

文章编号: 1001-0920(2013)07-0985-06

具有时滞的非线性纵向飞行模型稳定性和分支分析

范丽^{1,2}, 史忠科¹

(1. 西北工业大学自动化学院, 西安 710072; 2. 陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062)

摘要: 研究一类具有时滞的非线性飞行模型的稳定性和分支问题. 首先考虑数据测量的时间延迟, 给出了含时滞的大迎角纵向多项式飞行模型; 然后应用泛函微分方程 Hopf 分支理论和中心流形等非线性方法给出了该模型稳定性和分支的解析分析, 得到了由时滞引起的 Hopf 分支存在条件、分支点计算公式以及分支周期解的稳定性判别准则; 最后利用所得结论进行了飞行实例分析, 分析结果表明, 数据测量延时可能会引起飞行稳定性的改变, 而且延时超过一定临界值时将产生 Hopf 分支, 出现纵向周期振荡, 其结论具有实际参考意义.

关键词: 非线性; 纵向运动; 时滞; 分支; 稳定性

中图分类号: V211.12

文献标志码: A

Stability and bifurcation analysis of nonlinear model for longitudinal motion with time delay

FAN Li^{1,2}, SHI Zhong-ke¹

(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China. Correspondent: SHI Zhong-ke, E-mail: zkeshi@nwpu.edu.cn)

Abstract: The stability and bifurcations of a nonlinear flight system with time delay are investigated. Firstly, considering the time delay in measurement of angle of attack, a polynomial differential system with time delay for aircraft longitudinal motion is suggested. Then by applying Hopf bifurcation and center manifold theories of functional differential equations, the stability and bifurcations of the time-delayed system are studied analytically, and existence conditions for Hopf bifurcations as well as formulas for calculating bifurcation points and stability of the bifurcation limit cycle are derived. Finally, the theoretical conclusions are applied to analyze a practical example of high angle-of-attack flight. The results show that the delay in the measurement of angle of attack can cause instability, moreover, the Hopf bifurcation occurs and the periodic oscillation of longitudinal direction arises when the measurement delay exceeds the critical value. The conclusion has the reference significance in practice.

Key words: nonlinear; longitudinal motion; time delay; bifurcation; stability

0 引言

为了获得更好的空战性能, 现代飞行器常常处于大迎角飞行状态. 与小迎角飞行不同, 由于气动力的非线性、非定常等特性, 飞行器在大迎角区域的运动是一个复杂的非线性动力系统, 常出现机翼摇摆、尾旋和滚转等特殊非线性现象. 这些特殊现象往往与非线性动力系统的临界状态、分支和突变等奇异性密切相关. 如机翼摇晃常常对应动力系统的极限环和 Hopf 分支^[1-2], 深失速与系统的平衡点分支、突变等有直接关系^[3-4], 尾旋与平衡点分支或极限环分支有关^[3-5].

近年来, 利用分支分析理论研究非线性动力学特性及控制已受到飞行力学界的广泛关注^[2-6].

由于仪器设备和人为因素, 数据测量以及控制操作过程一般都存在时间延迟. 在测量迎角、侧滑角等飞行参数时, 目前广泛采用的大气数据传感系统 ADS (FADS) 大都存在传感器时间延迟^[7-8]. 文献[8]指出, 在高空环境下传感器的气路延时很大, 可达 0.4 s 以上, 导致 FADS 无法正常工作. 此外, 数据采集器、控制系统中上下行信号传输等也含有时间延迟. 以上诸多因素使得实际飞控系统不可避免地具有一定的

收稿日期: 2012-04-04; 修回日期: 2012-08-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61134004, 61273311); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(GK201302004).

作者简介: 范丽(1973-), 女, 博士生, 从事非线性动力系统与控制的研究; 史忠科(1956-), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、飞行动力系统与控制、交通系统及控制等研究.

时间滞后性. 在过去的处理中, 人们常常忽略时滞, 但随着对系统动力学行为的要求越来越精确化, 必须考虑时滞对系统的影响. 已有结果表明, 即使是很小的时滞也可能导致系统复杂的动力学特性, 造成失稳和分支现象的产生^[9-12]. 近年来, 具有时滞的非线性问题已引起飞行力学研究者的关注. 文献[11]讨论了滞后区间飞机运动系统的鲁棒稳定性问题, 给出了时滞系统稳定条件. 文献[12]研究了具有通讯时滞的垂直起降无人机编队控制问题, 针对3种控制方案, 利用Lyapunov-Krasovskii函数分析了时滞闭环系统的稳定性. 时滞不仅影响系统稳定性, 而且产生了丰富的分支现象^[9-10,13], 特别是时滞可能引发Hopf分支, 出现分支周期解, 在非线性飞行系统中造成机翼摇晃或俯仰振荡等现象.

