第 28 卷 第 9 期
Vol. 28 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2013 年 9 月
Sep. 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 09-1419-04

两种需求模式下报童模型的最优定价-订购联合决策

刘玉霜[1,2], 张纪会[1], 王丽丽[1]

(1. 青岛大学 复杂性科学研究所，山东 青岛 266071；2. 青岛科技大学 数理学院，山东 青岛 266061)

摘　要: 在加法和乘法两种需求模式下, 研究了带有缺货惩罚的单周期报童模型的最优定价-订购联合决策问题, 证明了最优决策的存在性及唯一性的充分条件, 并具体给出了最优决策的解析表达式. 通过数值算例, 验证了结论的有效性, 给出了价格敏感因子对最优决策和期望收益的影响. 研究结果在理论上更具有一般性, 而且为研究多零售商的价格竞争决策问题和供应链契约协调等问题提供了理论依据.

关键词: 报童模型；需求依赖价格；最优定价订购决策

中图分类号: F274；F224.3　　　　**文献标志码:** A

Optimal joint pricing and ordering decisions in newsvendor model with two demand cases

LIU Yu-shuang[1,2], *ZHANG Ji-hui*[1], *WANG Li-li*[1]

(1. Institute of Complexity Science, Qingdao University, Qingdao 266071, China; 2. School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China. Correspondent: LIU Yu-shuang, E-mail: qustlys@126.com)

Abstract: In the standard newsvendor model, the price is assumed to be fixed or exogenously given, so a decision maker facing random demand decides how much of it to order for a single selling period. This paper studies an extension of the newsvendor problem in which stocking quantity and selling price are set simultaneously. The general newsvendor model with lost-sale penalty cost is considered, then the existence and uniqueness of the joint pricing and ordering decisions are proved respectively for two different demand models. Finally, an numerical example is used to verify the results. It is also given that the price sensitivity of demand has an effect on optimal decisions and revenue. These results are not only more general but also may serve as the modeling framework for other related research such as multi-retailer competition and supply chain contract coordination.

Key words: newsvendor model；price-dependent demand；optimal pricing and ordering decisions

0 引　言

基于时间的竞争, 产品生命周期不断缩短, 很多产品 (如电子数码、时装、软件等) 具有季节性产品的特点, 可以采用报童模型来管理这些产品. 经典的报童模型主要集中于单个决策者在随机需求下, 确定最优订购量的问题, 没有考虑销售价格等因素对订购决策的影响. Whitin[1]首次在构建报童问题时引入了销售价格, 建立了具有价格相关的需求函数, 价格成为决策者的决策变量, 在模型求解中他首先固定价格来求得最优的订购量, 然后再求得最优的销售价格. 此后, 联合定价与订购问题便引起了学术界的广泛兴趣.

关于单周期下报童模型的联合定价-订购决策, 主要解决两个问题: 1) 如何描述依赖价格的随机需求; 2) 如何获得联合最优的定价-订购决策.

通常是把依赖价格的随机需求 $D(p,\varepsilon)$ 分解成两部分: 1) 与价格相关的均值需求 $y(p)$; 2) 与价格无关的随机需求扰动项 ε.

一般地, 假设均值需求 $y(p)$ 是关于价格 p 的减函数, 对于不同的产品, $y(p)$ 可以具有不同的表达形式, 同时 ε 服从不同的分布. 常用的两种需求函数是加性需求函数和乘性需求函数. Mills[2-3]考虑需求是线性加函数 ($D(p,\varepsilon) = y(p) + \varepsilon, y(p) = a - bp$), ε 服从均匀分布; Lau 等[4]同样考虑线性加函数模型, 但 ε 服从正态分布; Ernst[5]和 Thowsen[6]考虑的需求是线性加

收稿日期: 2012-04-20；**修回日期:** 2012-05-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70671057)；山东省自然科学基金项目(ZR2010GM006).

作者简介: 刘玉霜(1978−), 女, 讲师, 博士生, 从事供应链管理、风险决策等研究；张纪会(1969−), 男, 教授, 博士生导师, 从事运作管理、物流系统工程等研究.

