

文章编号: 1001-0920(2013)11-1685-06

线性多智能体系统在固定和切换拓扑下的领航跟随控制

宋 莉, 伍清河, 王 焱, 王寅秋

(北京理工大学 自动化学院, 北京 100081)

摘 要: 研究线性多智能体系统的领航跟随一致性问题. 假设每个多智能体系统只能得到其邻域的输出测量信息, 在此条件下, 讨论多智能体在有向固定网络拓扑和无向切换网络拓扑两种情况下的一致性问题. 针对这两种情况, 提出含有分布式观测器的一致性控制算法. 应用 Lyapunov 稳定性理论证明了若单个多智能体系统是可镇定和可检测的, 且网络连接拓扑只需满足简单的结构, 则系统能够达到领航跟随一致性. 仿真结果验证了理论分析的正确性.

关键词: 多智能体系统; 领航跟随; 观测器型; 代数 Riccati 方程

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Leader-following consensus of linear multi-agent systems under fixed and switching topologies

SONG Li, WU Qing-he, WANG Yao, WANG Yin-qi

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China. Correspondent: SONG Li, E-mail: songli1226@gmail.com)

Abstract: The leader-following consensus problem of multi-agent systems with general linear systems is studied. It is assumed that each agent has only access to the relative output measurements with respect to its neighbors. Two cases are considered: the directed network with fixed topology and the undirected networks with switching topologies. For both of cases, a distributed observer-type consensus protocol only based on output measurements is proposed. It is proved that the leader-following consensus can be achieved only assuming stabilizability and detectability of the individual systems and imposing very mild connectedness assumption on the interconnection structure by using Lyapunov theory. Finally, simulation results show the effectiveness of the theoretical results.

Key words: multi-agent systems; leader-following; observer-type; algebraic Riccati equation

0 引 言

随着嵌入式系统与通信网络的蓬勃发展, 多智能体系统的协作控制问题已经引起了系统和控制领域的广泛关注^[1-3]. 实际中的嵌入式网络系统, 如多智能体系统和传感器网络在诸多工程领域中得到了成功应用, 其中包括空间编队飞行、环境监测和智能电网调度等. 在多智能体系统协作控制中, 基于邻域的信息设计分布式的控制协议使得多智能体系统的某些状态趋于一致是多智能体协作控制中重要的问题, 即一致性控制问题.

现有文献大多考虑的是一阶、二阶和高阶系统在固定/切换拓扑下的一致性问题^[4-7]. 然而, 一般线性网络系统的研究更具有实际意义, 且包括了积分系统. 文献[8]考虑了线性系统在固定/切换拓扑下的跟

踪控制问题, 但是其控制协议采用的是基于邻域全部状态信息的静态一致性协议, 然而在许多工程实际中, 智能体的全部状态信息并不总是可测量到的. 文献[9]提出了一种基于相对输出信息的观测器型的一致性协议, 并且提出了一致性区域的概念. 基于文献[9], 文献[10]针对连续和离散两种线性系统, 提出了基于降阶观测器型的一致性算法. 上述文献讨论的均是无领航者情况下的一致性问题, 由于在很多实际应用中, 要求多智能体系统跟随某个指定的智能体或某个参考信号, 即系统存在一个领航者. 领航者的运动不受其他智能体的影响, 而其他智能体跟随领航者, 此类问题称作领航跟随控制或跟踪控制问题. 文献[1]考虑了多智能体系统的领航跟随控制问题, 证明了只要所有的跟随者之间的通信拓扑是联合连通

收稿日期: 2012-06-27; 修回日期: 2012-12-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074031).

作者简介: 宋莉(1985-), 女, 博士生, 从事多智能体协作控制、 H_∞ 控制的研究; 伍清河(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事大系统控制、鲁棒控制等研究.

的,系统便达到一致.文献[11]讨论了不同的领航者在网络拓扑中的作用.文献[12]提出了3种分布式的跟踪控制算法解决一般线性多智能体系统一致的问题.已有的关于领航跟随的研究不是考虑一阶、二阶的情况,便是其网络拓扑结构是固定的或无向切换的.

本文研究了一般线性多智能体系统在固定和切换拓扑下的领航跟随一致性问题,且其每个智能体只能得到邻域的输出测量信息.与文献[8]相比,本文只利用系统的输出状态信息而非全部状态,更加具有实际意义.本文针对智能体只能得到其邻域输出测量信息的情况,提出一种观测器型的一致性协议,利用LQR(linear quadratic regulator)最优控制理论设计其观测器的增益,并将文献[12]中的算法扩展到切换网络拓扑.