本文在考虑数据测量时间延迟的基础上, 给出了具有时滞的纵向多项式飞行方程; 根据泛函微分方程Hopf分支定理、中心流形和规范型理论, 利用解析方法讨论了该类时滞系统的稳定性和分支问题; 在此基础上分析了时滞对飞行器飞行性态的影响.

1 时滞非线性纵向飞行模型

文献[6]通过分析飞行器纵向运动, 给出了如下大迎角情况下气动力、力矩多项式逼近的微分方程表达式:

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha, \beta)\dot{\alpha} + g(\alpha, \beta, p, r). \quad (1)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\alpha, \beta) = \\ M_{zq} + (1 + C_{zq})M_{z\dot{\alpha}} + \sum_{k=1}^{n_{\alpha}} k C_{z\alpha}^k \alpha^{k-1} + C_{z\alpha\beta}\beta, \\ g(\alpha, \beta, p, r) = \\ -M_{zq} \left(\sum_{k=1}^{n_{\alpha}} C_{z\alpha}^k \alpha^k + C_{z\alpha\beta}\alpha\beta \right) + \\ (1 + C_{zq}) \left(\sum_{k=1}^{n_q} M_{z\alpha}^k \alpha^k + \frac{df_q(p, r)}{dt} \right) + b, \\ b = -M_{zq}(C_{z0} + C_{z\delta_e}\delta_e + C_{z\delta_c}\delta_c) + C_{z\delta_c}\dot{\delta}_c + \\ (1 + C_{zq})(M_{z0} + M_{z\delta_e}\delta_e + M_{z\delta_c}\delta_c) + C_{z\delta_e}\dot{\delta}_e. \end{array} \right. \quad (2)$$

这里: φ 、 θ 和 ψ 分别为滚转角、俯仰角和偏航角; p 、 q 和 r 分别为对应的角速率; α 和 β 为迎角和侧滑角; δ_e 为升降舵偏角, δ_c 为鸭翼偏角; C_{z*} 和 $C_{z\alpha}^k$ 为法向气动力系数, M_{z*} 和 $M_{z\alpha}^k$ 为俯仰力矩系数, 这些系数在给定的高度、马赫数时为常数.

在实际飞行研究中, 模型(1)和(2)中的系数常由飞行试验(实)验数据及模型辨识方法得到, 测量数据一般都含有时间延迟. 迎角是重要的飞行参数, 目前主要采用ADS(FADS)测量, 由于传感器延迟, 迎角测量数据含有一定延时. $\dot{\alpha}$ 和 $\ddot{\alpha}$ 数据不是由测量直接得到

的, 可不考虑其测量延时. 此外, 由于飞行试验中试飞员具有丰富的纵向飞行经验, 纵向模型辨识程序往往自动剔除了横侧向参数^[6]. 综上, 考虑迎角 α 的测量延时, 并设 f 和 g 是 α 的多项式函数, 则式(1)可改写为如下时滞飞行方程:

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha(t-\tau))\dot{\alpha} + g(\alpha(t-\tau)), \quad (3)$$

其中 $\tau \geq 0$ 为迎角测量时滞. 令 $x = \alpha$, $y = \dot{\alpha}$, 方程(3)可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x(t-\tau))y + g(x(t-\tau)), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $f(x)y + g(x)$ 为 x 和 y 的多项式函数. 将平衡点移到原点, 形如式(4)的时滞三次多项式微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (a_2x^2(t-\tau) + a_1x(t-\tau) + a_0)y + \\ (b_2x^2(t-\tau) + b_1x(t-\tau) + b_0)x(t-\tau), \end{cases} \quad (5)$$

其中 a_i 和 b_i ($i = 0, 1, 2$) 为系数, 与舵偏角 δ_e 、法向气动力系数 C_{z*} 、 $C_{z\alpha}^k$ 及俯仰力矩系数 M_{z*} 、 $M_{z\alpha}^k$ 等有关.

时滞对系统的动力学性态有重要影响, 会引起稳定性的改变和分支的产生. 下面利用非线性时滞微分方程的相关理论及方法讨论系统(5)的稳定性和分支问题.

