

文章编号: 1001-0920(2013)08-1145-07

状态估计与未知输入和可测噪声同时重构方法

杨俊起^{1,2}, 朱芳来¹

(1. 同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804; 2. 河南理工大学 电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000)

摘要: 针对一类不确定线性系统, 讨论了状态估计及未知输入和可测噪声重构方法. 首先, 对仅具有未知输入的线性系统, 讨论了观测器匹配条件不满足前提下的状态估计和未知输入重构问题; 通过设计降维观测器和高阶滑模观测器, 提出一种未知输入代数重构方法; 然后, 将以上结论上升到具有未知输入和可测噪声的线性系统, 以此提出了状态估计及未知输入和可测噪声同时重构的方法; 最后, 通过对飞行器模型进行仿真, 验证了所提出方法的有效性.

关键词: 未知输入重构; 可测噪声重构; 降维观测器; 滑模观测器

中图分类号: TP273

文献标志码: A

State estimation and simultaneous unknown input and measurement noise reconstruction

YANG Jun-qi^{1,2}, ZHU Fang-lai¹

(1. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. College of Electrical Engineering and Automation, He'nan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China. Correspondent: ZHU Fang-lai, E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn)

Abstract: This paper considers the problems of the state estimation and the simultaneous unknown input and measurement noise reconstruction for linear systems. For the linear systems only with unknown inputs, the issues of state estimation and unknown input reconstruction are discussed when the observer matching condition is not satisfied. A reduced-order observer is developed and a high-order sliding mode observer is proposed. After this, an unknown input reconstruction method is developed. Then, the results are extended to be suitable for linear systems with both unknown inputs and measurement noise, and a kind of simultaneous unknown inputs and measurement noise reconstruction method is proposed. Finally, a numerical simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: unknown input reconstruction; measurement noise reconstruction; reduced-order observer; sliding mode observer

0 引言

在现代控制理论中, 输入未知情况下的系统状态观测器具有重要意义. 例如, 在机械工具的应用中, 工具施加的切割力^[1]很难测量或者虽然可测, 但是代价太高. 如果把切割力作为机械工具系统的控制输入, 构建一个可以同时估计系统状态和该未知输入的观测器, 则这样的观测器称为未知输入观测器 (UIO). UIO 在其他领域也有很多应用, 如基于观测器的故障诊断^[2], 基于观测器的混沌同步与保密通讯^[3] 等.

未知输入观测器设计的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代^[1-6]. 早期, 人们主要研究如何绕开未知输入的

影响, 提出了状态估计的方法. 例如, Hostetter 等^[4]假定不可测扰动满足给定的常系数微分方程, 通过增维的方式设计 Luenberger 观测器^[7], 从而绕开未知输入的影响, 达到状态估计的目的. 随后, 人们针对线性系统或非线性系统, 考虑了状态和未知输入同时估计观测器设计方法. 例如, 基于降维观测器设计方法, Trinh 等^[8-9]处理了状态和输入同时估计问题. 最近, 切换系统的 UIO 设计方法得到了发展^[10-11], 对于非线性仿射系统, 文献 [12] 设计了一种用来估计状态和未知输入的高阶滑模观测器. 文献 [13] 进一步发展了文献 [12] 的方法, 使得其适用于非最小相位仿射非线性

收稿日期: 2012-04-16; 修回日期: 2012-06-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074009); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20110072110015); 上海市重点学科项目(B004).

作者简介: 杨俊起(1979-), 男, 博士生, 从事观测器设计、故障检测和重构的研究; 朱芳来(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事观测器设计、故障检测等研究.

系统. 在假设系统输出微分可测的情况下, Yan 等^[14]提出了一种用来估计未知参数的自适应滑模观测器. 对于存在可测噪声的系统, 一种基于描述系统的比例-微分观测器被用来解耦可测噪声, 从而获得系统状态的估计^[15]. 文献[16]提出了一种具有切换增益值的高增益观测器, 在抑制可测噪声的同时达到了状态估计的目的. Sanfelice 等^[17]设计了一种在线自适应增益的高增益观测器, 解决了具有可测噪声下的状态估计问题.

如文献[6]所述, UIO 设计的充分必要条件是: 系统的不变零点在左半开复平面内且观测器匹配条件成立. 在观测器匹配条件满足的前提下, 人们提出了很多未知输入观测器设计方法^[5-6, 8-14]. 然而对一些实际的物理系统, 观测器匹配条件是一个很强的限制条件, 因此突破匹配条件的限制具有重大意义. 最近, 文献[18]和[19]通过构造辅助输出处理了观测器匹配条件问题. 其中文献[19]通过设计高增益观测器用作近似微分器, 对辅助输出进行估计, 但没有考虑可测噪声. 此外在设计 UIO 时, 一些文献仅仅考虑了未知输入而没有考虑可测噪声^[2, 6, 8-9, 11, 14, 18-19]; 有一些考虑了可测噪声而没有考虑未知输入^[15-17]. 因此, 在突破观测器匹配条件的同时, 进行状态估计以及可测噪声和未知输入重构具有重大意义.

本文首先针对仅具有未知输入线性系统, 讨论其观测器匹配条件不满足前提下的 UIO 设计问题; 然后, 通过增维的手段, 将主要结论上升到同时具有未知输入和可测噪声的线性系统, 并以此提出一种同时重构未知输入和可测噪声的方法. 本文的创新点体现在: 首次针对同时具有未知输入和可测噪声的系统, 考虑了观测器匹配条件不满足时的设计问题, 并将该问题与未知输入和可测噪声同时重构方法的提出有机地结合起来.