1 预备知识

1.1 代数图论

智能体网络拓扑经常用有向图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 来描述,其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为非空有限的节点集合, $\mathcal{E} \in \mathcal{V}^2$ 为边集, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$ 为非负加权邻接矩阵.如果图 \mathcal{G} 的边是连接在有序节点之间的,则称该图为有向图;反之,称该图为无向图.边 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 表示节点 v_j 有信息传递给节点 v_i ,此时 $a_{ij} > 0$;否则, $a_{ij} = 0$.一般假设节点与自身没有连通性,即 $a_{ii} = 0, \forall i \in \mathcal{N}, \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$.若 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$,则节点 v_j 称为节点 v_i 的邻居. $N_i = \{j | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ 表示节点 v_i 邻居的集合,简称 v_i 的邻域.定义入度矩阵为 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_i\} \in R^{N \times N}$,其中 $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$,则Laplacian矩阵 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$,易得 $\mathcal{L}1_N = 0$.有向路径 v_i 到 v_j 是指一系列的有序边列 $(v_i, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_l}, v_j)$,其中 $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in \mathcal{E}, k = 1, 2, \dots, l$.若存在一个节点 v_i (根结点)到其他任何节点都存在一条有向路径,则称该有向图含有一棵生成树.有向图中的成份是指图中含有一棵生成树的最大子图,若无向图的任意两个顶点之间存在路径,则称该无向图是连通的.无向图 \mathcal{G} 的成份是指图中那些所有连通的极大子图.用 v_0 来表示领航者,则只有一部分跟随者能够接收到领航者的信息.图 $\bar{\mathcal{G}}$ 表示由图 \mathcal{G} 和领航者 v_0 以及其边集组成的图.

1.2 多智能体一致性问题

考虑一多智能体系统,由 N 个跟随者和一个领航者组成,其跟随者的动态描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + Bu_i, \\ y_i &= Cx_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x_i \in R^n$ 为状态信息; $u_i \in R^m$ 为控制输入; $y_i \in$

R^p 为测量输出; A, B, C 为具有相应维数的常数矩阵.

假设 1 (A, B, C)为可镇定且可检测的.

领航者 v_0 的动态描述为

$$\dot{x}_0 = Ax_0, \quad y_0 = Cx_0. \quad (2)$$

其中: $x_0 \in R^n$ 为状态信息, $y_0 \in R^p$ 为测量输出.领航者可以看作是外部系统或者是指挥器,从而使整个系统产生期望的轨迹.假设只有很小一部分智能体能够检测到领航者的信息,但是领航者不受跟随者的信息干扰.如果智能体 v_i 能够检测到领航者的信息,则称边 (v_0, v_i) 存在,权增益 $g_i > 0$.矩阵 $G = \text{diag}\{g_i\} \in R^{N \times N}$ 表示领航者与跟随者之间的信息传递矩阵.

定义 1 对于所有的智能体 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$,如果存在控制 u_i 使得闭环系统对于任意的初始状态 $x_i(0) (i = 1, 2, \dots, N)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

则称系统(1)和(2)解决了领航跟随一致性问题.

在实际中,由于连接失败或连接增加,通常导致通信拓扑为时变的. $\{\bar{\mathcal{G}}_p : p \in \mathcal{P}\}$ 表示所有可能的拓扑连接图的集合,其中 \mathcal{P} 为定义在节点 $\{v_0, v_1, \dots, v_N\}$ 所有图的指标集, $\{\mathcal{G}_p : p \in \mathcal{P}\}$ 为定义在点 $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 上的子图集.定义 $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ 为分段常数切换信号, t 时刻的网络拓扑图用 $\bar{\mathcal{G}}_{\sigma(t)}$ 表示.假设 $\sigma(t)$ 在任何有界的时间间隔内切换有限次.

2 固定拓扑下的领航跟随一致性

本节考虑多智能体系统(1)和(2)在固定有向拓扑结构下的一致性.假设每个智能体只能获得其邻居的输出测量信息,设计如下观测器型的一致性协议:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= Av_i - F(y_i - \hat{y}_i) + Bu_i, \\ u_i &= \alpha K \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) + g_i(v_i - v_0) \right), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $v_i \in R^n$ 为观测器状态; $\hat{y}_i = Cv_i$ 为观测器输出; $v_0 = x_0$; $\alpha > 0$ 为耦合系数; a_{ij} 为邻接矩阵 \mathcal{A} 的第 i 行 j 列上的元素;当智能体 i 接收到领航者的信息时, $g_i > 0$,否则 $g_i = 0$; $F \in R^{n \times p}$, $K \in R^{m \times n}$ 为需要设计的反馈矩阵.因为协议(3)中只采用了智能体邻居的信息,所以是分布式的.

