

文章编号: 1001-0920(2013)09-1409-05

位置误差条件下多运动站无源跟踪 PCRLB

徐 征, 曲长文, 李炳荣, 王昌海

(海军航空工程学院 电子信息工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 在无源跟踪中通常假设目标运动模型为离散白噪声加速度模型, 此时状态协方差矩阵奇异, 通用的后验克拉美罗限(PCRLB)求解方法失效. 另外, 观测站位置误差可能对目标无源跟踪性能带来较大影响. 对此, 首先将状态变量分成非奇异的位置和速度两部分; 然后通过构造中间向量得到PCRLB的通用表达式, 进而推导了观测站存在位置误差时的PCRLB; 最后以多运动站只测角跟踪为例对PCRLB进行了仿真分析, 结果表明, 所推导的PCRLB计算式可为算法设计提供理论指导.

关键词: 无源跟踪; 位置误差; 奇异; 后验克拉美罗限

中图分类号: TN958.97

文献标志码: A

PCRLB for multiple moving observers passive tracking in the presence of observer position error

XU Zheng, QU Chang-wen, LI Bing-rong, WANG Chang-hai

(Department of Electronic and Information Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China. Correspondent: XU Zheng, E-mail: xuzheng85@126.com)

Abstract: The discrete white noise acceleration model is often adopted to describe the target's motion model, while the state covariance is singularity, which results in the inactivation of the commonly used method for the calculation of posterior Cramér-rao lower bound(PCRLB). Besides, the observer position error may have great effect on the target tracking performance. Therefore, firstly, the state vector is divided into a position part and a velocity part, which has nonsingularity covariance respectively. Then, the common expression is got through constructing proper intermediate vectors and the PCRLB in the presence of observer position error is derived. Finally, simulations and analysis are done with respect to the multiple moving observers bearings-only passive tracking.

Key words: passive tracking; position error; singularity; posterior Cramér-rao lower bound

0 引 言

在目标无源跟踪中观测方程是非线性的, 需要通过非线性滤波技术来实现目标跟踪. 以不敏卡尔曼滤波(UKF)^[1]算法为代表的滤波算法大都是次优的^[2], 对这些次优算法性能的评价需要一个理论上的最优下界^[3]. 实际中目标运动状态通常存在扰动, 针对确定性参数估计的克拉美罗限^[4]已不适合对目标跟踪性能进行评价, 后验克拉美罗限(PCRLB)^[5]作为对随机变量估计性能评价的指标, 适用于对目标跟踪性能的最优下界进行分析.

目标运动模型通常未知, 对其有多种建模方法, 如连续白噪声加速度(CWNA)模型、离散白噪声加速度(DWNA)模型等^[6]. 不同的模型对应的目标状态方

程各有特点, DWNA模型因其形式直观、易于理解, 在目标无源跟踪算法研究中得到了广泛应用^[2,7-10]. 通过后面的分析可知, 该模型下过程噪声协方差矩阵是奇异的, 无法写出状态的条件概率密度函数. 在已有的基于PCRLB的目标跟踪性能评价中该问题被回避了^[11-12]: 文献[11]采用CWNA模型; 文献[12]认为位置和速度扰动来自不同的加速度扰动, 从而得到了非奇异的过程噪声协方差矩阵. 这些模型在跟踪算法的研究中应用很少, 因此需要针对DWNA模型的特点对其PCRLB进行分析. 此外, 在多运动站无源跟踪中, 运动观测站位置通常含有测量误差, 目前尚未见到相关文献对观测站位置误差条件下的PCRLB进行研究.

收稿日期: 2012-03-26; 修回日期: 2012-09-14.

基金项目: 航空电子系统综合技术重点实验室和航空科学基金联合资助项目(20105584004).

作者简介: 徐征(1985—), 男, 博士生, 从事无源定位与跟踪技术的研究; 曲长文(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事SAR成像及目标检测、无源定位与跟踪等研究.