1 基于辅助输出的 UIO 设计

1.1 模型描述

考虑具有未知输入的不确定线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D\eta, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 、 $y \in R^p$ 和 $u \in R^m$ 分别是状态向量、可测输出和已知输入向量, $\eta(t) \in R^k$ 为未知输入向量, A 、 B 、 C 和 D 是具有相应维的常量矩阵. 假设 $\text{rank} C = p$, $\text{rank} D = k$, $n \geq p \geq k$.

假设 1 系统(1)是最小相位的, 即 $\{A, C, D\}$ 的所有不变零点在左半开复平面内, 或对于所有具有 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 下式成立:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + k. \quad (2)$$

假设 2 系统状态 $x(t)$ 、未知输入 $\eta(t)$ 以及其微分范数有界.

注 1 对于系统(1), 在假设 1 和观测器匹配条件

$$\text{rank} D = \text{rank}(CD) = k \quad (3)$$

同时满足的情况下, 一些 UIO 已被提出^[5-6, 8-14]. 如前所述, 匹配条件(3)是一个很强的条件. 本文首先对仅含有未知输入的系统, 利用辅助输出突破观测器匹配条件限制, 设计 UIO 实现对未知输入估计; 然后, 将结论上升到具有可测噪声的系统.

1.2 辅助输出的构造

本节首先基于相对阶的概念, 构造满足观测器匹配条件(3)的辅助输出向量. 在假设辅助输出向量已知的情况下, 设计一种可以对系统(1)进行渐近状态估计的降维观测器.

定义 1 假定 r_i ($i = 1, 2, \dots, p$) 是满足下述方程的最小整数:

$$\begin{cases} c_i A^{k_r} D = 0, & k_r = 0, 1, \dots, r_i - 2; \\ c_i A^{r_i - 1} D \neq 0. \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, p$. 则系统(1)相对于系统未知输入 η 具有向量相对阶 (r_1, r_2, \dots, r_p) , 其中行向量 $c_i \in R^{1 \times n}$ 是输出矩阵 C 的第 i 个行向量.

假设 3 假定存在整数 γ_i ($1 \leq \gamma_i \leq r_i$) 使得 $C_a = [C_{a1}^T \ \dots \ C_{ai}^T \ \dots \ C_{ap}^T]^T$ ($i = 1, 2, \dots, p$), $C_{ai} = [c_i^T \ (c_i A)^T \ \dots \ (c_i A^{\gamma_i - 1})^T]^T$. C_a 满秩且观测器匹配条件 $\text{rank} D = \text{rank}(C_a D)$ 成立, 其中 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p$.

引理 1^[18] 系统 $\{A, C, D\}$ 和 $\{A, C_a, D\}$ 具有相同的不变零点.

引理 2^[5] 在假设 1 和观测器匹配条件

$$\text{rank} D = \text{rank}(C_a D) = k$$

同时成立的情况下, 当且仅当对于某个对称正定矩阵 $Q_a \in R^{n \times n}$, 存在矩阵 $L_a \in R^{n \times \gamma}$ 、矩阵 $G_a \in R^{k \times \gamma}$ 和对称正定矩阵 $P_a \in R^{n \times n}$ 使得下式成立:

$$\begin{cases} (A - L_a C_a)^T P_a + P_a (A - L_a C_a) = -Q_a, \\ D^T P_a = G_a C_a. \end{cases} \quad (4)$$

1.3 基于辅助输出的降维观测器设计

考虑如下与系统(1)具有相同状态, 且具有辅助输出向量的辅助输出系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D\eta, \\ y_a = C_a x. \end{cases} \quad (5)$$

其中: $C_a \in R^{\gamma \times n}$ 由假设 3 给出, y_a 是辅助输出向量.

通过 Smith 正交变换, 存在可逆矩阵 $W \in R^{\gamma \times \gamma}$

使得 $C_a = W\hat{C}_a$, 其中 $\hat{C}_a \in R^{\gamma \times n}$ 且 $\hat{C}_a \hat{C}_a^T = I_\gamma$. 扩展矩阵 \hat{C}_a 成为一个 $n \times n$ 正交矩阵 $S = [\hat{C}_a^T \ M^T]^T$, 其中 $M \in R^{(n-\gamma) \times n}$. 利用等价变换 $\hat{x} = Sx$, 系统(5)等价于

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + \hat{D}\eta, \\ y_a = \hat{C}_a\hat{x}. \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\hat{A} = SAS^T$, $\hat{B} = SB$, $\hat{D} = SD$, $\hat{C}_a = C_a S^{-1} = W[I_\gamma \ 0]$.