函数, ε 的累积分布函数属于 PF_2 族. Karlin 等[7]考虑的需求函数是弹性乘函数 ($D(p,\varepsilon) = y(p)\varepsilon,\ y(p) = ap^{-b}$); Nevins[8]考虑的需求是线性乘函数, ε 服从正态分布. Polatoglu[9]同时考虑了加需求函数和乘需求函数, 对于加需求函数, $y(p) = a - bp$, ε 服从均匀分布; 对于乘需求函数, $y(p) = a - bp$, ε 服从指数分布.

Petruzzi 等[10]考虑的是单一产品、单周期的报童模型, 在随机需求下, 单个决策者如何同时确定最优的订购数量 q 和销售价格 p. 他考虑了两种形式的与价格相关的需求函数, 即加法需求模式 $D(p,\varepsilon) = y(p) + \varepsilon$ 和乘法需求模式 $D(p,\varepsilon) = y(p)\varepsilon$, 对以前的结果给予了全面的综述并进行了推广. 然后, 分别在这两种函数形式下考察了报童模型, 并指出这两者之间的差别在于影响需求不确定性的方式的不同, 加法模式下的需求方差与价格 p 无关, 而乘法模式下的需求的方差则是关于价格 p 的函数.

对于单周期报童模型的联合最优定价-订购决策问题, 缺货惩罚的存在将使模型更为复杂, 在数学处理上存在着一定的困难. 本文考虑带有缺货惩罚的单周期报童模型, 在两种需求模式下, 利用随机需求扰动项 ε 具有增的失败率 (IFR) 这一条件, 给出最优决策存在性及唯一性的充分条件, 并具体给出了库存因子 z^* 的解析表达式. 同时, ε 服从均匀分布, 结合具体的数值算例, 给出了报童模型的最优定价和订购量, 以及价格敏感因子对最优决策和期望收益的影响.

1 问题描述

考虑依赖价格的随机需求下的报童模型. 在销售季节来临之前, 报童要依据自身期望收益最大化的原则, 同时决定最优的零售价格和订购数量. 令 c 为单位订购成本, h 为销售季末的单位库存处理成本 (h 可能是负值, 但 $h \geqslant -c$), s 为销售季末缺货时的单位惩罚成本. 于是, 报童模型的收益函数为

$$\begin{aligned}&\Pi(q,p) = \\ &p\min(q,D) - cq - h(q-D)^+ - s(D-q)^+ = \\ &(p-c)q - (p+h)(q-D)^+ - s(D-q)^+. \qquad (1)\end{aligned}$$

令

$$\Lambda(z) = E(z-\varepsilon)^+ = \int_A^z (z-u)f(u)\mathrm{d}u,$$

$$\Theta(z) = E(\varepsilon - z)^+ = \int_z^B (u-z)f(u)\mathrm{d}u.$$

ε 是定义在 $[A,B]$ 上的随机变量, 其均值为 μ. 设 $F(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$ 分别是 ε 的累积分布函数和概率密度函数, 令 $h(x) = f(x)/[1-F(x)]$ 表示随机变量 ε 的失败率, 如果 $h(x)$ 是 x 的增函数, 则称 ε 具有增的失败率 (IFR). 事实上很多分布都具有 IFR, 比如正态、均匀、伽玛和威布尔分布.

2 决策模型

2.1 加法需求模式

在加法需求模式下, $D(p) = y(p) + \varepsilon$, $y(p) = a - bp$, $a > 0$, $b > 0$. 令库存因子 $z = q - y(p)$, 则 $q = y(p) + z$, $(q-D)^+ = (z-\varepsilon)^+$, $(D-q)^+ = (\varepsilon - z)^+$.

式 (1) 的期望收益函数为

$$\begin{aligned}&\pi(z,p) = \\ &(p-c)(y(p)+z) - (p+h)\Lambda(z) - s\Theta(z). \qquad (2)\end{aligned}$$

于是, 确定最优零售价格 p^* 和最优订购量 q^* 的问题将转化为确定 (p^*, z^*).