2 稳定性和分支理论分析

利用坐标变换可将三次项系数化为 $a_2 = -1$, $b_2 = \pm 1$. 这里主要讨论 $a_2 = -1$, $b_2 = 1$ 的情形, $a_2 = -1$, $b_2 = -1$ 时的分析方法相同. 设 $a_2 = -1$, $b_2 = 1$, 式(5)可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (-x^2(t-\tau) + a_1x(t-\tau) + a_0)y + \\ (x^2(t-\tau) + b_1x(t-\tau) + b_0)x(t-\tau). \end{cases} \quad (6)$$

令

$$f(x) = -x^2 + a_1x + a_0, \quad g(x) = (x^2 + b_1x + b_0)x, \quad (7)$$

则由平衡点方程可知, 当 $b_0 < b_1^2/4$ 时, 式(6)有3个平衡点 $(0, 0)$ 和 $(x_{1,2}^*, 0)$, 且平衡点 $(x_{1,2}^*, 0)$ 为不稳定鞍点. 这里仅讨论 $b_0 > b_1^2/4$ 和 $b_0 < 0$ 时系统(6)在原点 $(0, 0)$ 处的稳定性和Hopf分支问题.

2.1 平衡点稳定性和Hopf分支存在性

设 $b_0 > b_1^2/4$ 或 $b_0 < 0$, 在平衡点 $(0, 0)$ 处式(6)的线性化系统特征方程为

$$\lambda^2 - a_0\lambda - b_0e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (8)$$

将 $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$) 代入式(8), 并分离实部和虚部, 得

$$\begin{cases} \omega^2 + b_0 \cos(\omega\tau) = 0, \\ -a_0\omega + b_0 \sin(\omega\tau) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

求解方程(9), 可知特征方程(8)在 $\tau = \tau_n$ ($n = 0, 1,$

2, \dots) 时有一对简单纯虚根 $\pm i\omega_0$, 其中

$$\omega_0 = \sqrt{(-a_0^2 + \sqrt{a_0^4 + 4b_0^2})/2},$$

$$\tau_n = (\arcsin(a_0\omega_0/b_0) + 2n\pi)/\omega_0. \quad (10)$$

设 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$ 是式 (8) 的特征根, 且满足 $\alpha(\tau_n) = 0, \omega(\tau_n) = \omega_0$. 将 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$ 代入式 (8), 分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} -a_0\alpha + \alpha^2 - \omega^2 = b_0e^{-\alpha\tau} \cos(\omega\tau), \\ a_0\omega - 2\alpha\omega = b_0e^{-\alpha\tau} \sin(\omega\tau). \end{cases} \quad (11)$$

对方程 (11) 在 $\tau = \tau_n$ 处求导, 并求解含导数方程, 得

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{\omega_0^2(2\omega_0^2 + a_0^2)}{(a_0 - \tau_n\omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2 + \tau_n^2\omega_0^2a_0^2} > 0. \quad (12)$$

引理 1^[9] 设函数 $f(\lambda, \tau) = \lambda^n + g(\lambda, \tau)$, 其中 $g(\lambda, \tau)$ 是解析函数, 且满足

$$\limsup_{\text{Re}(\lambda) > 0, \lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{g(\lambda, \tau)}{\lambda^n} \right| < 1,$$

则当 τ 变化时, 方程 $f(\lambda, \tau) = 0$ 位于右半平面的根的重数之和当且仅当方程有根穿过虚轴时发生变化.

由引理 1 和 $\lambda(\tau)$ 的连续性, 易证以下结论.

引理 2 1) 若 $b_0 < 0$ 且 $a_0 < 0$, 则对于任意 $\tau \in [0, \tau_0)$, 系统 (6) 在原点处的特征根均具有负实部; 对于任意 $\tau \in (\tau_n, \tau_{n+1})$, 有 $2(n+1)$ 个具有正实部的特征根. 2) 若 $b_0 < 0$ 且 $a_0 > 0$ 或 $b_0 > b_1^2/4$, 则对于任意 $\tau \in [0, +\infty)$, 系统 (6) 在原点处具有正实部特征根.

根据以上分析, 利用文献 [14] 中的泛函微分方程 Hopf 分支定理, 可得如下定理.

定理 1 对于系统 (6), 有:

1) 若 $b_0 < 0$ 且 $a_0 < 0$, 则对于任意 $\tau \in [0, \tau_0)$, 平衡点 $(0, 0)$ 渐近稳定; 对于任意 $\tau \in [\tau_0, +\infty)$, $(0, 0)$ 不稳定.

2) 若 $b_0 < 0$ 且 $a_0 > 0$ 或 $b_0 > b_1^2/4$, 则对于任意 $\tau \in [0, +\infty)$, 平衡点 $(0, 0)$ 不稳定.

