

文章编号: 1001-0920(2013)10-1583-04

## 基于直觉模糊数的GM(1,1)预测模型

李鹏<sup>1</sup>, 刘思峰<sup>2</sup>, 朱建军<sup>2</sup>

(1. 江苏科技大学 经济管理学院, 江苏 镇江 212003; 2. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

**摘要:** 在灰色系统理论研究领域, 较少见到以直觉模糊数为建模对象的预测模型的研究. 鉴于此, 运用直觉模糊数的记分函数和犹豫度构建直觉模糊数序列GM(1,1)预测模型, 得出直觉模糊数的隶属度和非隶属度, 从而实现了直觉模糊数的预测. 通过算例分析表明了所提出方法的合理性和可行性, 且直觉模糊数预测模型能够丰富灰色系统理论体系, 扩展灰色预测模型的应用范围.

**关键词:** 直觉模糊数; 预测模型; 灰色系统理论; 记分函数

**中图分类号:** N941.5

**文献标志码:** A

## GM(1,1) prediction model based on intuitionistic fuzzy numbers

LI Peng<sup>1</sup>, LIU Si-feng<sup>2</sup>, ZHU Jian-jun<sup>2</sup>

(1. College of Economics and Management, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China; 2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: LI Peng, E-mail: jellyok@126.com)

**Abstract:** In the field of grey system theory, there is no the research on the grey prediction model based on the sequences of intuitionistic fuzzy numbers. The GM(1,1) grey prediction model of the sequences of intuitionistic fuzzy numbers is constructed by utilizing the score function and hesitant degree of intuitionistic fuzzy numbers. Then the membership function and the non-membership of intuitionistic fuzzy numbers are obtained by the prediction model. By using the method, the prediction of intuitionistic fuzzy numbers can be realized. Finally, an example shows the feasibility and effectiveness of the proposed method. The grey prediction model of intuitionistic fuzzy numbers enriches the grey system theory and extends the applied scope of the grey prediction model.

**Key words:** intuitionistic fuzzy numbers; prediction model; grey system theory; score function

## 0 引言

GM(1,1)模型是灰色系统理论中应用最广泛的模型, 已成功地解决了许多实际问题. 但从目前的研究情况看, 其建模前提主要是实数序列, 大部分研究集中在提高建模和预测精度<sup>[1-4]</sup>以及如何扩展模型的应用范围<sup>[5-8]</sup>. 随着社会和科技的进步, 遇到的问题越来越复杂, 表征信息的方式也多种多样, 传统的以实数序列为基础的灰色预测模型难以满足人们的实际需要. 自Zadeh<sup>[9]</sup>提出模糊集理论以来, 该理论已在各领域得到广泛应用. Atanassov<sup>[10]</sup>于1986年提出了直觉模糊集的概念. 目前, 直觉模糊集主要应用在多属性决策方面. Chen等<sup>[11]</sup>提出了记分函数, 并运用记分

函数解决Vague集多属性决策问题. Bustince等<sup>[12]</sup>指出Vague集等价于直觉模糊集. Li等<sup>[13]</sup>提出GOWA算子, 并在此基础上构建一种直觉模糊决策模型. Ludmila等<sup>[14]</sup>运用D-S证据理论解决在IFWA算子中不能处理特殊直觉模糊数的缺陷. 这些研究促进了直觉模糊集理论的完善和发展.

预测和决策是相辅相成的, 对于直觉模糊数的预测问题, 相关研究较为少见, 最直观的思路是根据直觉模糊数的隶属度、非隶属度和犹豫度分别建立灰色预测模型, 最后得到预测的直觉模糊数. 但这样处理的结果是破坏了直觉模糊数的完整性和独立性, 使最后的预测结果不准确, 甚至出现隶属度、非隶属度与

收稿日期: 2012-06-21; 修回日期: 2012-11-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71171112, 70701017, 71171101); 国家社科基金项目(11BGL039); 江苏省研究生教育教学改革研究与实践课题项目(JGLX13.069); 江苏科技大学学校人文社科项目(633041204); 江苏科技大学研究生教改与实践课题项目(104080602).

作者简介: 李鹏(1980—), 男, 博士, 从事决策分析、灰色系统理论的研究; 刘思峰(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事数量经济学、灰色系统理论等研究.