定理 1 在加法需求模式下, $D(p,\varepsilon) = a - bp + \varepsilon$, 对于任意 $z\ (A \leqslant z \leqslant B)$, 存在唯一最优的零售价格

$$p^* = p(z) = \frac{a + bc + z - \Lambda(z)}{2b}, \qquad (3)$$

而且, 如果 $a - bc + 2bs + A > 0$, 且 ε 具有 IFR, 则 z^* 可以由下式唯一确定:

$$F(z) = \frac{a - bc + 2bs + z - \Lambda(z)}{a + bc + 2bh + 2bs + z - \Lambda(z)}. \qquad (4)$$

证明 给定 z, 将式 (2) 关于 p 分别求一阶和二阶导数, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \pi(z,p)}{\partial p} = a - bp + z - b(p-c) - \Lambda(z) = \\ &\qquad a + bc + z - \Lambda(z) - 2bp, \qquad (5)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \pi(z,p)}{\partial p^2} = -2b < 0.$$

所以, 对于任何 $z\ (A \leqslant z \leqslant B)$, 供应链存在唯一最优的零售价格, 即

$$p^* = p(z) = \frac{a + bc + z - \Lambda(z)}{2b},$$

将 p^* 代入式 (2), 有

$$\begin{aligned}&\pi(z,p(z)) = \\ &(p^*-c)(y(p^*)+z) - (p^*+h)\Lambda(z) - s\Theta(z),\end{aligned}$$

由链式求导法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}\pi(z,p(z))}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial \pi(z,p(z))}{\partial p^*}\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}z} + \frac{\partial \pi(z,p(z))}{\partial z}. \qquad (6)$$

由 $p(z)$ 的最优性, 可得式 (6) 中第 1 项为 0, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\pi(p(z),z)}{\mathrm{d}z} = \\ &(p^*-c) - (p^*+h)F(z) + s(1-F(z)) = \\ &\frac{1}{2b}g(z),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}g(z) = {}& a - bc + 2bs + z - \Lambda(z) - (a + bc + \\ &2bh + 2bs + z - \Lambda(z))F(z).\end{aligned}$$

下面证明 z^* 存在且唯一.

因为 $1/(2b) > 0$, 所以 z^* 满足 $g(z^*) = 0$, 即得式 (4). 下面只需证明 z^* 是唯一的, 即证 $g(z)$ 在 $[A,B]$ 上是单峰函数.

$g(z)$ 在 $[A,B]$ 上是连续的, 且 $g(A)=a-bc+2bs+A$, $g(B)=-2b(c+h)<0$, 有

$$g'(z)=[1-F(z)]\{1-F(z)-h(z)[a+bc+2bh+2bs+z-\Lambda(z)]\},$$

$$g''(z)=-h(z)g'(z)+[1-F(z)]\{-f(z)-h'(z)[a+bc+2bh+2bs+z-\Lambda(z)]-h(z)[1-F(z)]\}.$$

一方面, 若 $a-bc+2bs+A>0$, 则 $g(z)$ 在 $[A,B]$ 上至少有一个零点; 另一方面, 若 ε 具有 IFR, 即 $h'(z)>0$, 当 $g'(z)=0$ 时, 则有 $g''(z)<0$. 这意味着 $g(z)$ 在 $[A,B]$ 上是单峰函数, 所以存在唯一最优的 z^*. □

2.2 乘法需求模式

在乘法模式下, $D(p,\varepsilon)=y(p)\varepsilon$, $y(p)=ap^{-b}$, $a>0$, $b>1$. 令库存因子 $z=q/y(p)$, 则 $q=y(p)z$, $(q-D)^+=y(p)(z-\varepsilon)^+$, $(D-q)^+=y(p)(\varepsilon-z)^+$.

式 (1) 的期望收益函数为

$$\pi(z,p)=y(p)\{(p-c)z-(p+h)\Lambda(z)-s\Theta(z)\}. \tag{7}$$

于是, 确定最优零售价格 p^* 和最优订购量 q^* 的问题将转化为确定 (p^*,z^*).

定理 2　在乘法需求模式下, $D(p,\varepsilon)=ap^{-b}\varepsilon$, 对于任意 z $(A\leqslant z\leqslant B)$, 存在唯一最优的零售价格

$$p^*=p(z)=\frac{b(cz+h\Lambda(z)+s\Theta(z))}{(b-1)(z-\Lambda(z))}, \tag{8}$$

而且, 如果 $b(c+h)-2(h+s)>0$, 且 ε 具有 IFR, 则 z^* 可以由下式唯一确定:

$$\bar{F}(z)=\frac{(b-1)(c+h)(z-\Lambda(z))}{b(cz+h\Lambda(z)+s\Theta(z))+(b-1)(h+s)(z-\Lambda(z))}. \tag{9}$$