3) 对于任意 $b_0 > b_1^2/4$ 或 $b_0 < 0$, 系统 (6) 在 $\tau = \tau_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 处产生 Hopf 分支.

2.2 Hopf 分支的稳定性

分支周期解的稳定性和分岔开口方向在理论研究和实际应用中是非常重要的问题. 由定理 1 可知, 系统 (6) 在 τ_0 处产生 Hopf 分支, 下面进一步讨论 τ_0 附近分支周期解的稳定性和 Hopf 分支开口方向. 首先利用中心流形定理对系统 (6) 进行降维. 令 $u = (x, y)^T$, 则式 (6) 可写为如下矩阵形式:

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} u(t-\tau) + h(u(t), u(t-\tau)), \quad (13)$$

其中

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ (-x^2(t-\tau) + a_1x(t-\tau))y + \\ (x^2(t-\tau) + b_1x(t-\tau))x(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (14)$$

为非线性部分. 记 $C = C([- \tau, 0], R^2)$, 则对任意 $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta))^T \in C$, 定义算子 L , 即

$$L\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \varphi(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \varphi(-\tau).$$

根据 Riesz 表示定理, 存在分量为有界变差函数的矩阵 $\eta: [- \tau, 0] \rightarrow R^{2 \times 2}$, 使得 $L\varphi = \int_{-\tau}^0 d\eta(\theta)\varphi(\theta)$. 对任意 $\varphi(\theta) \in C$, 再定义算子

$$A\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}, & -\tau \leq \theta < 0; \\ \int_{-\tau}^0 d\eta(\theta)\varphi(\theta), & \theta = 0. \end{cases}$$

$$R\varphi = \begin{cases} (0, 0)^T, & -\tau \leq \theta < 0; \\ h(\varphi), & \theta = 0. \end{cases}$$

则方程 (13) 可表示为如下泛函微分方程:

$$\dot{u}_t = Au_t + Ru_t. \quad (15)$$

其中: $u_t(\theta) = u(t+\theta) \in C, -\tau \leq \theta \leq 0$. 记 C^* 为 C 的对偶空间, 对于 $\psi \in C^*$, A 伴随算子为

$$A^*\psi = \begin{cases} -\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}, & 0 \leq \xi < \tau, \\ \int_{-\tau}^0 d\eta^T(\xi)\psi(-\xi), & \xi = 0. \end{cases}$$

设 $\varphi(\theta) \in C, \psi(\xi) \in C^*$, 引入双线性型

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0)^T \phi(0) - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta) \phi(\xi) d\xi, \quad (16)$$

则 A 和 A^* 按该对偶积互为共轭算子. 根据以上算子 A, A^* 和 L 的定义, 采用待定系数法可得系统 (15) 在 $\tau = \tau_0$ 处对应 $\pm i\omega_0$ 的特征向量, 即如下引理.

引理 3 设 $b_0 < 0$ 且 $a_0 < 0$, 则算子 A 和 A^* 对应特征值 $i\omega_0$ 和 $-i\omega_0$ 的特征向量分别为

$$q(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} e^{i\omega_0\theta}, \quad q^*(\xi) = N \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega_0\xi}, \quad (17)$$

且满足 $\langle q^*, q \rangle = 1$ 和 $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$. 其中: $\alpha = i\omega_0, \beta = -a_0 - i\omega_0$, 而

$$N = \frac{1}{-a_0 - 2i\omega_0 + e^{i\omega_0\tau_0}\tau_0b_0}. \quad (18)$$

令 $\sigma = \{i\omega_0, -i\omega_0\}$, 则存在 C 的一个直和 $C = P \oplus Q$, P 为算子 A 对应 σ 的二维子空间, Q 为 P 的补空间. 根据文献 [14] 中关于中心流形的结论, 方程 (15) 的局部中心流形定义如下:

$$M = \{\varphi \in C | \varphi = \Phi z + w(z, h), z \in U(O) \subset R^2\}.$$

这里: $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ 为子空间 P 的一组基, $w \in Q, h(\phi)$ 为系统的非线性部分, 且 z 满足方程

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} z + \Psi(0)h(\Phi z). \quad (19)$$

