^l and \dots and x_n is \tilde{F}_n^l , Then y is \tilde{G}^l .

其中: $l = 1, 2, \dots, M$; \tilde{F}_i^l 和 \tilde{G}^l 为区间二型模糊集. 采用单值模糊器、扩展 Sup-star 合成推理和 Center-of-set 降型方法, 所得结果是一个区间集合, 表示为

$$Y_{\cos}(X) \triangleq [y_l, y_r] = \frac{\int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \dots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [f_l^1, f_r^1]} \dots \int_{f^M \in [f_l^M, f_r^M]}}{\left(\sum_{i=1}^M f^i y^i \right) / \left(\sum_{i=1}^M f^i \right)}. \quad (1)$$

对降型集合求区间端点的中心即可得到模糊系统的输出^[5]. 由式(1)可得, Y_{\cos} 是关于 y^i 的单调递增函数, 其最小值 y_l 和最大值 y_r 分别为

$$y_l = \sum_{i=1}^M y_l^i f_l^i / \sum_{i=1}^M f_l^i = \sum_{i=1}^M y_l^i p_l^i, \quad (2)$$

$$y_r = \sum_{i=1}^M y_r^i f_r^i / \sum_{i=1}^M f_r^i = \sum_{i=1}^M y_r^i p_r^i. \quad (3)$$

实际应用中, 通常采用 Karnik-Mendel^[6]迭代算法计算 y_l 和 y_r . 规则前后件的主隶属度函数采用具有不确定均值的高斯函数, 可利用反向传播算法^[7]和梯度下降法^[8]实现模型结构的参数辨识.

2 区间二型模糊模型的结构精简

2.1 区间二型模糊模型结构

由于采用 KM 方法计算 y_l 和 y_r 的过程类似, 本文仅以 y_r 的计算为例, 进一步分析区间二型模糊模型的结构^[9]. 计算 y_r 的实质是确定数值 R , 若 $i \leq R$, 则 $f_r^i = \underline{f}^i$; 若 $i > R$, 则 $f_r^i = \bar{f}^i$. 于是 y_r 可表示为

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^R \underline{f}^i y_r^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{f}^i y_r^i}{\sum_{i=1}^R \underline{f}^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{f}^i} = \sum_{i=1}^M y_r^i p_r^i, \quad (4)$$

其中模糊基函数 p_r^i 可表示为

$$p_r^i = \begin{cases} \underline{f}^i / \left(\sum_{i=1}^R \underline{f}^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{f}^i \right), & i \leq R; \\ \bar{f}^i / \left(\sum_{i=1}^R \underline{f}^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{f}^i \right), & i > R. \end{cases} \quad (5)$$

模糊基函数与模糊规则是一一对应的, 所以等式(4)可写成向量与矩阵形式

$$y_r = \mathbf{P}^T \mathbf{y}_r. \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{P} = [p_r^1, \dots, p_r^R, p_r^{R+1}, \dots, p_r^M]^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_r = [y_r^1, \dots, y_r^M]^T. \quad (8)$$

采用 KM 方法计算 y_r 时, 必须先将 $\{y_r^i\}_{i=1}^M$ 按递增顺序排列, 在计算完成后, 还要利用转置矩阵 \mathbf{Q} 恢复规则顺序, 即

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}^{-1} [p_r^1, \dots, p_r^R, p_r^{R+1}, \dots, p_r^M]^T. \quad (9)$$

设有 N 个数据样本 $\{x^{(i)}, y^{(i)}\}_{i=1}^N$, 可得到 N 个向量 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_N$, 构成 $N \times M$ 的激活强度矩阵 Φ_r , 可表示为

$$\Phi_r \triangleq [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_N]^T. \quad (10)$$

构建模糊模型时, 样本数据的数量通常比规则数多, 这意味着 $N > M$. 注意到矩阵 Φ_r 中的每一列对应一条模糊规则, 本文的主要工作是从 Φ_r 中选取重要规则, 排除那些冗余或作用甚小的规则.