引理 3 对于某个对称正定矩阵 Q_a , 假如存在矩阵 L_a , G_a 和对称正定矩阵 P_a 使得式(4)成立, 则存在 $\hat{Q} = SQ_a S^T$, $\hat{L} = SL_a$, $\hat{P} = SP_a S^T$ 和 $\hat{G} = G_a$ 使得下式成立:

$$\begin{cases} (\hat{A} - \hat{L}\hat{C}_a)^T \hat{P} + \hat{P}(\hat{A} - \hat{L}\hat{C}_a) = -\hat{Q}, \\ \hat{D}^T \hat{P} = \hat{G}\hat{C}_a. \end{cases} \quad (7)$$

分解状态向量 \hat{x} 、矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{D} 、 \hat{Q} 和 \hat{P} 成如下分块矩阵或向量:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix}, \hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 & \hat{P}_2 \\ \hat{P}_2^T & \hat{P}_3 \end{bmatrix}, \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 & \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_2^T & \hat{Q}_3 \end{bmatrix}.$$

其中: $\hat{x}_1 \in R^{\gamma \times 1}$, $\hat{A}_{11} \in R^{\gamma \times \gamma}$, $\hat{B}_1 \in R^{\gamma \times m}$, $\hat{D}_1 \in R^{\gamma \times k}$, $\hat{Q}_1, \hat{P}_1 \in R^{\gamma \times \gamma}$. 假设 $\hat{K} = \hat{P}_3^{-1} \hat{P}_2^T$, 根据式(7)的第2个方程, 可以得到

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_1 & \hat{P}_2 \\ \hat{P}_2^T & \hat{P}_3 \end{bmatrix} \hat{D} = \hat{C}_a^T \hat{G}^T = \begin{bmatrix} W^T \\ 0 \end{bmatrix} \hat{G}^T = \begin{bmatrix} I_\gamma \\ 0 \end{bmatrix} W^T \hat{G}^T,$$

因此有 $[\hat{P}_2^T \ \hat{P}_3] \hat{D} = 0$. 左乘 \hat{P}_3^{-1} , 可得 $[\hat{K} \ I_{n-\gamma}] \times \hat{D} = 0$. 取等价变换

$$\varsigma = \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\gamma & 0 \\ \hat{K} & I_{n-\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}.$$

其中: $\varsigma_1 \in R^{\gamma \times 1}$, $\varsigma_2 \in R^{(n-\gamma) \times 1}$. 则系统(6)等价于

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_1 = (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{K})\varsigma_1 + \hat{A}_{12}\varsigma_2 + \hat{B}_1 u + \hat{D}_1 \eta, \\ \dot{\varsigma}_2 = (\hat{A}_{22} + \hat{K}\hat{A}_{12})\varsigma_2 + [\hat{K}(\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{K}) + \hat{A}_{21} - \hat{A}_{22}\hat{K}]\varsigma_1 + [\hat{K} \ I_{n-\gamma}] \hat{B} u, \\ y_a = W\varsigma_1. \end{cases} \quad (8)$$

定理 1 假设辅助输出 y_a 是可测的, 则在假设1和假设3成立的情况下, 系统

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_2 = (\hat{A}_{22} + \hat{K}\hat{A}_{12})\varsigma_2 + [\hat{K}(\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{K}) + \hat{A}_{21} - \hat{A}_{22}\hat{K}]W^{-1}y_a + [\hat{K} \ I_{n-\gamma}] \hat{B} u, \\ \hat{x} = S^T \begin{bmatrix} W^{-1}y_a \\ \hat{\varsigma}_2 - \hat{K}W^{-1}y_a \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

是系统(1)的降维观测器, 能渐近估计系统(1)的状态.

证明 根据式(8)的第2式和(9)的第1式, 可以

得到观测器误差动态方程

$$\dot{\hat{\varsigma}}_2 = (\hat{A}_{22} + \hat{K}\hat{A}_{12})\hat{\varsigma}_2, \quad (10)$$

其中 $\hat{\varsigma}_2 = \varsigma_2 - \hat{\varsigma}_2$. 注意到 $\hat{C}_a = [W \ 0]$, 可得式(7)的第1个方程的第2行和第2列相交的矩阵块满足

$$(\hat{A}_{22} + \hat{K}\hat{A}_{12})^T \hat{P}_3 + \hat{P}_3(\hat{A}_{22} + \hat{K}\hat{A}_{12}) = -\hat{Q}_3,$$

故基于 Lyapunov 稳定性线性理论, 误差动态系统(10)是稳定的. 基于 ς_2 的估计, 可得原系统(1)的状态估计为

$$\hat{x} = S^T \hat{\hat{x}} = \begin{bmatrix} I_\gamma & 0 \\ \hat{K} & I_{n-\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \hat{\hat{\varsigma}} = S^T \begin{bmatrix} I_\gamma & 0 \\ \hat{K} & I_{n-\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W^{-1}y_a \\ \hat{\hat{\varsigma}}_2 \end{bmatrix} = S^T \begin{bmatrix} W^{-1}y_a \\ \hat{\hat{\varsigma}}_2 - \hat{K}W^{-1}y_a \end{bmatrix}.$$