犹豫度之和不等于 1. 由于直觉模糊数包括隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个参数, 合理地构建预测模型难度较大.

刘思峰等<sup>[15]</sup>提出了灰度和核的定义, 并建立了一系列公理和性质. 受此启发, 根据直觉模糊数本身的含义和性质, 本文运用直觉模糊数的记分函数和犹豫度, 并在不破坏数据的完整性和独立性的基础上构建了直觉模糊数预测模型. 本文的创新之处在于: 1) 运用直觉模糊数的记分函数和犹豫度的特点和性质, 并结合灰色系统理论构建出一种直觉模糊数预测方法, 通过此预测方法可以实现直觉模糊数的预测, 丰富和发展了直觉模糊集理论; 2) 由于现有灰色预测方法主要以实数为对象建立预测模型, 应用范围较为有限, 本文提出的直觉模糊数预测方法将建模对象扩展为直觉模糊数, 从而扩展了灰色预测模型的应用范围, 丰富了灰色系统理论体系.

## 1 直觉模糊数

**定义 1**<sup>[10]</sup> (直觉模糊集) 设  $X$  为一个给定论域, 则  $X$  上的一个直觉模糊集为  $A = \{ \langle x, u_A(x), v_A(x) \rangle | x \in X \}$ . 其中:  $u_A(x)$  和  $v_A(x)$  分别为  $X$  中元素  $x$  属于  $X$  的隶属度和非隶属度,  $u_A: X \rightarrow [0, 1]$ ,  $v_A: X \rightarrow [0, 1]$ , 且满足条件  $0 \leq u_A(x) + v_A(x) \leq 1, x \in X$ . 称  $\pi_A(x) = 1 - u_A(x) - v_A(x)$  为  $X$  中元素  $x$  属于  $A$  的犹豫度.

$X$  中的元素  $x$  属于  $A$  的隶属度和非隶属度所组成的有序对  $\langle u_A(x), v_A(x) \rangle$  称为直觉模糊数. 为了方便起见, 将直觉模糊数简记为  $\langle u, v \rangle$ , 犹豫度简记为  $\pi$ .

**定义 2**<sup>[11]</sup> 对于直觉模糊数  $\alpha = \langle u, v \rangle$ , 定义  $S(\alpha) = u - v$  为直觉模糊数  $\alpha$  的记分函数, 其中  $S(\alpha) \in [-1, 1]$ .

对于某直觉模糊数  $\alpha = \langle u, v \rangle$  而言, 根据投票模型可以看出, 其犹豫度  $\pi$  的含义是既不赞成又不反对的部分, 属于灰色系统理论中“灰”的部分.

**命题 1** 设直觉模糊数  $\alpha = \langle u, v \rangle$ , 直觉模糊数与记分函数  $S(\alpha)$  和犹豫度  $\pi(\alpha)$  所包含的信息相同.

**证明** 给出直觉模糊数  $\alpha = \langle u, v \rangle$ , 可以惟一地得到记分函数  $S(\alpha) = u - v$  和犹豫度  $\pi(\alpha) = 1 - u - v$ , 相反, 给出记分函数  $S(\alpha) = u - v$  和犹豫度  $\pi(\alpha) = 1 - u - v$  也可以惟一得到直觉模糊数的隶属度  $u$  和非隶属度  $v$ , 所以直觉模糊数与记分函数  $S(\alpha)$  和犹豫度  $\pi(\alpha)$  所包含的信息相同.  $\square$

**例 1** 已知直觉模糊数  $\alpha = \langle 0.6, 0.3 \rangle$ , 则可以计算出记分函数  $S(\alpha) = 0.3$ , 犹豫度  $\pi(\alpha) = 0.1$ ; 反之, 已知记分函数  $S(\alpha) = 0.4$ , 犹豫度  $\pi(\alpha) = 0.2$ , 则可得直觉模糊数  $\alpha = \langle 0.6, 0.2 \rangle$ .

由命题 1 可知, 直觉模糊数  $\alpha$  完全可以由记分函数  $S(\alpha)$  和犹豫度  $\pi(\alpha)$  确定. 根据文献 [15], 有以下命题成立.