2.2 模糊模型的结构精简原理

根据奇异值分解原理^[10], 对于一个实矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{N \times M}$, 不管行列是否相关, 必定存在正交矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 和 $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{M \times M}$, 使得

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \quad (11)$$

成立. 其中: $\Sigma = [\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \mathbf{0}]$, $r = \text{rank}(\mathbf{P})$, 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$, 称为矩阵 \mathbf{P} 的奇异值.

本文对激活强度矩阵 Φ_r 进行奇异值分解. 当矩阵 Φ_r 的秩 $\text{rank}(\Phi_r) = M$ 时, 表明前件推理所表征的输入空间是线性独立的, 不存在冗余规则; 当 $\text{rank}(\Phi_r) < M$ 时, 矩阵 Φ_r 即是所谓秩亏矩阵, 表明输入空间是线性相关的, 模糊规则中含有冗余或作用甚小的规则. 于是, 如何找出重要规则的问题转化为如何从 Φ_r 中选取线性无关的子列集. 由 SVD 分解的几何意义知, 通过忽略较小的奇异值可以得到线性无关的子列集, 再利用有效奇异值对应的重要规则重构模型即可实现结构精简.

有效奇异值个数的确定是一个关键问题. 奇异值个数选择过多, 会使精简模型中混进冗余或作用甚小的规则; 选择过少则会丢失重要的模糊规则, 降低逼近性能. 虽然奇异值的计算结果是从大到小排列的, 但这种减小的幅度很小, 奇异值曲线是连续光滑的, 两两相邻奇异值之间没有明显突变. 为了更加清楚地描述相邻奇异值的变化情况, 本文提出了奇异值归一化差值概念, 定义

$$a_i = \frac{\sigma_i - \sigma_{i+1}}{\max(\sigma) - \min(\sigma)}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1. \quad (12)$$

可见, a_i 反映了相邻奇异值之间的变化情况, 并且缩小了变化幅度. 随着奇异值的逐渐减小, 相邻奇异值

的变化幅度也逐渐缩小, a_i 逐渐逼近于 0. 由于 a_i 具有缩小量值的作用, 从而加快了差别小的相邻奇异值的 a_i 趋向于 0 的速度, 使得差别大的相邻奇异值的 a_i 更加明显. 于是, 在由所有 a_i 形成的奇异值归一化差值曲线上必然出现逼近于 0 的临界点, 它表明了该位置前后的奇异值在性质上存在着明显差异. 临界点之前的相邻奇异值差别明显, 表示所对应的是性质截然不同的模糊规则; 临界点之后的相邻奇异值差别很小, 表示所对应的是性质相同或相近的模糊规则. 因此, 可根据临界点的位置确定有效奇异值的个数, 即重要规则数目.

2.3 SVD-QR 子列集选择

精简规则数目确定之后, 需要明确有效奇异值对应于矩阵 Φ_r 列向量的位置. 在秩亏缺情况下, Golub 等^[10]提出的基于列选主 SVD-QR 算法是一种相当可靠的方法. 设 $P \in R^{N \times M}$ 的 SVD 由式 (11) 给出, 定义矩阵 $P^{(r)} \in R^{N \times r}$, 有

$$P\Pi = \begin{bmatrix} P^r & P^{(M-r)} \\ r & M-r \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中 $\Pi \in R^{M \times M}$ 为置换矩阵. Golub 等证明了如果

$$\Pi^T V = \begin{bmatrix} V'_{11} & V'_{21} \\ V'_{12} & V'_{22} \\ r^* & M-r \end{bmatrix} \quad (14)$$

且 V'_{11} 非奇, 则

$$\frac{\sigma_r(P)}{\|(V'_{11})^{-1}\|_2} \leq \sigma_r(P^{(r)}) \leq \sigma_r(P), \quad (15)$$

其中 $\sigma_r(P^{(r)})$ 和 $\sigma_r(P)$ 分别是矩阵 $P^{(r)}$ 和 P 的第 r 个奇异值. 这表明, 为了得到一个充分线性无关的子列集, 所选择的置换矩阵 Π 应使得到的子矩阵 V'_{11} 尽可能是良态, 才能促使 $\|(V'_{11})^{-1}\|_2$ 尽可能小, 从而最大化矩阵 $P^{(r)}$ 的最小奇异值. 于是, 采用列选主 QR 算法来计算矩阵 $[V_{11}^T \ V_{21}^T]$, 得到

$$Q^T [V_{11}^T \ V_{21}^T] \Pi = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ r & M-r \end{bmatrix}. \quad (16)$$