令 $\tilde{x}_i = x_i - x_0, \varepsilon_i = x_i - v_i, z_i = [\tilde{x}_i^T, \varepsilon_i^T]^T$, $z = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_N^T]^T$,则式(1)~(3)所描述的闭环系统可以改写为

$$\dot{z} = (I_N \otimes \mathcal{M} + \alpha(\mathcal{L} + G) \otimes \mathcal{R})z = A_0 z. \quad (4)$$

其中: $\mathcal{L} \in R^{N \times N}$ 为图 \mathcal{G} 的Laplacian矩阵,且有

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A + FC \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} BK & -BK \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

系统 (1) 和 (2) 的领航跟随一致性问题转变为 (4) 中的稳定性问题.

算法 1 由于 (A, B, C) 是可镇定且可检测的, 协议 (3) 中的参数可以如下选取:

1) 选取正定矩阵 $Q_1 = Q_1^T \in R^{n \times n}, R_1 = R_1^T \in R^{m \times m}$, 解 Riccati 方程

$$0 = A^T P_1 + P_1 A + Q_1 - P_1 B R_1^{-1} B^T P_1, \quad (5)$$

得到矩阵 $P_1 > 0$, 选取矩阵 $K = -R_1^{-1} B^T P_1$;

2) 选取正定矩阵 $Q_2 = Q_2^T \in R^{n \times n}, R_2 = R_2^T \in R^{p \times p}$, 解 Riccati 方程

$$0 = A P_2 + P_2 A^T + Q_2 - P_2 C^T R_2^{-1} C P_2, \quad (6)$$

得到矩阵 $P_2 > 0$, 选取矩阵 $F = -P_2 C^T R_2^{-1}$;

3) 选取耦合系数 $\alpha \geq 1/(2 \min_{\lambda_i \neq 0}(\operatorname{Re}(\lambda_i)))$, 其中 λ_i 为 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 的第 i 个特征值.

引理 1 如果跟随者和领导者组成的网络拓扑图 $\bar{\mathcal{G}}$ 含有一棵生成树, 且领航者为根结点, 则矩阵 $H = \mathcal{L} + G$ 的所有特征值具有正实部.

证明 令 $S_1, S_2, \dots, S_q (q \geq 1)$ 为图 \mathcal{G} 的成份, 不失一般性, 将 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 写成矩阵块的形式 $L = \operatorname{diag}(L_1, L_2, \dots, L_q)$, 相应的矩阵 $G = \operatorname{diag}(G_1, G_2, \dots, G_q)$. 由于跟随者和领导者组成的网络拓扑图 $\bar{\mathcal{G}}$ 含有一棵生成树, 且领航者为根结点, 由文献 [9] 中的引理 5 可知矩阵块 $H_q = \mathcal{L}_q + G_q$ 特征值的实部为正, 即矩阵 $H = \mathcal{L} + G$ 的所有特征值具有正实部. \square

定理 1 考虑由多智能体网络 (1) 和 (2) 所描述的动态系统, 假设其跟随者和领导者组成的网络拓扑图 $\bar{\mathcal{G}}$ 含有一棵生成树, 且领航者为根结点, 其动态协议 (3) 中的参数如算法 1 中选取, 则对于任意的初始状态均有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

即系统解决了领航跟随一致性问题.

证明 跟随者的网络拓扑图 \mathcal{G} 含有一棵生成树, 且领航者为根结点, 由引理 1 可知矩阵 $\mathcal{L} + G$ 特征值的实部为正, 即 $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \forall i \in \mathcal{N}$. 令 $U \in R^{N \times N}$ 为酉矩阵满足 $U(\mathcal{L} + G)U^T = \Lambda$, 其中 Λ 为上三角形矩阵其对角线上的元素为矩阵 $\mathcal{L} + G$ 的特征值. 令 $\tilde{z} = (U \otimes I_n)z$, 则式 (4) 可以改写为

$$\dot{\tilde{z}} = (I_N \otimes \mathcal{M} + \alpha \Lambda \otimes \mathcal{R})\tilde{z}. \quad (7)$$

直接计算可知式 (7) 中的状态矩阵为矩阵块上三角阵, 因此, \tilde{z} 渐近趋近于零当且仅当 N 个子系统

$$\dot{z}_i = (\mathcal{M} + \alpha \lambda_i \mathcal{R})z_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

渐近稳定. 通过计算可知系统 (8) 渐近稳定当且仅当

矩阵 $A + FC$ 和 $A + \alpha \lambda_i BK (i = 1, 2, \dots, N)$ Hurwitz 稳定. 由算法 1 中的第 2) 步得到

$$\begin{aligned} & (A + FC)P_2 + P_2(A + FC)^H = \\ & AP_2 + P_2A^T - 2P_2C^T R_2^{-1}CP_2 = \\ & -Q_2 - FR_2F^T < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (9)$$