本文对 DWNA 模型下的多运动站无源跟踪 PCRLB 进行研究, 并考虑运动站存在位置误差的情况. 首先将目标状态变量分为位置向量和速度向量, 它们都具有非奇异的噪声协方差矩阵; 然后构造辅助状态向量, 根据辅助状态向量 Fisher 信息阵 (FIM) 之间的关系求得对当前时刻状态估计的 PCRLB 的通用递推表达式, 并针对运动观测站位置存在测量误差的情况推导了相应的 PCRLB; 最后以多运动站只测角跟踪为例对 PCRLB 进行了仿真分析.

1 目标系统方程

1.1 状态方程

假设目标运动模型为离散白噪声加速度模型, 令 \mathbf{I}_2 表示 2 维单位矩阵, T_s 为观测间隔, 加速度扰动标准差分别为 q_x 和 q_y , 则目标状态方程可表示为

$$\mathbf{X}_k = \Phi \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{k-1}, \quad (1)$$

其中: $\mathbf{X}_k = [x_k \ y_k \ v_{xk} \ v_{yk}]^T$ 为 k 时刻目标状态向量; $\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & T_s \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$ 为状态转移矩阵; \mathbf{w}_{k-1} 为零

均值加速度扰动噪声, 其协方差为 $\mathbf{Q}_a = \begin{bmatrix} q_x^2 & \\ & q_y^2 \end{bmatrix}$;

$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.5 T_s^2 \mathbf{I}_2 \\ T_s \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$ 为状态噪声转移矩阵.

注意, 过程噪声协方差矩阵为 $\mathbf{Q} = \mathbf{G} \mathbf{Q}_a \mathbf{G}^T$, 计算可得 $\det(\mathbf{Q}) = 0$, 所以噪声协方差矩阵 \mathbf{Q} 奇异, 而一步状态转移概率密度函数 $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})$ 要求 \mathbf{Q} 正定, 因此 PCRLB 的通用求解方法失效. 通用求解方法详见文献 [5, 11-12], 此处不再赘述.

由于位置分量噪声协方差矩阵 $\mathbf{Q}_p = \frac{T_s^4}{4} \mathbf{Q}_a$, 速度分量噪声协方差矩阵 $\mathbf{Q}_v = T_s^2 \mathbf{Q}_a$, 只要 q_x 和 q_y 不为零, 他们都是正定的. 后面将利用状态分量噪声协方差矩阵的正定性来推导 PCRLB.

1.2 量测方程

本文考虑多运动站无源跟踪, 观测站为飞机, 利用的测量为角度. 假设有 N 架飞机 ($N \geq 2$), 记 k 时刻第 i ($i = 1, 2, \dots, N$) 架飞机的真实位置坐标为 $(\bar{x}_{s,i}^k, \bar{y}_{s,i}^k)$, 测量位置坐标为 $(x_{s,i}^k, y_{s,i}^k)$, 飞机导航设备对自身位置的定位误差分别为 Δx_i^k 和 Δy_i^k , 方差分别为 $\sigma_{x_i}^2$ 和 $\sigma_{y_i}^2$. 记 k 时刻载机的真实位置向量为 $\mathbf{X}_k^s = [\bar{x}_{s,1}^k, \bar{y}_{s,1}^k, \bar{x}_{s,2}^k, \bar{y}_{s,2}^k, \dots, \bar{x}_{s,N}^k, \bar{y}_{s,N}^k]^T$, 假设 k 时刻第 i 架飞机测得目标相对于 y 轴的方位角为 β_i^k , 则

$$\beta_i^k = h_i(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k^s) + \Delta \beta_i^k, \quad (2)$$

$$h_i(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k^s) = \arctan \frac{x_k - \bar{x}_{s,i}^k}{y_k - \bar{y}_{s,i}^k}. \quad (3)$$

其中: $h_i(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k^s)$ 表示真实方位角与目标状态及观测站位置向量的非线性关系; $\Delta \beta_i^k$ 为服从零均值高斯分

布的方位角测量噪声, 其方差为 $\sigma_{\beta_i}^2$.