对比式 (14), 可知

$$\begin{bmatrix} V'_{11} \\ V'_{21} \end{bmatrix} = \Pi^T \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}^T Q^T \\ R_{12}^T Q^T \end{bmatrix}. \quad (17)$$

其中: Q 为正交矩阵, Π 为置换矩阵, R_{11} 为上三角形矩阵, 且 $\|(V'_{11})^{-1}\|_2 = \|R_{11}^{-1}\|_2$. 该方法可有效得到一个良态的 R_{11} , 从而产生一个良态的 V'_{11} .

如上所述, 本文采用基于列选主 SVD-QR 算法分析 Φ_r , 得到了一个充分线性无关的子列集. 最后所得矩阵 Π 的各列向量中值为 1 的元素位置即对应着从大到小顺序的奇异值 σ_i 所对应的规则.

2.4 算 法

构建简约型区间二型模糊模型的步骤如下:

- 1) 计算激活强度矩阵 Φ_r 和 Φ_l ;
- 2) 计算矩阵 Φ_r 的 SVD 分解, 保留矩阵 Σ 和 V ;
- 3) 确定矩阵 Σ 的奇异值, 按式 (12) 计算奇异值归一化差值, 确定精简模型规则数 \hat{r}_1 ;
- 4) 对 V 划分, 得到 $[V_{11}^T \ V_{21}^T]$, 并对其进行 QR 分解得到置换矩阵 Π , 其前 \hat{r}_1 列中元素为 1 的位置即对应于 Φ_r 中列的位置, 得到规则集合 T_1 ;
- 5) 重复步 2)~步 4), 分析 Φ_l 得到精简模型规则数 \hat{r}_2 和规则集合 T_2 ;
- 6) 采用规则集合 $T_1 \cup T_2$ 重构模糊模型.

3 仿 真 验 证

采用 Mackey-Glass 混沌时间序列进行仿真研究, 其可用时滞微分方程表示为

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{0.2x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)} - 0.1x(t),$$

当 $\tau > 17$ 时呈现混沌特性. 从 $t = 1000$ 到 $t = 2000$, 得到 1000 对输入输出数据, 前 504 对作为训练数据, 后 496 对作为测试数据. 设模糊模型输入为 $x = [x(t-3), x(t-2), x(t-1), x(t)]^T$, 输出为 $x(t+1)$. 每个规则前件的输入空间包含 2 个区间二型模糊集, 构成初始规则数目为 $2^4 = 16$, 主隶属函数选取具有不确定均值的高斯函数, 采用梯度下降法进行训练得到 16 条规则前后件参数. 然后, 选取后 496 对数据构成测试输入, 在全规则条件下得到模型预测结果如图 1 所示. 可见, 模型逼近性能接近, 性能指标误差为 $RMSE = 0.02186$.

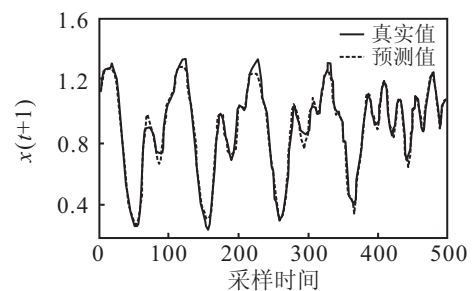


图 1 模型验证

采用本文方法对模型结构进行精简, 得到 P_r 的奇异值分析结果如图 2 所示. 其与 P_l 分析结果类似, 不再赘述. 由图 2(a) 可见, 奇异值曲线是连续光滑的, 不利于判断相邻奇异值变化的临界点. 图 2(b) 给出的奇异值归一化差值曲线清晰地反映了相邻奇异值的变化情况, 其中, 第 4 个坐标之前相邻奇异值差值变化都很明显, 第 4 个坐标之后的差值变化逐渐趋于平缓, 这表明第 4 个坐标是奇异值变化的临界点. 因此精简模型的规则数目为 4. 图 2(c) 是按规则顺序排列的奇异值曲线, 可得到重要规则的序号为 3、6、10 和 5.