即矩阵 $A + FC$ 为 Hurwitz 稳定. 同样地, 由式 (1) 和 (3) 可知

$$\begin{aligned} & (A + \alpha \lambda_i BK)^H P_1 + P_1(A + \alpha \lambda_i BK) = \\ & A^T P_1 + P_1 A - 2\alpha \operatorname{Re}(\lambda_i) P_1 B R_1^{-1} B^T P_1 = \\ & -Q_1 - (2\alpha \operatorname{Re}(\lambda_i) - 1)K^T R_1 K < 0, \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (10)$$

矩阵 $A + \alpha \lambda_i BK (i = 1, 2, \dots, N)$ 为 Hurwitz 稳定. \square

3 切换拓扑下的领航跟随一致性

本节研究网络拓扑图为无向切换时的领航跟随一致性问题. 假设每个智能体只能获得其邻居的输出测量信息, 设计如下观测器型的一致性协议:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= A v_i - F(y_i - \hat{y}_i) + B u_i, \\ u_i &= \alpha K \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t)(v_i - v_j) + g_i(t)(v_i - v_0) \right), \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $v_i \in R^n$ 为观测器状态且 $v_0 = x_0$; $\alpha > 0$ 为耦合系数; $a_{ij}(t)$ 为邻接矩阵 A 在时刻 t 时第 i 行 j 列上的元素; $g_i(t)$ 表示以领航者为邻居的智能体随着时间是变化的; $F \in R^{n \times p}, K \in R^{m \times n}$ 为需要设计的反馈矩阵. 令 $\tilde{x}_i = x_i - x_0, \varepsilon_i = x_i - v_i, z_i = [\tilde{x}_i^T, \varepsilon_i^T]^T, z = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_N^T]^T$, 则闭环系统 (1), (2) 和 (11) 可以改写为

$$\dot{z} = (I_N \otimes \mathcal{M} + \alpha(\mathcal{L}_{\sigma(t)} + G_{\sigma(t)}) \otimes \mathcal{R})z = A_0 z. \quad (12)$$

其中: $\mathcal{L}_{\sigma(t)} \in R^{N \times N}$ 为图 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ 在时刻 t 的 Laplacian 矩阵, $G_{\sigma(t)} = \operatorname{diag}\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_N(t)\}$; \mathcal{M}, \mathcal{R} 如式 (4) 所示.

为了分析系统的稳定性, 考虑一组无穷有序的有界连续时间段 $[t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots$, 且 $t_0 = 0, t_{k+1} - t_k \leq T$, 其中 T 为某个大于 0 的常数. 假设每个时间段 $[t_k, t_{k+1})$ 中存在一个非重叠的子序列 $[t_k^0, t_k^1), \dots, [t_k^j, t_k^{j+1}), \dots, [t_k^{m_k-1}, t_k^{m_k}), t_k = t_k^0, t_{k+1} = t_k^{m_k}$, 满足 $t_k^{j+1} - t_k^j \geq \tau, 0 \leq j \leq m_k - 1$. 其中: m_k 为大于 0 的整数; $\tau > 0$ 为给定的常数, 使得拓扑结构在时间段 $[t_k^j, t_k^{j+1})$ 不变, 记为 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$. 在时间段 $[t_k^j, t_k^{j+1})$ 里, 一些或者是全部拓扑图 $G_{k_j} (j = 0, 1, \dots, m_k - 1)$ 允许是非连通的, 只要求其联合拓扑满足如下定义.

定义 2 联合图是指一组图的并所组成的图, 其节点为所有节点的总和, 其边集为所有边集的并. 如

果此联合图是连通的, 则称此联合图是联合连通的. 如果联合图 $\{\bar{\mathcal{G}}_{\sigma(t)} : s \in [t, t+T]\}$ 是联合连通的, 则称这组图在时间段 $[t, t+T], T > 0$ 里是联合连通的.

下面的假设对研究切换拓扑下的领航跟随一致性问题至关重要.

假设 2 矩阵 A 所有特征根的实部非正.

假设 3 在每个时间段 $[t_k, t_{k+1}) (k=0, 1, \dots)$ 内, 所有形成图的联合图是联合连通的.

算法 2 由于 (A, B, C) 是可镇定且可检测的, 协议 (3) 中的参数可以如下选取:

1) 选取正定矩阵 $Q_1 = Q_1^T \in R^{n \times n}, R_1 = R_1^T \in R^{m \times m}$, 解 Riccati 方程

$$0 = A^T P_1 + P_1 A + Q_1 - P_1 B R_1^{-1} B^T P_1, \quad (13)$$

得到矩阵 $P_1 > 0$, 选取矩阵 $K = -R_1^{-1} B^T P_1$;

2) 选取正定矩阵 $Q_2 = Q_2^T \in R^{n \times n}, R_2 = R_2^T \in R^{p \times p}$, 解 Riccati 方程

$$0 = A P_2 + P_2 A^T + Q_2 - P_2 C^T R_2^{-1} C P_2, \quad (14)$$

得到矩阵 $P_2 > 0$, 选取矩阵 $F = -P_2 C^T R_2^{-1}$;

3) 选取耦合系数 $\alpha \geq 1/(2\lambda_{\min})$, 其中 λ_{\min} 为所有 $\sigma(t) \rightarrow \mathcal{P}$ 所有 Laplacian 矩阵的最小非零特征值.