由此定理得证. \square

1.4 辅助输出及其微分的估计

在定理1中, 假定辅助输出 y_a 是可测的. 然而, 实际的输出是 y 而不是 y_a . y_a 不仅包含了 y , 而且还包含其他未知变量. 这里, 采用高阶滑模观测器在有限时间内对辅助输出 y_a 及其微分进行精确估计. 得到辅助输出的精确估计之后, 在定理1中用 y_a 的估计取代 y_a , 便可得到系统的状态估计. 即

$$y_a = C_a x = [y_{a1}^T \ y_{a2}^T \ \cdots \ y_{ap}^T]^T,$$

$$y_{ai} = C_{ai} x = [y_{ai,1} \ y_{ai,2} \ \cdots \ y_{ai,\gamma_i}]^T.$$

根据定义1和假设3, 并引入新状态变量 $y_{ai,\gamma_i+1} = \psi_i(x, \eta) = c_i A^{\gamma_i-1} (Ax + D\eta)$, 把 $y_{i1} = y_i$ 作为输出方程, 对 $y_{ai} (i = 1, 2, \cdots, p)$ 微分, 则有

$$\begin{cases} \dot{y}_{ai,1} = y_{ai,2} + c_i B u, \\ \vdots \\ \dot{y}_{ai,\gamma_i} = y_{ai,\gamma_i+1} + c_i A^{\gamma_i-1} B u, \\ \dot{y}_{ai,\gamma_i+1} = \dot{\psi}_i, \\ y_{i1} = y_i. \end{cases} \quad (11)$$

其中, 由假设2可知 $\dot{\psi}_i$ 未知但范数有界.

对于系统(11), 考虑如下的高阶滑模观测器^[20]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}}_{ai,1} = \hat{y}_{ai,2} - w_{i,1} + c_i B u, \\ \vdots \\ \dot{\hat{y}}_{ai,\gamma_i} = \hat{y}_{ai,\gamma_i+1} - w_{i,\gamma_i} + c_i A^{\gamma_i-1} B u, \\ \dot{\hat{y}}_{ai,\gamma_i+1} = -w_{i,\gamma_i+1}. \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} w_{i,0} = \hat{y}_{ai,1} - y_{i1}, \\ w_{i,j} = \kappa_{ai,j} |w_{i,j-1}|^{(\gamma_i-j+1)/(\gamma_i-j+2)} \cdot \text{sign}(w_{i,j-1}), \\ j = 1, 2, \cdots, \gamma_i + 1 \text{ 且 } \kappa_{ai,j} > 0 \text{ 是观测器增益.} \end{cases}$$

定理 2 在假设2成立的情况下, 高阶滑模观测器(12)能够在有限时间内对辅助输出向量 y_{ai} 及

其微分进行精确估计. 特别地, 在有限时间内, $\hat{y}_{ai} = [\hat{y}_{ai,1} \cdots \hat{y}_{ai,\gamma_i}]^T$ 是 $y_{ai} = [y_{ai,1} \cdots y_{ai,\gamma_i}]^T$ 的精确估计, 且 $\zeta_{ai} = [\hat{y}_{ai,2} + c_i Bu \cdots \hat{y}_{ai,\gamma_i+1} + c_i A^{\gamma_i-1} Bu]^T$ 和 $\hat{\delta}_a = [\hat{y}_{a1,\gamma_1+1} + c_1 A^{\gamma_1-1} Bu \cdots \hat{y}_{ap,\gamma_p+1} + c_p \times A^{\gamma_p-1} Bu]^T$ 分别为 \dot{y}_{ai} 和 $\delta_a = [\dot{y}_{a1,\gamma_1} \cdots \dot{y}_{ap,\gamma_p}]^T$ 的精确估计.

证明 系统 (11) 和 (12) 之间的误差动态系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_{ai,1} = e_{ai,2} - w_{i,1}, \\ \vdots \\ \dot{e}_{ai,\gamma_i} = e_{ai,\gamma_i+1} - w_{i,\gamma_i}, \\ \dot{e}_{ai,\gamma_i+1} = -w_{i,\gamma_i+1} - \dot{\psi}_i, \end{cases}$$

其中 $e_{ai,j} = \hat{y}_{ai,j} - y_{ai,j}$ ($j = 1, 2, \dots, \gamma_i + 1$). 通过采用与文献 [20] 相似的方法, 选择合适的增益 $\kappa_{ai,j}$ ($j = 1, 2, \dots, \gamma_i + 1$) 可以在有限时间内到达滑模面 $e_{ai,1} = e_{ai,2} = \cdots = e_{ai,\gamma_i+1} = 0$, 即在有限时间内, $\hat{y}_{ai,j}$ 是 $y_{ai,j}$ ($j = 1, 2, \dots, \gamma_i + 1$) 的精确估计. 基于式 (11), 可以得到 $\zeta_{ai,j}$ 是 $\dot{y}_{ai,j}$ 的精确估计, $\hat{\delta}_a$ 是 $\delta_a = [\dot{y}_{a1,\gamma_1} \cdots \dot{y}_{ap,\gamma_p}]^T$ 的精确估计. \square

高阶滑模观测器 (12) 也可写为如下矩阵形式:

$$\dot{\hat{y}}_{ai}^* = \Delta_{\gamma_i} \hat{y}_{ai}^* - w_{\gamma_i} + H_{\gamma_i} u. \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ai}^* &= [\hat{y}_{ai}^T \hat{y}_{ai,\gamma_i+1}]^T = \\ &[\hat{y}_{ai,1} \cdots \hat{y}_{ai,\gamma_i} \hat{y}_{ai,\gamma_i+1}]^T \in R^{\gamma_i+1}, \\ w_{\gamma_i} &= [w_{i,1} \cdots w_{i,\gamma_i} w_{i,\gamma_i+1}]^T \in R^{\gamma_i+1}, \\ \Delta_{\gamma_i} &= \begin{bmatrix} 0_{\gamma_i \times 1} & I_{\gamma_i} \\ 0 & 0_{1 \times \gamma_i} \end{bmatrix} \in R^{(\gamma_i+1) \times (\gamma_i+1)}, \\ H_{\gamma_i} &= [(c_i B)^T \cdots (c_i A^{\gamma_i-1} B)^T \ 0]^T \in R^{(\gamma_i+1) \times m}. \end{aligned}$$

由于在有限时间内 \hat{y}_a 是辅助输出向量 y_a 的精确估计, 基于定理 1 可以得到如下定理.