其中: $\Psi(\theta)$ 为伴随算子 A^* 对应 σ 的不变子空间的基, 且 $\langle \Psi, \Phi \rangle$ 为单位阵. 根据中心流形定理^[14], 系统 (6) 在 $\tau = \tau_0$ 附近解的性质被约化为常微分方程 (19) 解的性质. 由引理 3, 进一步推导出

$$\Psi(0) = 2 \begin{bmatrix} \text{Im}(N\beta) & \text{Re}(N\beta) \\ \text{Im}(N) & \text{Re}(N) \end{bmatrix},$$

$$\Phi z = \begin{bmatrix} \sin(\omega_0\theta)x + \cos(\omega_0\theta)y \\ \omega_0 \cos(\omega_0\theta)x - \omega_0 \sin(\omega_0\theta)y \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中 Re 和 Im 表示取实部和虚部. 由式 (14) 和 (20), 有 $h(\Phi z) = (0, h_2(x, y))^T$, 且

$$h_2(x, y) = f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3. \quad (21)$$

其中各系数的计算公式为

$$\begin{aligned} f_{20} &= -a_1 \sin(\omega_0\tau_0)\omega_0 + b_1 \sin^2(\omega_0\tau_0), \\ f_{11} &= a_1 \cos(\omega_0\tau_0)\omega_0 - 2b_1 \cos(\omega_0\tau_0) \sin(\omega_0\tau_0), \\ f_{02} &= b_1 \cos^2(\omega_0\tau_0), \\ f_{30} &= -\sin^2(\omega_0\tau_0)\omega_0 - \sin^3(\omega_0\tau_0), \\ f_{21} &= 2 \cos(\omega_0\tau_0) \sin(\omega_0\tau_0)\omega_0 + 3 \cos(\omega_0\tau_0) \sin^2(\omega_0\tau_0), \\ f_{12} &= -\cos^2(\omega_0\tau_0)\omega_0 - 3 \cos^2(\omega_0\tau_0) \sin(\omega_0\tau_0), \\ f_{03} &= \cos^3(\omega_0\tau_0). \end{aligned} \quad (22)$$

将式 (20) 和 (21) 代入方程 (19), 有

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_0 y + 2\text{Re}(N\beta)(f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3), \\ \dot{y} = \omega_0 x + 2\text{Re}(N)(f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3). \end{cases} \quad (23)$$

根据中心流形定理, 时滞微分方程 (6) 在分支点 $\tau = \tau_0$ 处 Hopf 分支周期解的稳定性将由中心流形上的常微分方程 (23) 周期解的稳定性确定.

利用 PB 范式法进一步讨论常微分方程 (23) 的 Hopf 分支周期解. 根据文献 [15], 式 (23) 的 4 阶 PB 范式为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + O(r^5), \\ \dot{y} = \omega_0 x + (bx + ay)(x^2 + y^2) + O(r^5), \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 进一步计算相应的分支稳定性判别系数^[15], 可得

$$\begin{aligned} \mu &= -(a/d)(x^2 + y^2), \\ a &= (\omega_0(3f_{03} + f_{21})Q + \omega_0(3f_{30} + f_{12})P - f_{11}(f_{02} + f_{20})Q^2 + f_{11}(f_{02} + f_{20})P^2 + 2(f_{02}^2 - f_{20}^2)PQ)/8\omega_0, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $d = d \text{Re}(\lambda(\tau))/d\tau|_{\tau=\tau_0} > 0$, 且

$$\begin{aligned} P &= 2\text{Re}(N\beta) = 2(-a_0^2 + a_0 b_0 \tau_0 \cos(\omega_0 \tau_0) - 2\omega_0^2 + b_0 \omega_0 \tau_0 \sin(\omega_0 \tau_0))/S, \\ Q &= 2\text{Re}(N) = 2(a_0 - b_0 \tau_0 \cos(\omega_0 \tau_0))/S, \\ S &= -a_0^2 + 2a_0 b_0 \tau_0 \cos(\omega_0 \tau_0) - 4\omega_0^2 + 4b_0 \omega_0 \tau_0 \sin(\omega_0 \tau_0) - b_0^2 \tau_0^2. \end{aligned}$$

则由常微分方程 Hopf 分支定理, 可得到以下定理.

定理 2 设 $b_0 < 0$ 且 $a_0 < 0$, 则系统 (6) 在 $\tau = \tau_0$ 处产生 Hopf 分支, 且若 $a < 0$, 则 Hopf 分支为超临界的, 分支周期解渐近稳定; 若 $a > 0$, 则 Hopf 分支为亚临界的, 分支周期解不稳定.

注 1 定理 2 中的稳定性判别系数 a 的值由式 (24) 给出; 定理 1 和定理 2 中的条件是针对方程 (6) 系数 a_i, b_i 给出的, 根据方程 (1) 和 (6) 的关系, 进一步可给出舵偏角 δ_e 、法向气动力系数 C_{z^*} 和 $C_{z\alpha}^k$ 、俯仰力矩系数 M_{z^*} 和 $M_{z\alpha}^k$ 所满足的稳定性和分支条件.