在给出主要结果之前, 需要对图 $\bar{\mathcal{G}}_p$ 的 Laplacian 矩阵 $\mathcal{L} + G$ 的特征值作如下变换.

Step 1: 找出图 G_p 中的所有成份 $S_p^1, S_p^2, \dots, S_p^{n_p}$, $1 \leq n_p \leq N$.

Step 2: 将图 \mathcal{G}_p 的 Laplacian 写为 $L_p = \text{diag}(L_p^1, L_p^2, \dots, L_p^{n_p})$, 其中 $L_p^i \in R^{t_p^i \times t_p^i} (t_p^i = |\mathcal{V}(S_p^i)|)$ 为成份 $S_p^i (i = 1, 2, \dots, n_p)$ 对应的 Laplacian 矩阵. 相应的分割矩阵为 $D_p = \text{diag}(D_p^1, D_p^2, \dots, D_p^{n_p})$. 令 $H_p = \text{diag}(H_p^1, H_p^2, \dots, H_p^{n_p})$, 其中 $H_p^i = L_p^i + D_p^i, i = 1, 2, \dots, n_p$.

Step 3: 对于每个 $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$, 考虑成份 S_p^i 所对应的矩阵 H_p^i , 假设 $|\mathcal{V}(S_p^i)| = t_p^i$, 则 $\mathcal{V}(S_p^i) = \{i_1, i_2, \dots, i_{t_p^i}\}$, 其中 $\{i_1, i_2, \dots, i_{t_p^i}\} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ 且 $i_1 < i_2 < \dots < i_{t_p^i}$, 故 H_p^i 为 $t_p^i \times t_p^i$ 阶矩阵, 记其 t_p^i 个特征值为 $e_{p,1}^i \leq e_{p,2}^i \leq \dots \leq e_{p,t_p^i}^i$. 将 t_p^i 在图中的不同符号 $\lambda_p^{i_1}, \lambda_p^{i_2}, \dots, \lambda_p^{i_{t_p^i}}$ 重新标记矩阵 H_p^i 与之对应, 即 $\lambda_p^{i_1} (\leftrightarrow e_{p,1}^i), \lambda_p^{i_2} (\leftrightarrow e_{p,2}^i), \dots, \lambda_p^{i_{t_p^i}} (\leftrightarrow e_{p,t_p^i}^i)$.

Step 4: 将矩阵 $H_p^1, H_p^2, \dots, H_p^{n_p}$ 所对应特征值按顺序排列一起.

通过如此标记后, 对于所有的 $p \in \mathcal{P}, H_p$ 对应的 N 个特征值记为 $\{\lambda_p^1, \lambda_p^2, \dots, \lambda_p^N\}$. 定义 $\sigma(p) = \{k : \lambda_p^k \neq 0, k = 1, 2, \dots, N\}$, 则有如下引理.

引理 2^[8] 联合图在时间段 $[t_k, t_{(k+1)})$ 内为联合

连通的, 当且仅当

$$\bigcup_{t \in [t_k, t_{k+1})} \varrho(\sigma(t)) = \{1, 2, \dots, N\}. \quad (15)$$

引理 3^[13] 记对称矩阵 X 为

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix},$$

令 S 为矩阵 A 在矩阵 X 中的 Schur 补, 即 $S = C - B^T A^{-1} B$, 则有: 1) X 为正定矩阵当且仅当矩阵 A 和矩阵 S 均为正定矩阵; 2) 如果 A 是正定的, 则 X 是半正定的, 当且仅当 S 为半正定矩阵.

定理 2 考虑由多智能体网络 (1) 和 (2) 所描述的动态系统, 系统矩阵满足假设 2, 其跟随者与领导者组成的网络拓扑图 $\bar{\mathcal{G}}$ 满足假设 3, 动态协议 (11) 中的参数选取如算法 2, 则对于任意初始状态均有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

即系统解决了领航跟随一致性问题.