**命题 2** 两个直觉模糊数进行加、减、乘、除运算时, 灰度 (犹豫度) 不减. 特别地, 一个实数跟直觉模糊数进行加、减、乘、除运算时, 运算结果的灰度 (犹豫度) 与直觉模糊数的灰度 (犹豫度) 相同.

## 2 直觉模糊数预测模型的建立

由于直觉模糊数包含隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个参数, 若直接运用隶属度序列、非隶属度序列和犹豫度序列分别建立预测模型, 则会破坏直觉模糊数的完整性和独立性. 由命题 1 和命题 2, 考虑运用直觉模糊数的记分函数和犹豫度建立合适的 GM(1,1) 预测模型. 思路是先运用直觉模糊数的记分函数序列实现记分函数的预测, 然后运用直觉模糊数的犹豫度推导出直觉模糊数的隶属度和非隶属度.

设直觉模糊数序列  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 记分函数序列为  $S(\alpha) = (S(\alpha_1), S(\alpha_2), \dots, S(\alpha_n))$ , 由  $S(\alpha_k) + \hat{a}z^{(1)}(k) = b$ , 得到  $S(\alpha) = (S(\alpha_1), S(\alpha_2), \dots, S(\alpha_n))$  的时间响应函数为

$$S^{(1)}(\hat{\alpha}_{k+1}) = \left( S(\alpha_1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a},$$

其中  $z^{(1)}(k) = (S(\alpha_k) + S(\alpha_{k-1}))/2$ . 其还原值为

$$S(\hat{\alpha}_{k+1}) = (1 - e^a) \left( S(\alpha_1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak}. \quad (1)$$

式 (1) 即为直觉模糊数的记分函数的 GM(1,1) 预测模型.

根据命题 2, 有

$$\pi(\hat{\alpha}_{k+1}) = \max\{\pi(\alpha_1), \pi(\alpha_2), \dots, \pi(\alpha_n)\}. \quad (2)$$

根据直觉模糊数的犹豫度定义有

$$\pi(\hat{\alpha}_{k+1}) = 1 - \hat{u}_{k+1} - \hat{v}_{k+1}. \quad (3)$$

另外, 根据直觉模糊数记分函数的定义有

$$\hat{u}_{k+1} - \hat{v}_{k+1} = S(\hat{\alpha}_{k+1}). \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 得到

$$\begin{aligned} \hat{u}_{k+1} &= \frac{1 + S(\hat{\alpha}_{k+1}) - \pi(\hat{\alpha}_{k+1})}{2}, \\ \hat{v}_{k+1} &= \frac{1 - S(\hat{\alpha}_{k+1}) - \pi(\hat{\alpha}_{k+1})}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) 即为直觉模糊数预测模型.

## 3 模型的使用范围

本文提出的方法是先对直觉模糊数的记分函数进行预测, 然后根据犹豫度的性质去推导出直觉模糊数的隶属度和非隶属度, 因此, 适用范围主要取决于核序列 GM(1,1) 预测模型的适用范围.

**命题 3** 当直觉模糊数预测模型的发展系数  $|a| \geq 2$  时无意义.

根据 GM(1,1) 预测模型的应用范围<sup>[16]</sup>, 可以得到

如下命题.

**命题 4** 对于直觉模糊数预测模型, 以下结论成立:

1) 当  $a \geq -0.3$  时, 模型可用于中长期直觉模糊数预测;

2) 当  $-0.5 \leq a \leq -0.3$  时, 模型可用于短期直觉模糊数预测;

3) 当  $-0.8 \leq a \leq -0.5$  时, 模型用于短期直觉模糊数预测要谨慎;

4) 当  $-1 \leq a \leq -0.8$  时, 其核预测模型应使用残差修正模型;

5) 当  $a \leq -1$  时, 不宜应用本文提出的模型.

#### 4 直觉模糊数序列的预测方法和步骤

设直觉模糊数序列  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , 预测步骤如下.

Step 1: 计算各直觉模糊数的记分函数和犹豫度.

Step 2: 确定序列犹豫度.

Step 3: 构建直觉模糊数的记分函数序列预测模型, 并计算出  $S(\hat{\alpha}_{k+1})$ .