定理 3 在假设 1 ~ 假设 3 成立的情况下, 系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}}_2 = (\bar{A}_{22} + \bar{K} \bar{A}_{12}) \hat{\zeta}_2 + [\bar{K} (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{K}) + \\ \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22} \bar{K}] W^{-1} \hat{y}_a + [\bar{K} \ I_{n-\gamma}] \bar{B} u, \\ \hat{x} = S^T \begin{bmatrix} W^{-1} \hat{y}_a \\ \hat{\zeta}_2 - \bar{K} W^{-1} \hat{y}_a \end{bmatrix} \end{cases} \quad (14)$$

是系统 (1) 的降维观测器, 可在有限时间内渐近估计系统 (1) 的状态, 其中 \hat{y}_a 由高阶滑模观测器 (12) 给出.

注 2 类似于式 (12) 的高阶滑模观测器也被用来处理辅助输出的估计问题^[18, 21]. 在文献 [12-13] 中, 高阶滑模观测器被直接用作一类仿射非线性系统的未知输入观测器.

1.5 未知输入重构

本节基于上述状态和辅助输出微分的估计, 给出一种未知输入重构方法.

定理 4 在假设 1 ~ 假设 3 成立的情况下, 有

$$\hat{\eta} = (U^T U)^{-1} U^T [\hat{\delta}_a - \tilde{C}_a (A \hat{x} + Bu)]. \quad (15)$$

其中: $\tilde{C}_a = [(c_1 A^{\gamma_1-1})^T \cdots (c_p A^{\gamma_p-1})^T]^T$, $U = \tilde{C}_a D$, $\hat{\eta}$ 是原系统未知输入 η 的渐近最优估计, \hat{x} 由降维观测器 (14) 给出, 而 $\hat{\delta}_a$ 由高阶滑模观测器 (12) 给出.

证明 由式 (11) 中 $\dot{y}_{ai,\gamma_i} = y_{ai,\gamma_i+1} + c_i A^{\gamma_i-1} Bu$, 得

$$\begin{aligned} \dot{y}_{ai,\gamma_i} &= c_i A^{\gamma_i-1} (Ax + D\eta) + c_i A^{\gamma_i-1} Bu = \\ &c_i A^{\gamma_i-1} (Ax + Bu) + c_i A^{\gamma_i-1} D\eta, \end{aligned}$$

或 $c_i A^{\gamma_i-1} D\eta = \dot{y}_{ai,\gamma_i} - c_i A^{\gamma_i-1} (Ax + Bu)$. 上述 p 个方程 ($i = 1, 2, \dots, p$) 可写为矩阵方程 $U\eta = \delta_a - \tilde{C}_a \times (Ax + Bu)$. 因 $\text{rank} U = \text{rank} \tilde{C}_a D = \text{rank} C_a D = \text{rank} D = k$, 即 U 是列满秩矩阵, 故 $U^T U$ 是可逆的. 因此未知输入向量 η 满足

$$\eta = (U^T U)^{-1} U^T [\delta_a - \tilde{C}_a (Ax + Bu)]. \quad (16)$$

式 (15) 和 (16) 之间的误差方程为

$$\tilde{\eta} = (U^T U)^{-1} U^T [\tilde{\delta}_a - \tilde{C}_a A \tilde{x}].$$

其中: $\tilde{\eta}(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$, $\tilde{\delta}_a(t) = \delta_a(t) - \hat{\delta}_a(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. 因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_a(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\eta}(t) = 0$. \square

2 结论的提升

下面考虑同时具有未知输入和可测噪声的线性系统. 基于前节的结论, 给出处理这类系统的方法, 提出相应的未知输入和可测噪声同时重构方法. 为此, 考虑如下具有可测噪声系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D\eta, \\ y = Cx + Fd. \end{cases} \quad (17)$$

其中: $d(t) \in R^q$ 是可测噪声向量, x, y, u 和 η 定义与系统 (1) 相同. 假设 $n \geq p \geq q + k$ 且 $\text{rank} F = q$. 对于系统 (17), 作如下假设.

假设 4 对于所有 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 下式成立:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & D & 0 \\ C & 0 & F \end{bmatrix} = n + k + q. \quad (18)$$

假设 5 系统状态 $x(t)$ 、未知输入 $\eta(t)$ 、可测噪声 $d(t)$ 及其微分范数有界.

引入状态向量 $z \in R^p$ 且满足下述微分方程:

$$\dot{z} = A_d z - A_d y, \quad (19)$$

其中 $A_d \in R^{p \times p}$ 是 Hurwitz 矩阵且非奇异. 增维向量 $\bar{x} = [x^T \ z^T]^T$, 则原系统 (17) 和 (19) 可扩展为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u + \bar{E} \phi, \\ z = \bar{C} \bar{x}. \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -A_d C & A_d \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & -A_d F \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [0 \ I_p], \phi = [\eta^T \ d^T]^T.$$

向量 ϕ 由原系统 (17) 的未知输入向量 η 和可测噪声向量 d 组成, 并被看作增维系统 (20) 的未知输入.