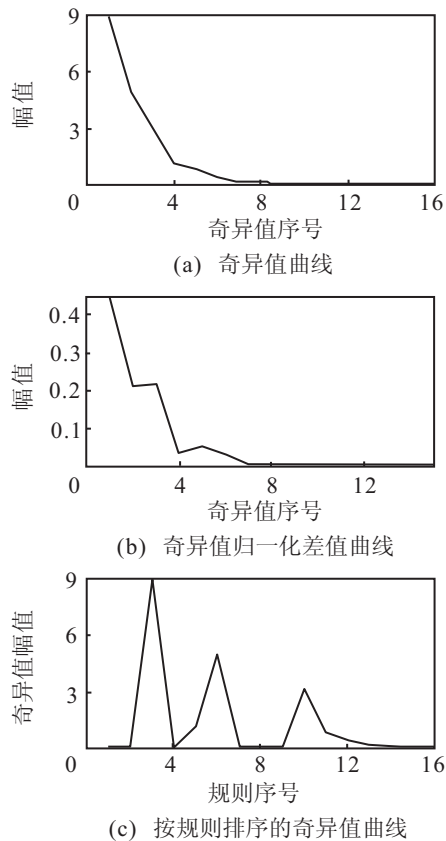


图 2 矩阵奇异值分析结果

为了对比精简前后模型的逼近性能, 同样采用后 496 对数据构成测试输入, 得到精简模型的预测输出结果如图 3 所示, 性能指标误差为 $RMSE = 0.04592$. 可见, 在规则数目大幅精简的条件下, 模型的逼近性能降低并不大.

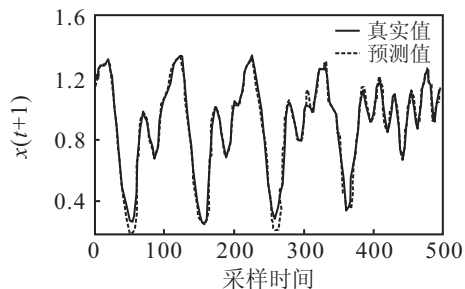


图 3 精简模型验证

4 结 论

本文研究了基于奇异值 QR 分解的区间二型模糊模型结构精简, 提出了奇异值归一化差值的概念以

描述相邻奇异值性质的差异, 利用其临界点来确定有效奇异值个数, 从而确定精简模型规则数目. 仿真结果表明, 采用该方法得到的精简模型能有效减少规则数目, 且逼近性能降低不大. 与梯度下降法相结合, 本文方法提供了一种构建简约型区间二型模糊系统的有效途径.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. Information Sciences, 1975, 8(2): 199-249.
- [2] Roubos H, Setnes M. Compact fuzzy models through complexity reduction and evolutionary optimization[C]. Proc of FUZZ-IEEE. San Antonio, 2000: 762-767.
- [3] Liang Q, Mendel J M. Designing interval type-2 fuzzy logic systems using an SVD-QR method: Rule reduction[J]. Int J of Intelligent Systems, 2000, 15(8): 939-957.
- [4] Zhou Shang-ming, Jonathan M Garibaldi, Robert I John, et al. On constructing parsimonious type-2 fuzzy logic systems via influential rule selection[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(3): 654-667.
- [5] Mendel J M. Uncertainty rule-based fuzzy logic systems: Introduction and new directions[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001: 72-73.
- [6] Wu Dongrui, Mendel J M. Enhanced Karnik-Mendel algorithms[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(4): 923-934.
- [7] Er M J, Wu S. A fast learning algorithm for parsimonious fuzzy neural systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126(3): 337-351.
- [8] Yao Lan, Jiang Yu-lian, Xiao Jian. Short-term power load forecasting by interval type-2 fuzzy logic system[C]. Proc of the 2nd Int Conf on Information Computing and Applications. Qinhuangdao, 2011(2): 575-582.
- [9] Mendel J M. Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial[J]. Proc of the IEEE Special Issue on Fuzzy Logic in Engineering Applications, 1995, 83(3): 345-377.
- [10] Golub G H, Van Loan C F. Matrix computations[M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1983: 199-235.