k 时刻 N 架飞机的观测量的向量形式为

$$\mathbf{Z}_k = h(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k^s) + \mathbf{v}_k. \quad (4)$$

其中: \mathbf{Z}_k 为 N 个观测站角度组成的列向量, \mathbf{v}_k 为对应的测量噪声列向量, $h(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k^s)$ 为各个观测站关于目标状态向量和观测站位置向量的非线性函数向量. 测量噪声 \mathbf{v}_k 为零均值高斯白噪声向量且与 \mathbf{w}_k 互不相关, 其协方差矩阵记为 \mathbf{R} , 则 \mathbf{R} 为对角阵, 其对角元素为与 \mathbf{Z}_k 对应观测量的测量误差方差.

2 多机无源跟踪 PCRLB 计算及分析

2.1 Q 奇异时的 PCRLB 的通用递推式

将状态向量分为两部分, 并保证每一部分对应的协方差矩阵是非奇异的, 将划分后的状态向量记为 $\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^{(1)} \\ \mathbf{X}_k^{(2)} \end{bmatrix}$. 其中: 目标位置向量 $\mathbf{X}_k^{(1)} = [x_k, y_k]^T$, 目标速度向量 $\mathbf{X}_k^{(2)} = [v_{xk}, v_{yk}]^T$. 由目标状态方程可得状态分量的如下关系式:

$$\mathbf{X}_k^{(1)} = \mathbf{X}_{k-1}^{(1)} + T_s \mathbf{X}_{k-1}^{(2)} + \frac{T_s^2}{2} \mathbf{w}_{k-1}, \quad (5)$$

$$\mathbf{X}_k^{(2)} = \mathbf{X}_{k-1}^{(2)} + T_s \mathbf{w}_{k-1}. \quad (6)$$

将式 (5) 代入 (6), 可得 k 时刻速度向量的另一种表达形式

$$\mathbf{X}_k^{(2)} = -\frac{2}{T_s} \mathbf{X}_{k-1}^{(1)} - \mathbf{X}_{k-1}^{(2)} + \frac{2}{T_s} \mathbf{X}_k^{(1)}. \quad (7)$$

记直到 k 时刻目标的位置向量集合为 $\mathbf{X}_{1:k}^{(1)} = [\mathbf{X}_1^{(1)T}, \mathbf{X}_2^{(1)T}, \dots, \mathbf{X}_k^{(1)T}]^T$. 考虑状态向量 $[\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)T}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)T}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)T}]^T$, 记其 k 时刻的 FIM 为 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}}$, 并定义其前一时刻的联合概率密度为

$$p_{k-1} = p(\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{Z}_{1:k-1}), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{Z}_{1:k-1}$ 为直到 $k-1$ 时刻的观测量集合, 则由 FIM 的定义^[5]可得

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}, \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

按矩阵元素编号方式记 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}}$ 的 9 个子块为 \mathbf{J}'_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). 式 (9) 中的细实线表示对其子块进一步分块.

对 $k-1$ 时刻状态估计的 FIM $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}}$ 为 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}}$ 右下角分块矩阵的逆, 记为

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k-1}^{11} & \mathbf{J}_{k-1}^{12} \\ \mathbf{J}_{k-1}^{21} & \mathbf{J}_{k-1}^{22} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}}$ 中相应分块矩阵的表达式将在后面的推导中给予说明.

为了得到对 k 时刻状态 \mathbf{X}_k FIM 的递推形式, 考虑辅助向量 $[\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)\text{T}}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)\text{T}}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)\text{T}}, \mathbf{X}_k^{(1)\text{T}}]^\text{T}$, 该辅助变量的联合概率密度可表示为 $p(\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{Z}_{1:k})$. 应用链式法则和系统方程的马尔科夫性可得辅助变量联合概率密度为 $p_{k-1}\tilde{p}_k$, 其中 $\tilde{p}_k = p(\mathbf{X}_k^{(1)} | \mathbf{X}_{k-1})p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k^{(1)})$.