注 3 对于高频信号的干扰, 高增益滑模观测器 (12) 的估计效果不佳. 对此, 本文主要针对低频可测噪声信号和未知干扰进行重构. 如何改进, 使本文方法适用于高频噪声, 是值得进一步考虑的问题.

引理 4 系统 (20) 是最小相位的, 即 $\{\bar{A}, \bar{C}, \bar{E}\}$ 的所有不变零点在左半开复平面内, 或对于所有具有 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} & \bar{E} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} = n + p + k + q \quad (21)$$

成立当且仅当对于所有具有 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 式 (18) 成立.

证明 因 A_d 是非奇异的, 故对于所有具有 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & D & 0 \\ A_d C & 0 & -A_d F \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & D & 0 \\ C & 0 & -F \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & D & 0 \\ C & 0 & F \end{bmatrix} = n + k + q$$

成立. 又因为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} & \bar{E} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & 0 & D & 0 \\ A_d C & sI - A_d & 0 & -A_d F \\ 0 & I_p & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & D & 0 \\ A_d C & 0 & -A_d F \end{bmatrix} + p,$$

可以推断, 对于所有具有 $\text{Re}(s) \geq 0$ 的复数 s , 式 (18) 成立当且仅当

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} & \bar{E} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} = n + p + k + q$$

成立. \square

由于

$$\text{rank} \bar{E} = \text{rank} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & -A_d F \end{bmatrix} = k + q,$$

$$\text{rank}(\bar{C}\bar{E}) = \text{rank}[0 \ -A_d F] = q,$$

对于增维系统 (20), 观测器匹配条件 $\text{rank} \bar{E} = \text{rank}(\bar{C}\bar{E})$ 不成立.

由引理 4 可知, 增维系统 (20) 满足 UIO 设计的最

小相位系统条件, 但是观测器匹配条件并不满足. 对于增维系统 (20), 采用类似于 1.2~1.5 节中状态估计和未知输入重构的处理方法构造辅助输出, 用以估计辅助输出 z_a 及其微分的高阶滑模观测器

$$\dot{\hat{z}}_{ai}^* = \Delta_{\gamma_i} \hat{z}_{ai}^* - w_{\gamma_i} + H_{\gamma_i} u. \quad (22)$$

其中

$$\hat{z}_{ai}^* = [\hat{z}_{ai}^T \ \hat{z}_{ai, \gamma_i+1}^T]^T =$$

$$[\hat{z}_{ai, 1} \ \cdots \ \hat{z}_{ai, \gamma_i} \ \hat{z}_{ai, \gamma_i+1}]^T \in R^{\gamma_i+1},$$

$$w_{\gamma_i} = [w_{i, 1} \ \cdots \ w_{i, \gamma_i} \ w_{i, \gamma_i+1}]^T \in R^{\gamma_i+1},$$

$$\Delta_{\gamma_i} = \begin{bmatrix} 0_{\gamma_i \times 1} & I_{\gamma_i} \\ 0 & 0_{1 \times \gamma_i} \end{bmatrix} \in R^{(\gamma_i+1) \times (\gamma_i+1)},$$

$$H_{\gamma_i} = [(c_i \bar{B})^T \ \cdots \ (c_i \bar{A}^{\gamma_i-1} \bar{B})^T \ 0] \in R^{(\gamma_i+1) \times m}.$$

利用高阶滑模观测器 (22) 得到辅助输出及其微分的估计之后, 基于定理 3 和定理 4, 可得如下结论.

定理 5 在假设 3~假设 5 成立的情况下, 系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}}_2 = (\bar{A}_{22} + \bar{K} \bar{A}_{12}) \hat{\zeta}_2 + [\bar{K}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{K}) + \\ \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22} \bar{K}] W^{-1} \hat{z}_a + [\bar{K} \ I_{n+p-\gamma}] \bar{B} u, \\ \hat{x} = S^T \begin{bmatrix} W^{-1} \hat{z}_a \\ \hat{\zeta}_2 - \bar{K} W^{-1} \hat{z}_a \end{bmatrix}, \\ \hat{x} = [I_n \ 0_{n \times p}] \hat{\hat{x}} \end{cases} \quad (23)$$

是系统 (17) 或 (20) 的降维观测器.

定理 6 在假设 3~假设 5 成立的情况下, 有

$$\hat{\phi} = (U^T U)^{-1} U^T [\hat{\delta}_a - \tilde{C}_a (\bar{A} \hat{x} + \bar{B} u)], \quad (24)$$

$$\hat{\eta} = [I_k \ 0_{k \times q}] \hat{\phi}, \quad (25)$$

$$\hat{d} = [0_{q \times k} \ I_q] \hat{\phi}. \quad (26)$$

其中

$$\tilde{C}_a = [(c_1 \bar{A}^{\gamma_1-1})^T \ \cdots \ (c_p \bar{A}^{\gamma_p-1})^T]^T,$$

$$\hat{\delta}_a = [\hat{y}_{a1, \gamma_1+1} + c_1 \bar{A}^{\gamma_1-1} \bar{B} u \ \hat{y}_{a2, \gamma_2+1} + \\ c_2 \bar{A}^{\gamma_2-1} \bar{B} u \ \cdots \ \hat{y}_{ap, \gamma_p+1} + c_p \bar{A}^{\gamma_p-1} \bar{B} u]^T,$$

$\hat{\delta}_a$ 是 $\delta_a = [\hat{z}_{a1, \gamma_1} \ \hat{z}_{a2, \gamma_2} \ \cdots \ \hat{z}_{ap, \gamma_p}]^T$ 的精确估计, $\hat{\phi}$ 是增维系统未知输入向量 $\phi = [\eta^T \ d^T]^T$ 的最优估计, $U = \tilde{C}_a \bar{E}$. 于是可知 $\hat{\eta}$ 和 \hat{d} 分别是系统 (18) 中未知输入 η 和可测噪声 d 的渐近最优估计.