Step 4: 运用式 (5) 进行预测, 得到

$$\hat{u}_{k+1} = \frac{1 + S(\hat{\alpha}_{k+1}) - \pi(\hat{\alpha}_{k+1})}{2},$$

$$\hat{v}_{k+1} = \frac{1 - S(\hat{\alpha}_{k+1}) - \pi(\hat{\alpha}_{k+1})}{2}.$$

#### 5 算例分析

已知直觉模糊数

$$\alpha_1 = \langle 0.525, 0.375 \rangle, \alpha_2 = \langle 0.545, 0.335 \rangle,$$

$$\alpha_3 = \langle 0.575, 0.375 \rangle, \alpha_4 = \langle 0.56, 0.27 \rangle,$$

$$\alpha_5 = \langle 0.61, 0.31 \rangle$$

构成直觉模糊数序列  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ , 试构建  $\alpha$  的直觉模糊数预测模型, 步骤如下.

Step 1: 计算各直觉模糊数的记分函数和犹豫度. 由定义 2 得到  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  的记分函数分别为 0.15, 0.21, 0.26, 0.29, 0.3. 由定义 3 得到  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  的犹豫度分别为 0.1, 0.12, 0.11, 0.17, 0.08.

Step 2: 根据式 (2) 得到

$$\pi(\hat{\alpha}_{k+1}) = \max\{\pi(\alpha_1), \pi(\alpha_2), \dots, \pi(\alpha_n)\} = 0.17.$$

Step 3: 构建直觉模糊数的记分函数序列预测模型, 由

$$S(\hat{\alpha}_{k+1}) = (1 - e^a) \left( S(\alpha_1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak}$$

得到  $\alpha$  的 GM(1,1) 模型还原式为

$$S(\hat{\alpha}_{k+1}) = 0.2 \times e^{0.11k}.$$

其中:  $a = -0.110, b = 0.195$ .

Step 4: 建立直觉模糊数预测模型, 由

$$\hat{u}_{k+1} = \frac{1 + S(\hat{\alpha}_{k+1}) - \pi(\hat{\alpha}_{k+1})}{2},$$

$$\hat{v}_{k+1} = \frac{1 - S(\hat{\alpha}_{k+1}) - \pi(\hat{\alpha}_{k+1})}{2}.$$

其中

$$S(\hat{\alpha}_{k+1}) = 0.2 \times e^{0.11k},$$

$$\pi(\hat{\alpha}_{k+1}) = \max\{\pi(\alpha_1), \pi(\alpha_2), \dots, \pi(\alpha_n)\} = 0.17.$$

得到

$$\hat{u}_{k+1} = \frac{1 + 0.2 \times e^{0.11k} - 0.17}{2},$$

$$\hat{v}_{k+1} = \frac{1 - 0.2 \times e^{0.11k} - 0.17}{2}.$$

当  $k = 5$  时,  $\hat{u}_6 = 0.588, \hat{v}_6 = 0.242$ , 即  $\alpha_6 = \langle 0.588, 0.242 \rangle$ .

#### 6 结 论

对于直觉模糊数序列预测问题, 本文根据灰色系统理论的思想, 运用直觉模糊数的记分函数和犹豫度建立了 GM(1,1) 灰色预测模型. 以记分函数的预测模型为基础, 利用犹豫度不减的性质和直觉模糊数的含义推导出直觉模糊数的灰色预测模型. 所提出方法计算相对简单, 可以快速、方便地进行直觉模糊数的预测, 丰富和完善了灰色系统理论体系和直觉模糊集理论体系.

#### 参考文献(References)

- [1] 李军亮, 肖新平, 廖锐全. 非等间隔 GM(1,1) 幂模型及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 490-495.  
(Li J L, Xiao X P, Liao R Q. Non-equidistance GM(1,1) power and its application[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2010, 30(3): 490-495.)
- [2] 曾祥艳, 肖新平. GM(1,1) 模型推广方法研究与应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1092-1096.  
(Zeng X Y, Xiao X P. Study on generalization for GM(1,1) model and its application[J]. Control and Decision, 2009, 24(7): 1092-1096.)
- [3] 谢乃明, 刘思峰. GM(n,h) 模型建模序列数据数乘变换特性研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(9): 1294-1299.  
(Xie N M, Liu S F. Research on property of GM(n,h) model under data multiple transformation[J]. Control and Decision, 2009, 24(9): 1294-1299.)
- [4] 谢乃明, 刘思峰. 多变量离散灰色模型及其性质[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(6): 143-150.  
(Xie N M, Liu S F. Research on the discrete grey model of multi-variables and its properties[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2008, 28(6): 143-150.)
- [5] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 变权缓冲算子及其作用强度的研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1218-1222.  
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Study on buffer operators with variable weights and their effect strength to original