证明 由定理 1 得知矩阵 $A + \alpha \lambda_i B K$ 和 $A + F C$ 为 Hurwitz 稳定, 可以找到正定对称矩阵 P_3, P_4 满足

$$(A + \alpha \lambda_i B K)^H P_3 + P_3 (A + \alpha \lambda_i B K) - \alpha \lambda_i P_3 B K (\alpha \lambda_i P_3 B K)^H < 0, \quad (16)$$

$$(A + F C)^H P_4 + P_4 (A + F C) = -I_N. \quad (17)$$

令 $P = \begin{bmatrix} P_3 & 0 \\ 0 & P_4 \end{bmatrix} > 0$, 其中 P_3, P_4 分别为式 (16) 和 (17) 的解. 选取 Lyapunov 函数

$$V(t) = z^T(t) (I_N \otimes P) z(t).$$

显然, $V(t) > 0$ 且在每个时间段内都是连续可导的.

首先, 证明在每个非变换瞬时时间段内有 $\dot{V}(t) \leq 0$. 对于每个 $p \in \mathcal{P}, H_p$ 均是一个对称正定的矩阵, 其 N 个特征值 $\{\lambda_p^1, \lambda_p^2, \dots, \lambda_p^N\}$ 都可以找到正交矩阵 T_p 使得

$$T_p H_p T_p^T = A_p := \text{diag}(\lambda_p^{\pi_p(1)}, \lambda_p^{\pi_p(2)}, \dots, \lambda_p^{\pi_p(N)}), \quad (18)$$

其中 π_p 为 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的某种排列. 记系统在 t 时刻的拓扑图为 $\bar{\mathcal{G}}$, 由式 (12) 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & z^T (I_N \otimes \mathcal{M}^T + \alpha H_p \otimes \mathcal{R}^T) (I_N \otimes P) z + \\ & z^T (I_N \otimes P) (I_N \otimes \mathcal{M} + \alpha H_p \otimes R) z = \\ & z^T [I_N \otimes (\mathcal{M}^T P + P \mathcal{M}) + \alpha H_p \otimes (\mathcal{R}^T P + P R)] z. \end{aligned}$$

令 $\tilde{z} = (T_p \otimes I_n) z$, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \tilde{z}^T (T_p \otimes I_n) [I_N \otimes (\mathcal{M}^T P + P \mathcal{M}) + \\ & \alpha H_p \otimes (\mathcal{R}^T P + P R)] (T_p^T \otimes I_n) \tilde{z} = \\ & \tilde{z}^T [I_N \otimes (\mathcal{M}^T P + P \mathcal{M}) + \alpha A_p \otimes (\mathcal{R}^T P + P R)] \tilde{z} \leq \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in \sigma(p)} \tilde{z}_i^T [(M^T P + P M) + \alpha \lambda_i (\mathcal{R}^T P + P \mathcal{R})] \tilde{z}_i =$$

$$\sum_{i \in \sigma(p)} \tilde{z}_i^T [(M^T + \alpha \lambda_i \mathcal{R}^T) P + P (M + \alpha \lambda_i \mathcal{R})] \tilde{z}_i.$$

计算得到

$$(M^T + \alpha \lambda_i \mathcal{R}^T) P + P (M + \alpha \lambda_i \mathcal{R}) =$$

$$\begin{bmatrix} A + \alpha \lambda_i B K & -\alpha \lambda_i B K \\ 0 & A + F C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + \alpha \lambda_i B K & -\alpha \lambda_i B K \\ 0 & A + F C \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} S_1 & -\alpha \lambda_i P_1 B K \\ -(\alpha \lambda_i P_1 B K)^T & S_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

其中

$$S_1 = (A + \alpha \lambda_i B K)^T P_3 + P_3 (A + \alpha \lambda_i B K),$$

$$S_2 = (A + F C) P_4 + P_4 (A + F C)^T.$$

由引理 3 和式 (17) 可知, 不等式 (19) 成立当且仅当

$$(A + \alpha \lambda_i B K)^T P_3 + P_3 (A + \alpha \lambda_i B K) -$$

$$\alpha \lambda_i P_3 B K (\alpha \lambda_i P_3 B K)^T < 0, \quad (20)$$

即式 (16) 成立. 因此, 必定存在某个常数 δ 使得下式成立:

$$V(t) \leq -\delta \sum_{\sigma(p)} \tilde{z}_i^T \tilde{z}_i \leq 0. \quad (21)$$

进一步得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ 存在.