注 4 文献 [18] 和 [19] 在突破观测器匹配条件的情况下实现了状态和未知输入的同时估计, 但没有考虑可测噪声. 本文主要设计思想来源于文献 [18-19], 但在技术处理上具有根本的区别. 更进一步, 本文所提方法能够同时重构未知输入和可测噪声, 所以本文的工作是对文献 [18-19] 结论的提升.

3 仿真研究

3.1 系统描述

通过一个具有未知输入和可测噪声的 VTOL 飞

行器模型^[22]来表明本文方法的实用性. 模型如下:

$$A = \begin{bmatrix} -9.9477 & -0.7476 & 0.2632 & 5.0337 \\ 52.1659 & 2.7452 & 5.5532 & -24.4221 \\ 26.0992 & 2.6361 & -4.1975 & -19.2774 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, F = [0 \ 1 \ 1]^T.$$

其中: $x_1 \sim x_4$ 分别为横向速度、纵向速度、滚转角速度和滚转角, u_1 和 u_2 分别为总变距控制和纵向周期俯仰角控制.

对于式(19), 选择 $A_d = -20I_3$, 可以得到增维系统(20)的系数矩阵 \bar{A} 、 \bar{B} 、 \bar{C} 和 \bar{E} . 不难证明, 观测器匹配条件 $\text{rank} \bar{E} = \text{rank}(\bar{C}\bar{E})$ 是不满足的.

3.2 辅助输出构造及状态估计

对于增维系统(20), 其向量相对阶 $(r_1, r_2, r_3) = (3, 1, 1)$. 假如选择 $\gamma_1 = r_1 = 3$, $\gamma_2 = r_2 = 1$ 和 $\gamma_3 = r_3 = 1$, 则有

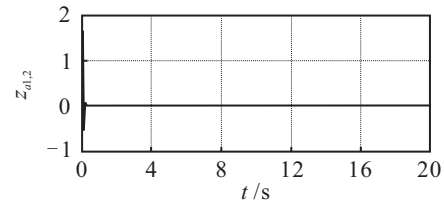
$$C_a = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \bar{A} \\ c_1 \bar{A}^2 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -598.954 & -14.952 & 5.264 & 100.674 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对于增维辅助输出

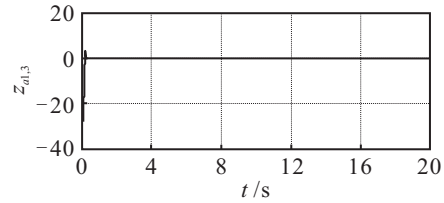
$$z_a = C_a \bar{x} = [z_{a1}^T \ z_{a2}^T \ z_{a3}^T]^T = [z_1 \ z_{a1,2} \ z_{a1,3} \ z_2 \ z_3]^T,$$

由于 z_a 包含未知变量 $z_{a1,2}$ 和 $z_{a1,3}$, 它们需要由高阶滑模观测器(22)中的状态 $\hat{z}_{a1,2}$ 和 $\hat{z}_{a1,3}$ 进行精确估计. 初值设定为 $\hat{z}_{a1,2}(0) = -0.2$ 和 $\hat{z}_{a1,3}(0) = -0.5$, 其估计误差如图1所示. 由图1可以看出, 估计效果是满意的. 在仿真时, 输入 $u = 0$.

对于增维辅助输出 $z_a = C_a \bar{x}$, 容易证明观测器匹配条件 $\text{rank} \bar{E} = \text{rank}(C_a \bar{E})$ 成立. 本例中, 因增维系统维数为 $n + p = 7$, 总相对阶 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 5$, 故降维观测器(23)的维数为2. 根据矩阵 \hat{A} , 可以得到 \hat{A}_{11} 、 \hat{A}_{12} 、 \hat{A}_{21} 和 \hat{A}_{22} . 仿真中设置初始值 $\varsigma_{2,1}(0) =$



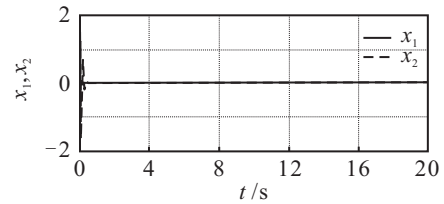
(a) $z_{a1,2}$ 的估计误差



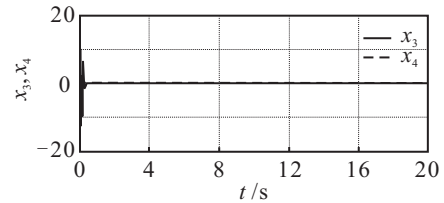
(b) $z_{a1,3}$ 的估计误差

图1 辅助输出的估计误差

-0.3 和 $\varsigma_{2,2}(0) = -0.2$, 状态估计误差曲线如图2所示. 由图2可以看出, 状态估计效果令人满意.