3 飞行实例分析

采用文献 [6] 中的大迎角纵向运动飞行实例数据, 并考虑迎角测量延时, 形如式 (4) 的纵向运动飞行方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (a_{g0} + a_{g1}x(t-\tau) + a_{g2}x^2(t-\tau))y + b_{g0} + b_{g1}x(t-\tau) + b_{g2}x^2(t-\tau) + b_{g3}x^3(t-\tau) + c_1\delta_e + c_2\dot{\delta}_e. \end{cases} \quad (25)$$

其中: $\tau \geq 0$ 为时滞, 状态量 $x = \alpha, y = \dot{\alpha}$, 各系数取值分别为

$$\begin{aligned} b_{g0} &= 2.038\ 987, \quad b_{g1} = -8.243\ 739, \quad b_{g2} = -0.137\ 965, \\ b_{g3} &= 0.008\ 193, \quad a_{g0} = -1.211\ 386, \quad a_{g1} = -0.019\ 923, \\ a_{g2} &= 0.002\ 051, \quad c_1 = -4.619\ 857, \quad c_2 = -0.037\ 685, \end{aligned}$$

且升降舵偏角限制范围为 $-15^\circ \leq \delta_e \leq 15^\circ$. 下面令 $\delta = c_1\delta_e + c_2\dot{\delta}_e$, 利用第 2 节的理论结果分析时滞 τ 和参数 δ 对飞行系统 (25) 动力学性态的影响.

时滞微分系统 (25) 与文献 [6] 中无时滞系统的平衡点方程相同, 其平衡点及平衡点分支可参考文献 [6]. 根据文献 [6], 当 $\delta \in (-68.0284, 162.2925)$ 时, 式 (25) 有 3 个平衡点 $(x_j^*, 0)$, $j = 1, 2, 3$. 通过坐标变换可将式 (25) 转化为方程 (6) 的形式. 需说明的是, 这里 $x^2(t-\tau)y$ 项的系数符号与式 (6) 不同, 为正, 但定理 1 和定理 2 均成立, 不同之处仅仅是定理 2 中 f_{ij} 的计算公式, 其中某些项的正负号不同. 根据第 2 节的结论及公式, 代入具体数据, 可得实例系统 (25) 的分支和稳定性结果. 图 1 为 $\tau = \tau_0$ 时对应的 $\delta - \tau_0$ 分支图, 图中: 直线 B_{sn} : $\delta = -68.0284$ 或 162.2925 为平衡点分支曲

线, 在这两条直线之间, 系统(25)有3个平衡点, 外侧仅有1个平衡点; B_{h0} 为 $\tau = \tau_0$ 对应的 Hopf 分支曲线. 根据式(24)计算稳定性判别指数 a 的值, 结果表明, 当 $162.2925 > \delta > -68.0284$ (对应 $-35.1293^\circ < \delta_e < 14.7252^\circ$) 时, a 均小于 0, 故 B_{h0} 上任意点处 Hopf 分支均是超临界的, 分支周期解稳定. 综上所述, 并考虑到升降舵偏角限制, 有: 当 $-15^\circ < \delta_e < 14.7252^\circ$ 时, 时滞引起稳定 Hopf 分支.

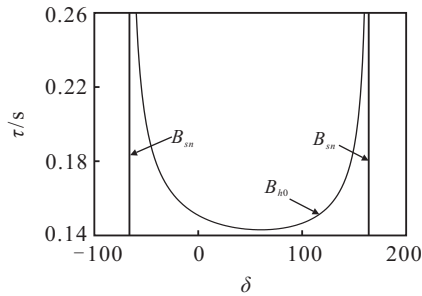


图1 $\tau = \tau_0$ 处系统(25)的分支图

取值 $\delta_e = 0^\circ, \dot{\delta}_e = 0$, 系统(25)有3个平衡点 $(x_j^*, 0), j = 1, 2, 3$. 其中: $x_1^* = -24.5534, x_2^* = 0.2463, x_3^* = 41.1464$. 利用第2节理论分析得: 当时滞 $\tau = \tau_n = 0.1506 + 0.78n\pi (n = 0, 1, \dots)$ 时, 系统(25)在中间平衡点 $(x_2^*, 0)$ 附近产生 Hopf 分支. 特别地, 当 $\tau = \tau_0 = 0.1506$ s 时, Hopf 分支稳定性判别系数 $a = -0.0601 < 0$, 说明 τ_0 处 Hopf 分支是超临界的. 通过数值计算, 图2给出了式(25)在平衡点 $(x_2^*, 0)$ 附近的相轨线, 说明数值结果与理论分析一致. 实际中, 迎角测量延时的大小与设备系统有关, 就大气数据传感器而言, 延时量级可达秒级^[7], 因此时滞超过临界值 τ_0 引起系统失稳及分支现象在实际中是可能出现的.