由前述可知, p_{k-1} 与 $\mathbf{X}_k^{(1)}$ 无关, 对其求梯度为零; \tilde{p}_k 与 $\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}$ 无关, 对其求梯度也为零. 定义 $\mathbf{J}_{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}} = E\{-\Delta_{\mathbf{Y}}^{\mathbf{Z}} \ln p_{k-1}\tilde{p}_k\}$ (\mathbf{Y}, \mathbf{Z} 为列向量), 于是可求得

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}} = \mathbf{J}'_{11}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} = \mathbf{J}'_{12}; \quad (11)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} = \mathbf{J}'_{13}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} = \mathbf{0}; \quad (12)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}} = \mathbf{J}'_{21}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} = \mathbf{J}'_{22} + \mathbf{H}_k^{11}; \quad (13)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} = \mathbf{J}'_{23} + \mathbf{H}_k^{12}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} = \mathbf{H}_k^{13}; \quad (14)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}} = \mathbf{J}'_{31}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} = \mathbf{J}'_{32} + \mathbf{H}_k^{21}; \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} = \mathbf{J}'_{33} + \mathbf{H}_k^{22}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} = \mathbf{H}_k^{23}; \quad (16)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}} = \mathbf{0}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} = \mathbf{H}_k^{31}; \quad (17)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} = \mathbf{H}_k^{32}, \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} = \mathbf{H}_k^{33}. \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{H}_k^{11} = E\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}}^{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} \ln \tilde{p}_k\}, \mathbf{H}_k^{12} = E\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}}^{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} \ln \tilde{p}_k\},$$

$$\mathbf{H}_k^{13} = E\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}}^{\mathbf{X}_k^{(1)}} \ln \tilde{p}_k\}, \mathbf{H}_k^{22} = E\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}}^{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}} \ln \tilde{p}_k\},$$

$$\mathbf{H}_k^{23} = E\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}}^{\mathbf{X}_k^{(1)}} \ln \tilde{p}_k\}, \mathbf{H}_k^{33} = E\{-\Delta_{\mathbf{X}_k^{(1)}}^{\mathbf{X}_k^{(1)}} \ln \tilde{p}_k\},$$

$$\mathbf{H}_k^{21} = \{\mathbf{H}_k^{12}\}^\text{T}, \mathbf{H}_k^{31} = \{\mathbf{H}_k^{13}\}^\text{T}, \mathbf{H}_k^{32} = \{\mathbf{H}_k^{23}\}^\text{T}.$$

对式 (9) 应用分块矩阵求逆公式^[13], 可得 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}}$ 与各子块 \mathbf{J}'_{ij} 的关系为

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_{22} - \mathbf{J}'_{21}\mathbf{J}'_{11}{}^{-1}\mathbf{J}'_{12} & \mathbf{J}'_{23} - \mathbf{J}'_{21}\mathbf{J}'_{11}{}^{-1}\mathbf{J}'_{13} \\ \mathbf{J}'_{32} - \mathbf{J}'_{31}\mathbf{J}'_{11}{}^{-1}\mathbf{J}'_{12} & \mathbf{J}'_{33} - \mathbf{J}'_{31}\mathbf{J}'_{11}{}^{-1}\mathbf{J}'_{13} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

对比式 (10) 和 (19), 可得 \mathbf{J}_{k-1}^{ij} ($i, j = 1, 2$) 和 \mathbf{J}'_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 的关系式.

由式 (11)~(18) 可以得到对辅助状态向量估计的 FIM 的表达式为

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_{11} & \mathbf{J}'_{12} & \mathbf{J}'_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}'_{21} & \mathbf{J}'_{22} + \mathbf{H}_k^{11} & \mathbf{J}'_{23} + \mathbf{H}_k^{12} & \mathbf{H}_k^{13} \\ \mathbf{J}'_{31} & \mathbf{J}'_{32} + \mathbf{H}_k^{21} & \mathbf{J}'_{33} + \mathbf{H}_k^{22} & \mathbf{H}_k^{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_k^{31} & \mathbf{H}_k^{32} & \mathbf{H}_k^{33} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