证明　给定 z, 对式 (7) 关于 p 求一阶导数, 有

$$\frac{\mathrm{d}\pi(z,p)}{\mathrm{d}p}=\frac{y(p)}{p}\{bcz+bh\Lambda(z)+bs\Theta(z)-(b-1)p[z-\Lambda(z)]\},$$

$$\frac{\mathrm{d}\pi(z,p)}{\mathrm{d}p}=0,$$

当且仅当

$$p^*=p(z)=\frac{b(cz+h\Lambda(z)+s\Theta(z))}{(b-1)(z-\Lambda(z))},$$

而且, 当 $p^*<p(z)$ 时, $\frac{\mathrm{d}\pi(z,p)}{\mathrm{d}p}>0$; 当 $p^*>p(z)$ 时, $\frac{\mathrm{d}\pi(z,p)}{\mathrm{d}p}<0$. 所以, 给定 z, p^* 是最大化 $\pi(z,p)$ 的唯一最优解, 即存在唯一最优的零售价格.

将 p^* 代入式 (7), 有

$$\pi(z,p(z))=y(p^*)\{(p^*-c)z-(p^*+h)\Lambda(z)-s\Theta(z)\}.$$

由链式求导法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}\pi(p(z),z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial\pi(p(z),z)}{\partial p^*}\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}z}+\frac{\partial\pi(p(z),z)}{\partial z}. \tag{10}$$

由 p^* 的最优性, 式 (10) 中第 1 项为 0, 即得

$$\frac{\mathrm{d}\pi(z,p(z))}{\mathrm{d}z}=y(p^*)\{p^*-c-(p^*+h)F(z)+s(1-F(z))\}=\frac{y(p^*)}{(b-1)(z-\Lambda(z))}g(z),$$

其中

$$g(z)=-(b-1)(c+h)[z-\Lambda(z)]+[1-F(z)][b(cz+h\Lambda(z)+s\Theta(z))+(b-1)(h+s)(z-\Lambda(z))].$$

下面证明 z^* 存在且唯一.

因为 $\frac{y(p^*)}{(b-1)(z-\Lambda(z))}>0$, 所以 z^* 满足 $g(z^*)=0$, 即得式 (9). 下面只需证明 z^* 是唯一的, 即证 $g(z)$ 在 $[A,B]$ 上是单峰函数.

$g(z)$ 在 $[A,B]$ 上是连续的, 且

$$g(A)=s(b\mu-A)+cA>0,\ b>1,\mu>A,$$

$$g(B)=-(b-1)(h+c)(B-\Lambda(B))<0,$$

$$g'(z)=(1-F(z))\{-h(z)[b(cz+h\Lambda(z)+s\Theta(z))+(b-1)(h+s)(z-\Lambda(z))]+c-s+(h+s)F(z)\},$$

$$g''(z)=-h(z)g'(z)+(1-F(z))\{-h'(z)[b(cz+h\Lambda(z)+s\Theta(z))+(b-1)(h+s)(z-\Lambda(z))]-h(z)[b(c+h)-2(h+s)(1-F(z))]\}.$$

当 $b(c+h)-2(h+s)>0$ 时, 有 $[b(c+h)-2(h+s)(1-F(z))]>0$ 和 $[b(cz+h\Lambda(z)+s\Theta(z))+(b-1)(h+s)(z-\Lambda(z))]>0$. 又由于假设 ε 具有 IFR, 即 $h'(z)>0$, 则当 $g'(z)=0$ 时, 有 $g''(z)<0$, 意味着 $g(z)$ 在 $[A,B]$ 上是单峰函数, 所以存在唯一最优的 z^*. □

3　数值分析

下面通过数值例子给出两种需求模式下最优定价、最优的订购量, 以及价格敏感因子 b 对最优决策和期望收益的影响.

1) 加法需求模式.

假设 ε 服从 $[-2,2]$ 上的均匀分布, 其他参数设置如下: $a=100$, $b=2$, $c=5$, $h=-2$, $s=3$, 满足 $a-bc+2bs+A>0$. 则分别由式 (4) 和 (3) 计算可得, 最优的库存因子 $z^*=1.5789$, 最优的零售价格 $p^*=27.4945$, 进而最优的订购量 $q^*=46.59$, 最优的期望收益 $\pi=1\,007.1$.

2) 乘法需求模式.