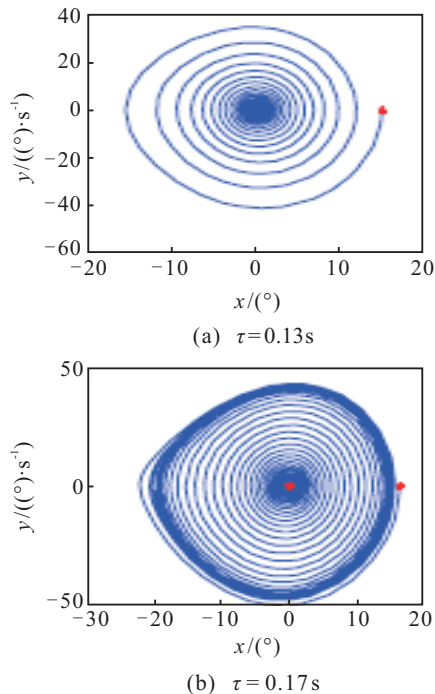
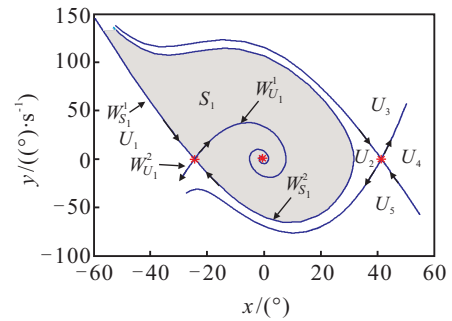


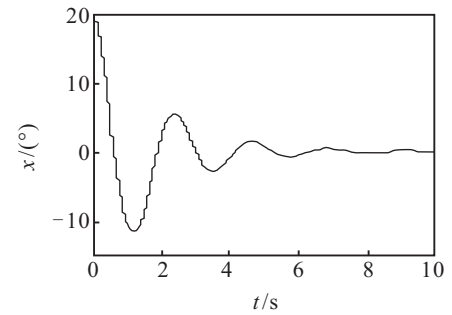
图2 $\delta_e = 0^\circ$ 系统(25)的数值计算轨线图

进一步比较无时滞系统和含时滞系统的动力学特性. 由文献[6]和本节的分析可知, 舵偏角 δ_e 在 15° 范围内, 无时滞系统和含时滞系统均有3个平衡点, 且两侧平衡点为不稳鞍点, 二系统不同之处主要有以下几点:

1) 稳定性不同. 无时滞系统的平衡点 $(x_2^*, 0)$ 是稳定的; 对于含时滞系统, 当 $0 \leq \tau < \tau_0$ 时 $(x_2^*, 0)$ 稳定, $\tau > \tau_0$ 时则不稳.

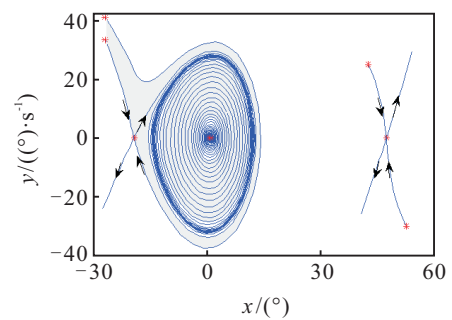


(a) 相轨线图

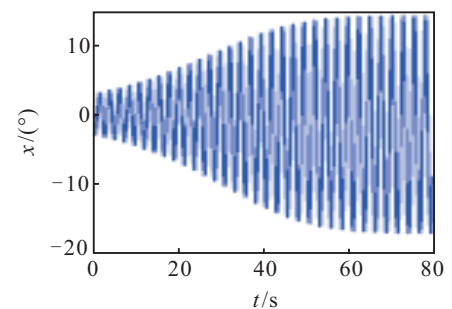


(b) t-x 历程图

图3 $\delta_e = 0^\circ$ 无时滞系统轨线和时间历程图



(a) 相轨线图



(b) t-x 历程图

图4 $\delta_e = 0^\circ, \tau = 0.1636$ s 时滞系统(25)的轨线和时间历程图

2) 对于任意 $\delta_e \in [-15^\circ, 15^\circ]$, 无时滞系统不出现极限环, 但对于含时滞系统, 当 $\tau > \tau_0$ 时有稳定极限环, 对应飞机的纵向周期运动。