因此, 辅助状态向量 FIM 的信息子矩阵 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}}$ 是 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}}$ 右下角子矩阵的逆. 应用矩阵求逆定理及式 (10) 和 (19) 所示关系, 可得

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_{k-1}{}^{11} + \mathbf{H}_k^{11} & \mathbf{J}'_{k-1}{}^{12} + \mathbf{H}_k^{12} & \mathbf{H}_k^{13} \\ \mathbf{J}'_{k-1}{}^{21} + \mathbf{H}_k^{21} & \mathbf{J}'_{k-1}{}^{22} + \mathbf{H}_k^{22} & \mathbf{H}_k^{23} \\ \mathbf{H}_k^{31} & \mathbf{H}_k^{32} & \mathbf{H}_k^{33} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

式 (21) 建立了 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}}$ 和 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}}$ 的联系. 为了得到 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k}$ 和 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}}$ 的递推表达式, 定义新的辅助向量 $[\mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)\text{T}}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)\text{T}}, \mathbf{X}_k^{(1)\text{T}}, \mathbf{X}_k^{(2)\text{T}}]^\text{T}$, 则由状态分量的系统方程可得其与前一个辅助状态向量具有以下关系:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{k-1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_k^{(1)} \\ \mathbf{X}_k^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2(k-2)} & \\ & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1:k-2}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{k-1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{k-1}^{(2)} \\ \mathbf{X}_k^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ -\frac{2}{T_s}\mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 & \frac{2}{T_s}\mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

\mathbf{F} 是可逆的. 于是对 $[\mathbf{X}_{k-1}^{(1)\text{T}}, \mathbf{X}_k^{(1)\text{T}}, \mathbf{X}_k^{(2)\text{T}}]^\text{T}$ 估计的 FIM 可以表示为^[5]

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}} = \mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (23)$$

由 FIM 的定义, $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}}$ 可写为如下分块矩阵的形式:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(2)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(2)}} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}}$ 的各子块可由式 (23) 得到. 于是再次利用分块矩阵求逆公式, 可得对当前时刻状态 \mathbf{X}_k 估计的 FIM $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k}$ 的表达式为

$$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(2)}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(2)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} \end{bmatrix} \times \mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} & \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k^{(2)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(1)}} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

$\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k}$ 通过式 (20)~(25) 与 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}}$ 和 \mathbf{H}_k^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 建立了联系, \mathbf{H}_k^{ij} 可以求解, 于是得到了 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k}$ 计算的递推式. 对当前时刻状态 \mathbf{X}_k 估计的 PCRLB 为 $\text{PCRLB}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k}^{-1}$.

下面给出过程噪声误差协方差矩阵奇异时的 PCRLB 计算步骤.

1) 按如下方式初始化 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0}$: 无先验信息时, $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0} = \mathbf{0}$; 有先验信息时 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0} = \mathbf{P}_0^{-1}$, 其中 \mathbf{P}_0 为对初始状态估计的协方差矩阵.

2) 计算 \mathbf{H}_k^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), 结合前一时刻 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}}$ 计算 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{k-1}^{(2)}, \mathbf{X}_k^{(1)}}$.

3) 由式(23)计算 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^{(2)}}$.

4) 由式(25)得到对 k 时刻状态估计的 FIM $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k}$, 进而得到对各状态分量估计的 PCRLB. $k \rightarrow k+1$, 重复 2)~4) 的过程.

2.2 多运动站无源跟踪 PCRLB 计算

由前面推导可知, 要得到 $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k}$, 关键是求出 \mathbf{H}_k^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), 下面利用前述目标系统方程进行求解.

由目标状态分量的系统方程可得

$$p(\mathbf{X}_k^{(1)} | \mathbf{X}_{k-1}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbf{Q}_p)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{X}_p^T(\mathbf{Q}_p)^{-1}\mathbf{X}_p\right\}, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_k^{(1)} - \mathbf{X}_{k-1}^{(1)} - T_s\mathbf{X}_{k-1}^{(2)}$.