与文献 [8] 中定理 2 的证明类似, 可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau} \left[\sum_{i \in \sigma(\varrho(t_k^q))} \tilde{z}_i^T(s) \tilde{z}_i(s) + \dots +$$

$$\sum_{i \in \sigma(\varrho(t_k^{m_k-1}))} \tilde{z}_i^T(s) \tilde{z}_i(s) \right] ds = 0. \quad (22)$$

由引理 2 可知, 由于系统的切换拓扑图在每个时间段 $[t_k, t_{k+1})$ 内是联合连通的, $\bigcup_{t \in [t_k, t_{k+1})} \sigma(\varrho(t)) = \{1, 2, \dots, N\}$, 式 (22) 可以改写为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau} \left[\sum_{i=1}^N a_i \tilde{z}_i^T(s) \tilde{z}_i(s) \right] ds = 0,$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_N 为正整数. $\dot{V}(t) \leq 0$ 表示 $z(t)$ 有界, 则 $\dot{z}(t)$ 也有界, 因此, $\sum_{i=1}^N a_i \tilde{z}_i^T(s) \tilde{z}_i(s)$ 是一致连续的. 由 Barbalat 定理可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i \tilde{z}_i^T(s) \tilde{z}_i(s) = 0,$$

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_i^T(t) = 0, i = 1, 2, \dots, N$, 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i^T(t) = 0, i = 1, 2, \dots, N$, 即系统解决领航跟随一致性问题. \square

注 1 当 N 较大时, 计算矩阵 $\mathcal{L}_{\sigma(t)}$ 最小特征值的工作量很大. 事实上, 一般只要选取耦合系数 α 较

大即可满足要求.

4 仿真实验

本节利用仿真实验验证理论方案的有效性和正确性. 首先, 考虑通信拓扑为固定有向图的情况. 考虑由 4 个跟随者和 1 个领航者构成的多智能体系统, 系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0].$$

易知矩阵 A 为不稳定的, 且 (A, B, C) 为可镇定可检测的. 假设其拓扑图如图 1 所示, 直接计算得到矩阵 $\mathcal{L} + G$ 的最小特征值为 0.2679. 选取 $\alpha = 4$, 利用 Matlab,

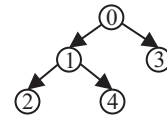
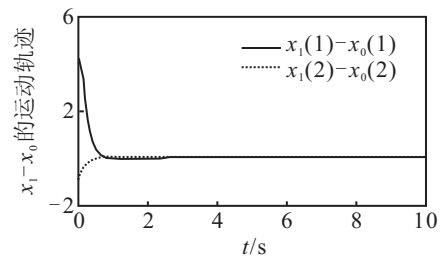
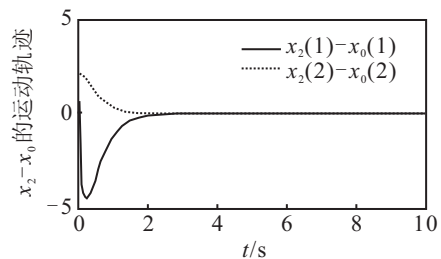


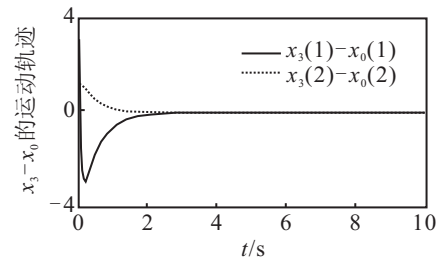
图 1 固定有向网络拓扑



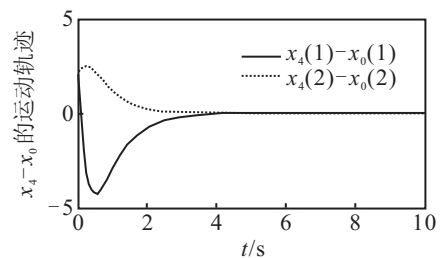
(a) $x_1 - x_0$ 的运动轨迹



(b) $x_2 - x_0$ 的运动轨迹



(c) $x_3 - x_0$ 的运动轨迹



(d) $x_4 - x_0$ 的运动轨迹

图 2 跟随者和领航者在固定有向网络拓扑下的误差轨迹

选取 $Q_1 = \text{diag}\{10, 10\}$, $Q_2 = \text{diag}\{1, 1\}$, $R_1 = 1$, $R_2 = 0.5$, 由算法 1 解得反馈矩阵 K 和 F 分别为

$$K = [0.9820 \quad -2.6006], F = \begin{bmatrix} -0.9471 \\ 0.3254 \end{bmatrix}.$$