(a) x_1, x_2 的估计误差



(b) x_3, x_4 的估计误差

图2 状态估计误差

3.3 未知输入和可测噪声重构

由于高阶滑模观测器(22)提供了 $\hat{z}_{a1,3}$ 、 $\hat{z}_{a2,1}$ 和 $\hat{z}_{a3,1}$ 的精确估计, 未知输入和可测噪声的重构可以通过式(24)~(26)进行计算. 假设未知输入和可测噪声分别为 $\eta = 3 \cos(3t)$ 和 $d = 0.3 \sin(3t) + 0.2 \cos(2t)$, 则对于未知输入 η 和可测噪声 d 的重构曲线分别如图3和图4所示, 由图可以看出其满意的重构效果.

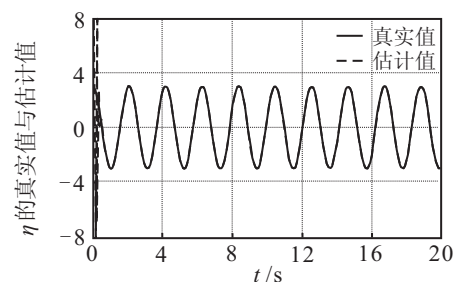
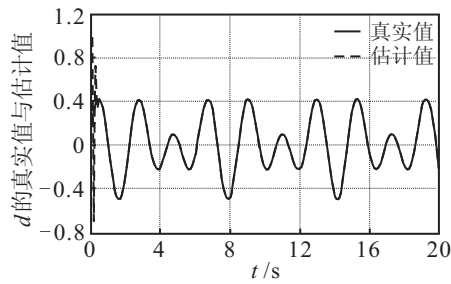


图3 未知输入 η 的重构

图4 可测噪声 d 的重构

4 结 论

本文首先针对仅有未知输入的线性系统,对观测器匹配条件不成立情况下的状态估计和未知输入重构问题进行了研究,通过构造辅助输出并利用高阶滑模观测器对辅助输出及其微分进行精确估计;然后设计降维观测器对状态进行估计;最后,针对同时具有未知输入和可测噪声的线性系统,通过增维的手段,提出了一种能够同时重构未知输入和可测噪声的方法.本文在突破观测器匹配条件的同时,提出了同时未知输入和可测噪声重构的方法.仿真结果验证了本文方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Tu J F, Stein J L. Model error compensation for bearing temperature and preload estimation[J]. *J of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1996, 118(3): 580-585.
- [2] Ng K Y, Tan C P, Edwards C, et al. New results in robust actuator fault reconstruction for linear uncertain systems using sliding mode observers[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(14): 1294-1319.
- [3] Boutayeb M, Darouach M, Rafaralahy H. Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 49(3): 345-349.
- [4] Hostetter G, Meditch J S. Observing systems with unmeasurable inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1973, 18(3): 307-308.
- [5] Corless M, Tu J. State and input estimation for a class of uncertain systems[J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 757-764.
- [6] Darouach M, Zasadzinski M, Xu S J. Full-order observer for linear systems with unknown inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(3): 606-609.
- [7] Luenberger D G. Observers for multivariable systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1966, 11(2): 190-197.
- [8] Trinh H, Ha Q P. State and input simultaneous estimation for a class of time-delay systems with uncertainties[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems – II: Express Briefs*, 2007, 54(6): 527-531.
- [9] Trinh H, Tran T D, Fernando T. Disturbance decoupled observers for systems with unknown inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2397-2402.
- [10] Koenig D, Marx B, Jacquet D. Unknown input observers for switched nonlinear discrete time descriptor system[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(1): 373-379.
- [11] Bejarano F J, Pisano A. Switched observers for switched linear systems with unknown inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2011, 56(3): 681-686.
- [12] Fridman L, Shtessel Y, Edwards C, et al. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(4/5): 399-412.
- [13] Shtessel Y B, Baev S, Edwards C, et al. HOSM observer for a class of non-minimum phase causal nonlinear MIMO systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(2): 543-548.
- [14] Yan X G, Edwards C. Adaptive sliding-mode-observer-based fault reconstruction for nonlinear systems with parametric uncertainties[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2008, 55(11): 4029-4036.
- [15] Gao Z, Wang H. Descriptor observer approaches for multivariable systems with measurement noises and application in fault detection and diagnosis[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(4): 304-313.
- [16] Ahrens J H, Khalil H K. High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach[J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 936-943.
- [17] Sanfelice R G, Praly L. On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise[J]. *Automatica*, 2011, 47(10): 2165-2176.
- [18] Floquet T, Edwards C, Spurgeon S K. On sliding mode observers for systems with unknown inputs[J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, 21(8/9): 638-656.
- [19] Kalsi K, Lian J, Hui S, et al. Sliding-mode observers for system with unknown inputs: A high-gain approach[J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 347-353.
- [20] Levant A. High-order sliding modes: Differentiation and output-feedback control[J]. *Int J of Control*, 2003, 76(9/10): 924-941.
- [21] Fridman L, Davila J, Levant A. High-order sliding-mode observation for linear systems with unknown inputs[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2011, 5(2): 189-205.
- [22] Tan C P, Edwards C. Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(5): 443-463.