根据前面得出的表达式计算可得

$$\mathbf{H}_k^{11} = \mathbf{Q}_p^{-1}, \quad \mathbf{H}_k^{12} = T_s\mathbf{Q}_p^{-1}, \quad \mathbf{H}_k^{13} = -\mathbf{Q}_p^{-1},$$

$$\mathbf{H}_k^{22} = T_s^2\mathbf{Q}_p^{-1}, \quad \mathbf{H}_k^{23} = -T_s\mathbf{Q}_p^{-1},$$

$$\mathbf{H}_k^{33} = \mathbf{Q}_p^{-1} + E\left[-\Delta_{\mathbf{X}_k^{(1)}}^T \ln p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k^{(1)})\right].$$

载机位置精确已知时, N 架飞机测得观测量的后验概率密度函数为

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k^{(1)}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\mathbf{R})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{Z}_k^T\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{Z}_k\right\}, \quad (27)$$

其中 $\Delta\mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}_k - h(\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^s)$. 于是可求得

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k^{33} &= \mathbf{Q}_p^{-1} + E\left[-\Delta_{\mathbf{X}_k^{(1)}}^T \ln p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k^{(1)})\right] = \\ &= \mathbf{Q}_p^{-1} + E\left[h_{\mathbf{X}_k^{(1)}}^T \mathbf{R}^{-1} h_{\mathbf{X}_k^{(1)}}\right]. \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $h_{\mathbf{X}_k^{(1)}} = (\nabla h^T(\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^s))^T$ 为观测量的雅克比矩阵, 易于求得, 此处不给出具体表达式.

当载机存在位置误差时, 将 $h(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k^s)$ 在载机测量值 $\hat{\mathbf{X}}_k^s$ 处展开, 可得

$$h(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k^s) \approx h(\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_k^s) + h_{\mathbf{x}_k^s} d\mathbf{x}_k^s + h_{\mathbf{y}_k^s} d\mathbf{y}_k^s. \quad (29)$$

其中

$$h_{\mathbf{x}_k^s} = (\nabla_{\mathbf{x}_k^s} h^T(\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^s))^T|_{\mathbf{x}_k^s = \hat{\mathbf{x}}_k^s},$$

$$h_{\mathbf{y}_k^s} = (\nabla_{\mathbf{y}_k^s} h^T(\mathbf{X}_k^{(1)}, \mathbf{X}_k^s))^T|_{\mathbf{y}_k^s = \hat{\mathbf{y}}_k^s},$$

\mathbf{x}_k^s 为 \mathbf{X}_k^s 中 N 架飞机 x 轴位置分量组成的向量, $\hat{\mathbf{x}}_k^s$ 为代入测量位置后的 \mathbf{x}_k^s , $d\mathbf{x}_k^s$ 为真实值和测量值之间的误差, $\mathbf{y}_k^s, \hat{\mathbf{y}}_k^s$ 和 $d\mathbf{y}_k^s$ 对应于 y 轴位置分量的情况.

可见, 位置误差在观测量里引入了新的误差项, 将等效测量误差记为 \mathbf{v}_k^s , 并将其近似为零均值高斯白噪声, 其协方差为

$$\mathbf{R}' = E[\mathbf{v}_k^s(\mathbf{v}_k^s)^T] = h_{\mathbf{x}_k^s} \mathbf{R}_x h_{\mathbf{x}_k^s}^T + h_{\mathbf{y}_k^s} \mathbf{R}_y h_{\mathbf{y}_k^s}^T + \mathbf{R}. \quad (30)$$

其中: \mathbf{R}_x 为 k 时刻 N 架飞机 x 轴位置测量误差协方差矩阵且 $\mathbf{R}_x = \text{diag}\{\sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2, \dots, \sigma_{x_N}^2\}$, \mathbf{R}_y 为 k 时刻 N 架飞机 y 轴位置测量误差协方差矩阵且 $\mathbf{R}_y =$

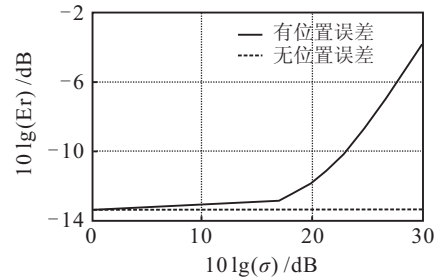
$\text{diag}\{\sigma_{y_1}^2, \sigma_{y_2}^2, \dots, \sigma_{y_N}^2\}$.