- sequence[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(8): 1218-1222.)
- [6] 杨知, 任鹏, 党耀国. 反向累加生成与灰色 GOM(1,1) 模型的优化[J]. *系统工程理论与实践*, 2009, 29(8): 160-164.  
(Yang Z, Ren P, Dang Y G, Grey opposite-direction accumulated generating and optimization of GOM(1,1) model[J]. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2009, 29(8): 160-164.)
- [7] 吴正朋, 刘思峰, 崔立志. 基于不动点的新弱化缓冲算子的研究[J]. *控制与决策*, 2009, 24(12): 1805-1815.  
(Wu Z P, Liu S F, Cui L Z. Study on new weakening buffer operators[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(12): 1805-1815.)
- [8] 米传民, 刘思峰, 吴正朋, 等. 基于反向累积法的强化缓冲算子序列的研究[J]. *控制与决策*, 2009, 24(3): 352-360.  
(Mi C M, Liu S F, Wu Z P, et al. Study on sequence of strengthening buffer operator based on back cumulative-sum method[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(3): 352-360.)
- [9] Zadah L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8: 338-353.
- [10] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [11] Chen S M, Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 67(2): 163-172.
- [12] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 79(3): 403-405.
- [13] Li D F. The GOWA operator based approach to multi-attribute decision making using intuitionistic fuzzy sets[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 53(5): 1182-1196.
- [14] Ludmila Dymova, Pavel Sevastjanov. An interpretation of intuitionistic fuzzy sets in terms of evidence theory: Decision making aspect[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2010, 23(8): 772-782.
- [15] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(2): 312-316.  
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the kernel and the degree of greyness of grey numbers[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(2): 312-316.)
- [16] Liu S F, Deng J L. The range suitable for GM(1,1)[J]. *J of Grey System*, 1999, 11(1): 131-138.

(上接第1582页)

- [8] 孙静, 张承慧, 裴文卉, 等. 考虑铁损的电动汽车用永磁同步电机 Hamilton 镇定控制[J]. *控制与决策*, 2012, 27(12): 1899-1902.  
(Sun J, Zhang C H, Pei W H, et al. Hamiltonian stabilizing control of permanent magnet synchronous motor considering iron loss for electric vehicle[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(12): 1899-1902.)
- [9] 王艳敏, 王常虹, 冯勇. 具有逆变器死区补偿的永磁同步电动机滑模控制[J]. *吉林大学学报*, 2010, 40(4): 1096-1101.  
(Wang Y M, Wang C H, Feng Y. Sliding mode control of permanent magnet synchronous motor with inverter dead-time compensation[J]. *J of Jilin University*, 2010, 40(4): 1096-1101.)
- [10] Jeong Y, Lorenz R D, Jahns T M. Initial rotor position estimation of an interior permanent magnet synchronous machine using carrier-frequency injection methods[J]. *IEEE Trans on Industry Applications*, 2005, 41(1): 38-45.
- [11] Seok J K, Lee J K, Lee D C. Sensorless speed control of nonsalient permanent-magnet synchronous motor using rotor-position-tracking PI controller[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2006, 53(2): 399-405.
- [12] 文建平, 曹秉刚. 无速度传感器的内嵌式永磁同步电机自抗扰控制调速系统[J]. *中国电机工程学报*, 2009, 29(30): 58-61.  
(Wen J P, Cao B G. Active disturbances rejection control speed control system for sensorless IPMSM[J]. *Proc of the CSEE*, 2009, 29(30): 58-61.)
- [13] Sun Kai, Zhao Yan-lei, Shu Qi-fang. A position sensorless vector control system of permanent magnet synchronous motor based on active-disturbance rejection controller[C]. *Int Conf on Mechatronics and Automation*. Changchun, 2009: 3833-3837.
- [14] 刘志刚, 李世华. 基于永磁同步电机模型辨识与补偿的自抗扰控制器[J]. *中国电机工程学报*, 2008, 28(24): 118-123.  
(Liu Z G, Li S H. Active disturbance rejection controller based on permanent magnetic synchronous motor model identification and compensation[J]. *Proc of the CSEE*, 2008, 28(24): 118-123.)