图 2 给出了采用控制协议 (3) 所得的跟随者和领

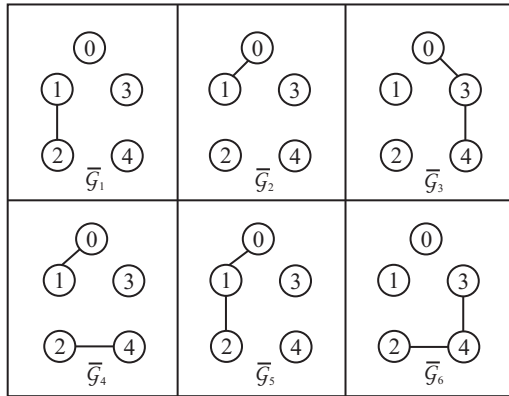
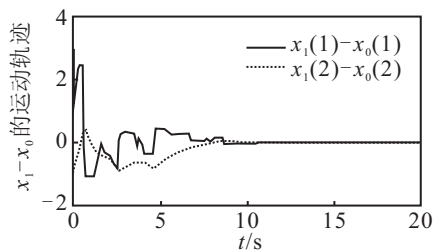
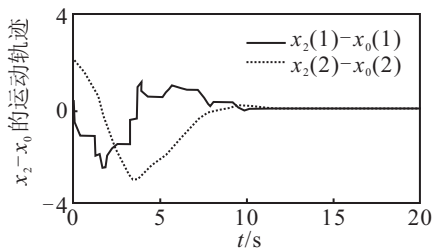


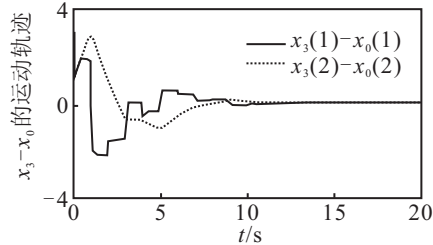
图 3 跟随者和领航者间可能的网络拓扑图



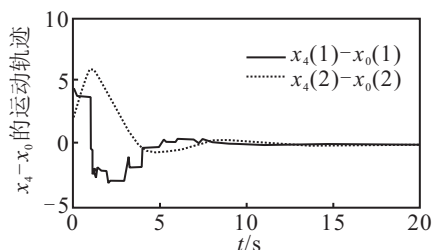
(a) x_1-x_0 的运动轨迹



(b) x_2-x_0 的运动轨迹



(c) x_3-x_0 的运动轨迹



(d) x_4-x_0 的运动轨迹

图 4 跟随者和领航者在切换网络拓扑下的误差轨迹

航者的误差轨迹 $\tilde{x}_i = x_i - x_0, i = 1, 2, 3, 4$. 由图 2 可知, 4 个跟随者最终都与领航者的状态达到一致.

考虑由 4 个跟随者和一个领导者构成的多智能体系统在切换网络拓扑下的领航跟随一致性问题, 系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1].$$

显然, (A, B, C) 是可镇定且可检测的, 且矩阵 A 的两个特征值均为 0. 假设 5 个智能体所有可能的网络拓扑图为 $\{\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \tilde{G}_4, \tilde{G}_5, \tilde{G}_6\}$, 如图 3 所示, 其切换顺序为 $\tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_3 \rightarrow \tilde{G}_4 \rightarrow \tilde{G}_5 \rightarrow \tilde{G}_6 \rightarrow \tilde{G}_1 \rightarrow \dots$, 每 0.5 s 切换一次. 通过计算得到 $\lambda_{\min} = 0.3820$, 选取 $\alpha = 4$, 利用 Matlab, 选取 $Q_1 = \text{diag}\{10, 10\}$, $Q_2 = \text{diag}\{1, 1\}$, $R_1 = 1$, $R_2 = 0.5$, 由算法 2 解得反馈矩阵 K 和 F 分别为

$$K = [-3.1623 \quad -4.0404], F = \begin{bmatrix} -3.1075 \\ -1.4142 \end{bmatrix}.$$

图 4 给出了采用控制协议 (11) 所得的跟随者和领航者在切换网络拓扑下的误差轨迹 $\tilde{x}_i = x_i - x_0, i = 1, 2, 3, 4$. 由图 4 可知, 4 个跟随者最终都与领航者的状态达到一致.

5 结 论

本文研究了多智能体系统的领航跟随一致性问题, 其每个智能体的动态描述为一般线性系统. 假设每个多智能体系统只能得到其邻域的输出测量信息, 利用输出信息设计分布式估计器估计出系统的状态. 然后设计控制协议, 讨论有向固定网络拓扑和无向切换网络拓扑两种情况下的一致性. 应用 Lyapunov 稳定性和图论的理论证明了若单个多智能体系统是可镇定和可检测的, 对于有向固定网络拓扑的情况, 只要求领航者和跟随者的拓扑图含有一棵生成树, 则系统达到领航跟随一致性; 对于无向切换网络拓扑的情况, 只要求领航者和跟随者所组成的拓扑图是联合连通的, 则系统达到领航跟随一致性. 最后, 通过仿真验证了理论分析的正确性.

参考文献(References)

- [1] Jadbabaie A, Lin J, Morse. Coordination of group of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [2] Fax J, Murray R. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Trans on Automatic Control 2004, 49(9): 1465-1476.
- [3] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.

(下转第 1696 页)