\mathbf{H}_k^{33} 的求解步骤与式(27)和(28)相同.

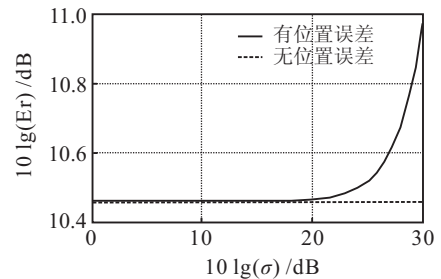
3 仿真分析

考虑 2 个运动观测站的情况. 初始状态分别为 $(0, 0, 0, 300 \text{ m/s})$ 和 $(15 \text{ km}, 0, 0, 300 \text{ m/s})$, 观测时间间隔 $T_s = 1 \text{ s}$, 观测站的测角误差标准差为 $\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_2} = 0.5^\circ$. 考虑两种目标初始状态 $(10 \text{ km}, 20 \text{ km}, -20 \text{ m/s}, -10 \text{ m/s})$ 和 $(100 \text{ km}, 200 \text{ km}, -20 \text{ m/s}, -10 \text{ m/s})$, 对应近距离目标和远距离目标的情况, 加速度扰动标准差 $q_x = q_y = 1 \text{ m/s}^2$. 初始 FIM $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0} = \mathbf{0}$, 求解 \mathbf{H}_k^{33} 时蒙特卡罗实验次数为 500 次.

定义目标位置误差 PCRLB 为 $10 \lg(\text{Er})$ (单位: dB), 其中 $\text{Er} = \sqrt{\text{PCRLB}(1, 1) + \text{PCRLB}(2, 2)}$ (单位: km). 取第 50 s 时的目标位置误差 PCRLB 进行比较. 仿真结果如图 1 和图 2 所示.



(a) 近距离目标情况



(b) 远距离目标情况

图 1 PCRLB 随观测站位置误差变化示意图

图 1 对应于目标位置误差 PCRLB 随载机位置误差标准差变化的情况, 位置标准差变化范围为 $1 \sim 1001 \text{ m}$. 从图 1 可以看出, 对于近距离目标, 随着观测站位置误差标准差变大, 目标位置误差 PCRLB 一直呈增大趋势, 在大约 50 m 后目标位置误差 PCRLB 变大趋势明显. 而对于远距离目标, 标准误差在 100 m 以内时, 目标位置误差 PCRLB 对载机位置误差变化不敏感, 此后, 位置误差 PCRLB 变大趋势明显.

图 2 对应于目标位置误差 PCRLB 随载机测角误差标准差变化的情况, 测角标准差变化范围为 $0.5^\circ \sim 5^\circ$, 为了更清楚表明变化趋势, 远距离目标情况下载机位置误差选取了较大值 1000 m. 从图 2 可以看出, 随着测角误差标准差增大, 目标位置误差 PCRLB 趋