假设ε服从$[0.5, 1.5]$上的均匀分布, 其他参数设置如下: $a = 10\,000$, $b = 1.5$, $c = 5$, $h = -2$, $s = 3$, 满足$b(c + h) - 2(h + s) > 0$. 则分别由式(9)和(8)计算可得, 最优的库存因子$z^* = 1.345\,1$, 最优的零售价格$p^* = 18.362\,2$, 进而最优的订购量$q^* = 170.949\,6$, 最优的期望收益$\pi = 1\,537.1$.

当价格敏感因子b取不同的数值时, 其他参数保持不变. 从表1和表2中可以看出, 两种需求模式下报童模型的最优决策和期望收益均是关于价格敏感因子b的减函数.

表 1　加法需求模式

指标	z^*	p^*	q^*	π
$b = 2$	1.578 9	27.49	46.59	1 007.1
$b = 3$	1.404 7	19.159 3	43.93	596.98
$b = 4$	1.249 6	14.991 2	41.28	395.13

表 2　乘法需求模式

指标	z^*	p^*	q^*	π
$b = 1.5$	1.345 1	18.362 2	170.949 6	1 537.1
$b = 1.8$	1.294 1	13.570 5	118.384	675.064 4
$b = 2$	1.269 0	11.987 2	88.31	405.98
$b = 3$	1.195 8	11.814 0	85.677 7	403.646 0

4 结　论

在加法和乘法两种需求模式下, 研究了带有缺货惩罚的单周期报童模型的联合最优定价-订购决策问题, 给出了最优决策的存在性及唯一性的充分条件. 与文献[10]中的结论有3点不同: 1) 唯一性的充分条件, 由ε的失败率$r(\cdot)$满足$2r^2(\cdot) + r'(\cdot) > 0$, 简化为$\varepsilon$具有IFR; 2) 文献[10]在乘法需求模式中, 还要求产品具有足够的价格弹性(即$b \geqslant 2$), 而本文中的定理2不要求具有这一点; 3) 在两种需求模式下, 本文均具体地给出了最优的库存因子z^*的解析表达式, 为数值计算带来很大的方便. 因此, 本文结论在理论上更具有一般性, 而且为研究多零售商的价格竞争决策问题和供应链契约协调等问题提供了理论依据.

本文是在加法和乘法两种需求模式下, 以IFR为条件来研究报童模型的联合最优决策, 能否考虑一般的需求函数, 给出较为简单的条件来保证联合最优决策的存在性和唯一性. 张菊亮[11]和Kocabiyikoğlu等[12]提出的缺货损失率弹性将是一个很好的研究方向.

参考文献(References)

[1] Whitin T M. Inventory control and price theory[J]. Management Science, 1955, 2(1): 61-80.

[2] Mills E S. Uncertainty and price theory[J]. Quartly J of Economics, 1959, 73(1): 116-130.

[3] Mills E S. Price, output and inventory policy[M]. New York: John Wiley, 1962.

[4] Lau H, Lau S. The Newsvendor problem with price-dependent demand distribution[J]. IIE Trans, 1988, 20(2): 168-175.

[5] Ernst R L. A linear inventory model of a monopolistic firm[D]. University of California Berkeley, 1970.

[6] Thowsen G T. A dynamic, nonstationary inventory problem for a price/ quantity setting firm[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1975, 22(3): 461-476.

[7] Karlin S, Carr C R. Prices and optimal inventory policy[C]. Studies in Applied Probability and Management Science. Stanford: Stanford University Press, 1962.

[8] Nevins A J. Some effects of uncertainty: Simulation[J]. Quarterly Journal of Economics, 1966, 80(1): 73-87.

[9] Polatoglu L H. Optimal order quantity and pricing decisions in single period inventory systems[J]. Int J of Production Economics, 1991, 23(1/2/3): 175-185.

[10] Petruzzi N C, Data M. Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions[J]. Operations Research. 1999, 47(2): 183-194.

[11] 张菊亮, 章祥荪, 王耀球. 一般需求函数下报童模型的定价与库存控制[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(9): 20-28.
(Zhang J L, Zhang X S, Wang Y Q. Pricing and inventory control in newsboy's model with general demand function[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2008, 28(9): 20-28.)

[12] Kocabiyikoğlu A, Popescu I. An elasticity approach to the Newsvendor with price-sensitive demand[J]. Operations Research, 2011, 59(2): 301-312.