图 3 和图 4 分别给出了 $\delta_e = 0^\circ$ 时无时滞系统和含时滞系统的轨线图以及 x (迎角 α) 时间历程图, 其中阴影部分为平衡点或极限环的稳定吸引区域。

由图 3 可以看出, 对于无时滞系统, 稳定区域内的轨线趋于平衡点 $(x_2^*, 0)$, 迎角 α 最终稳定于 $x_2^* = 0.2463^\circ$ 。图 4 给出了时滞 $\tau = 0.1636\text{s} > \tau_0$ 系统的轨线, 此时稳定区域内的轨线稳定于一个极限环, 迎角最终趋于周期振荡, 在 -17.60° 与 8.08° 之间振荡, 振幅约为 25.68° , 这样的纵向振荡幅度对飞机操控是有一定影响的, 而且随着时滞增大, 振幅将更大。

4 结 论

本文基于飞行器纵向多项式常微分运动方程, 考虑数据测量的时间延迟, 给出了具有时滞的非线性飞行模型, 较之忽略时滞影响的飞行方程, 该模型更接近实际情况; 利用解析方法讨论了该类时滞多项式模型的平衡点和分支问题, 给出了 Hopf 分支的存在条件和分支周期解的稳定性判别依据; 利用所得理论结果分析了数据测量时滞和升降舵偏角对某型飞机飞行特性的影响, 结果表明, 当数据测量延时超过一定临界值时将产生 Hopf 分支, 诱发迎角的周期振荡, 振荡幅度随着时滞增大, 对飞机操控具有一定影响。该飞行实例也说明了本文给出的稳定性和分支条件在实际中可以达到, 其结论具有实际参考意义。

参考文献(References)

- [1] Shah P, Unnikrishnan S, Ananthkrishnan N, et al. Analytical prediction of wing rock onset for aircraft with lightly damped lateral dynamics[R]. Reston: AIAA 2003-5304, 2003.
- [2] Go T H, Ramnath R V. An analytical theory of three degree-of-freedom aircraft wing rock[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(4): 657-664.
- [3] Goman M G, Zagainov G I, Khramtsovsky A V. Application of bifurcation method to nonlinear flight dynamics problem[J]. Progress in Aerospace Sciences, 1997, 33(9): 539-586.
- [4] Gousman K G, Juang J C, Loschke R C, et al. Aircraft deep stall analysis and recovery[R]. Reston: AIAA 91-2888, 1991.
- [5] Paranjape A A, Ananthkrishnan N. Analytical criterion for aircraft spin susceptibility[R]. Reston: AIAA 2010-7623, 2010.
- [6] Shi Z K, Fan L. Bifurcation analysis of polynomial models for longitudinal motion at high angle of attack[J]. Chinese J of Aeronautics, 2013, 26(1): 151-160.
- [7] 邵荣士. 某机高度稳定系统的高空振荡及气路延时的补偿[J]. 航空学报, 2001, 22(5): 396-399.
(Shao R S. Compensation for the time delay of pilot-static tube causing the high-altitude oscillation in an altitude hold system of a fighter[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2001, 22(5): 396-399.)
- [8] 李清东, 张孝功, 任章. FADS 压力传感器延迟补偿[J]. 航天控制, 2008, 26(6): 12-15.
(Li Q D, Zhang X G, Ren Z. The time delay compensation method for the pressure sensors of fads[J]. Aerospace Control, 2008, 26(6): 12-15.)
- [9] Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics[M]. Boston: Academic Press, 1993: 3-12.
- [10] Fan L, Shi Z K. Critical values for a differential equations with delay-dependent parameters[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(1): 341-355.
- [11] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 滞后区间系统的鲁棒稳定性分析及其应用[J]. 西北工业大学学报, 1999, 17(2): 236-240.
(Wu F X, Shi Z K, Dai G Z. Robust stability analysis for interval system with delay and its aircraft application[J]. J of Northwestern Polytechnical University, 1999, 17(2): 236-240.)
- [12] Abdessameud A, Tayebi A. Formation control of VTOL unmanned aerial vehicles with communication delays[J]. Automatica, 2011, 47(4): 2383-2394.
- [13] Piotrowska M J, Forys U. The nature of hopf bifurcation for the Gompertz model with delays[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54(10): 2183-2198.
- [14] Hale J. Theory of functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977: 245-252.
- [15] 陆启韶. 分岔与奇异性[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995: 109-118.
(Lu Q S. Bifurcation and singularity[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1995: 109-118.)