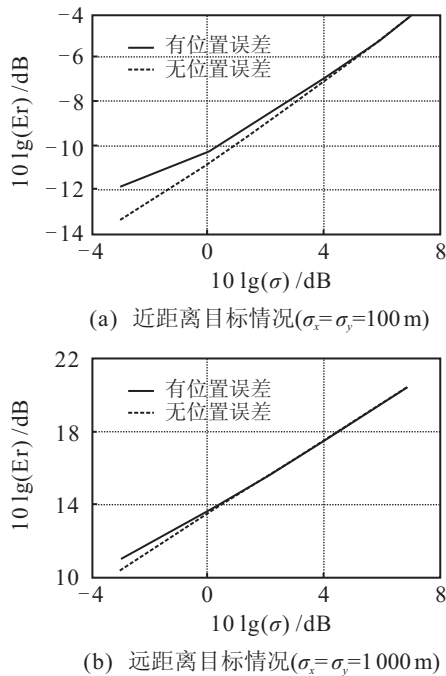


图2 PCRLB 随测角误差变化示意图

于对载机位置误差变化不敏感, 远距离目标时这种趋势更加明显。

可见, 对只测角跟踪而言, 当测角精度较高时, 对近距离目标跟踪 PCRLB 进行评价时需要考虑载机位置误差的影响, 对远距离目标则需要根据载机位置误差的大小来选择是否考虑载机位置误差的影响. 此外, 当测角误差足够大时, 对近距离目标和远距离目标跟踪 PCRLB 进行评价时都无需考虑载机位置误差的影响。

下面以跟踪远距离目标为例给出利用 PCRLB 来评估多运动站无源跟踪算法性能的示意图, 仿真结果如图3所示. 跟踪算法采用文献[7]的迭代UKF (IUKF) 算法, 跟踪结果取500次蒙特卡罗实验次的统计平均. 载机位置误差为100 m, 观测时间为200 s, IUKF 参数设置为: 比例因子 $\eta = 1$, 最大迭代次数为6次. 其余参数设置与前面相同。

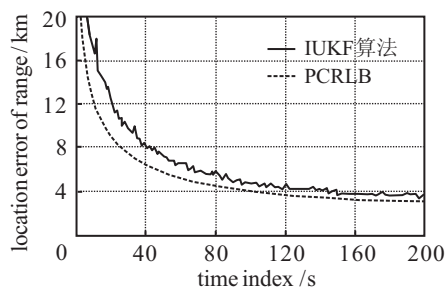


图3 算法性能评价示意图

如图3所示, IUKF 算法在合理的初始化条件下能够逼近 PCRLB, 但其性能仍有改进空间。

4 结 论

本文对位置误差条件下的多运动站无源跟踪 PCRLB 进行研究, 得到了状态协方差矩阵奇异时的 PCRLB 的通用递推式, 并推导了观测站位置误差情况下 PCRLB 计算的具体表达式. 仿真分析表明, 对于只测角跟踪而言, 在测角精度较高时, 载机位置误差对近距离目标跟踪 PCRLB 的影响较大, 对远距离目标跟踪 PCRLB 的影响在一定范围内较小. 测角误差较大时一般无需考虑载机位置误差对 PCRLB 的影响. 所推导的 PCRLB 计算式同样适于对时差跟踪及频差跟踪等体制进行跟踪性能评价, 从而为算法设计提供了理论指导。

参考文献(References)

- [1] Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [2] Wu Y X, Hu D W, Wu M P, et al. A numerical-integration perspective on Gaussian filters[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(8): 2910-2921.
- [3] 郭云飞, 韦巍, 薛安克. 非线性滤波 CRLB 推导及在目标跟踪中的应用[J]. 光电工程, 2007, 34(4): 26-29.
(Guo Y F, Wei W, Xue A K. Derivation of the CRLB in nonlinear filter and application to target tracking[J]. Opto-Electronic Engineering, 2007, 34(4): 26-29.)
- [4] Kay S M. 统计信号处理基础-估计与检测理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2011: 23-53.
(Kay S M. Fundamentals of statistic signal processing: Estimation and detection theory[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011: 23-53.)
- [5] Tichavský P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramér-rao bounds for discrete-time nonlinear filtering[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(5): 1386-1396.
- [6] Bar-Shalom Y, Li X R, Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation: Theory algorithms and software[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2001: 267-295.
- [7] Zhan R H, Wan J W. Iterated unscented Kalman filter for passive target tracking[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems, 2007, 43(3): 1155-1163.
- [8] 占荣辉, 王玲, 万建伟. 稳健的单站无源目标跟踪算法研究[J]. 信号处理, 2007, 23(3): 464-468.
(Zhan R H, Wang L, Wan J W. Research on robust algorithm for single observer passive target tracking[J]. Signal Processing, 2007, 23(3): 464-468.)

(下转第1418页)