

文章编号: 1001-0920(2013)10-1491-06

## 非线性网络有限时间分布式跟踪控制

于 镒<sup>1,2</sup>, 伍清河<sup>1</sup>, 王 堃<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学 自动化学院, 北京 100081; 2. 东北石油大学 电气信息工程学院, 黑龙江 大庆 163318)

**摘要:** 针对具有本质非线性动态的多智能体网络, 基于微分包含理论研究有限时间协调跟踪问题. 假设非线性动态满足 Lipschitz 条件且只有部分智能体已知目标动态, 设计分布式混杂控制协议, 应用非光滑稳定性分析方法给出系统实现有限时间跟踪的充分条件. 若无向切换拓扑保持连通或有向拓扑具有生成树且强连通部分满足细致平衡条件, 则选取合适的控制增益参数均能实现有限时间跟踪. 最后通过仿真实验表明了所提出方案的有效性和正确性.

**关键词:** 非线性网络; 有限时间跟踪; 微分包含; 非光滑稳定性分析

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

### Finite time distributed tracking control of nonlinear networks

YU Di<sup>1,2</sup>, WU Qing-he<sup>1</sup>, WANG Yao<sup>1</sup>

(1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China; 2. School of Electrical Information and Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China. Correspondent: YU Di, E-mail: yudizlg@yahoo.cn)

**Abstract:** The finite time coordinated tracking problem is studied for multi-agent networks with inherent nonlinear dynamics based on the differential inclusions theory. The distributed hybrid control protocol is designed assuming that nonlinear dynamics are satisfied with Lipschitz condition and only a subset of agents know objective dynamics. Sufficient conditions are developed to achieve finite time tracking by applying nonsmooth stability analysis methods. Finite time tracking can be achieved with suitable control gain for the undirected switching topology keeping connected and the directed topology containing a spanning tree with detail-balanced strongly connected components. Simulation results verify the effectiveness and correctness of the theoretical analysis.

**Key words:** nonlinear network; finite-time tracking; differential inclusions; nonsmooth stability analysis

## 0 引 言

近年来, 多智能体协调控制的研究受到广泛关注, 并且在诸多工程领域得到了成功应用, 其中包括机器人编队、无线传感器网络定位和智能电网调度等. 其主要任务是设计控制协议并通过局部交互实现全局行为, 但目前大部分成果均为实现多智能体系统渐近协调, 即控制律至多实现无限时间内的渐近收敛. 相比之下, 有限时间控制具有快速性、准确性和强鲁棒性等优点<sup>[1]</sup>, 其研究方法包括齐次理论、有限时间稳定性方法和非光滑分析方法. 基于前两种方法, 文献[2-4]设计了连续的非光滑控制协议以实现网络的有限时间协调控制. 当控制作用不连续或网络拓扑发生变化时, 控制协议是个体状态的不连续函数, 所以对应的系统为不连续动态系统, 此时需要引

入 Filipov 解和微分包含的概念, 采用非光滑分析方法进行稳定性分析. 对于具有不连续右端的系统微分方程, Filippov<sup>[5]</sup>提出了微分方程解的概念, 只要求方程的右端关于时间和状态变量 Lebesgue 可测, 从而为该领域的研究作出了创造性的贡献. 随后, 文献[6-7]基于微分包含理论进行平衡点的非光滑 Lyapunov 分析. 近年来, 有些学者将非光滑分析理论应用到多智能体网络的有限时间协调控制中. 文献[8]在引入可微函数的赋范梯度流和符号函数梯度流概念的基础上, 采用集值李导数和 Lasalle 不变集原理等非光滑分析工具, 得出无向网络在有限时间内达到极值点的充分条件, 并成功应用于一致性分析. 文献[9]研究了不连续动态网络在无向固定拓扑和切换拓扑情况下的半稳定性和有限时间半稳定性, 并成功实现了无向切换网

收稿日期: 2012-06-28; 修回日期: 2012-08-31.

基金项目: 国家青年自然科学基金项目(61074031)

作者简介: 于镒(1977-), 女, 博士生, 从事多智能体协调控制、非线性控制的研究; 伍清河(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事大系统控制、鲁棒控制等研究.

网络的有限时间聚集控制<sup>[10]</sup>.

上述研究<sup>[8-10]</sup>主要针对一阶积分器网络,但在实际应用中系统均体现非线性特性,例如在复杂动态网络同步中,复杂网络每个节点的动态由节点本质非线性动态和节点间的耦合作用所决定<sup>[11]</sup>.同时,当考虑动态受限和摩擦等物理特性时也会产生本质非线性动态.最近,关于具有本质非线性动态网络的一致性研究成果主要在文献[12-14]中给出,均假设非线性动态满足 Lipschitz 条件.其中:文献[12]针对一阶非线性网络进行渐近协调跟踪控制;文献[13]研究了二阶非线性网络一致性并给出有向固定拓扑下实现一致的充分条件;文献[14]考虑了无向切换拓扑情况下非线性网络的有限时间一致问题,提出了新型比较引理,并给出保证有限时间一致的充分条件.

本文在文献[14]同时考虑有限时间收敛和具有本质非线性动态网络一致性问题的基础上,在非线性动态满足 Lipschitz 条件的前提下,设计分布式不连续控制协议.针对无向切换拓扑和有向固定拓扑两种情况,采用非光滑稳定性分析方法给出非线性网络有限时间跟踪的充分条件以及有限收敛时间的上界.本文从以下 3 方面对现有成果进行了拓展:1)与文献[14]相比,考虑更一般的有向拓扑情况,降低了对通信拓扑的限制;2)与文献[8-10]相比,考虑具有本质非线性动态的多智能体网络,比一阶积分器网络的有限时间控制复杂得多,且更具有实际意义;3)与文献[11-13]相比,实现了有限时间协调跟踪,不但加快收敛速度,而且提高了网络控制精度.

## 1 预备知识

本文中,矢量  $x \in \mathcal{R}^n$  的 1-范数和 2-范数分别定义为  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ ;  $\lambda_{\min}(A)$  为矩阵  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$  的最小特征值;  $\text{sgn}(\cdot)$  和  $\text{SGN}(\cdot)$  分别为符号函数和集值函数.

### 1.1 代数图论

智能体网络拓扑经常用加权有向图  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  描述,其中:  $\mathcal{V} = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$  为非空有限的节点集合,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  为边集,  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{n \times n}$  为非负加权邻接矩阵.若有向图  $\mathcal{G}$  的边  $\varepsilon_{ij} \in \mathcal{E}$ ,即节点  $\nu_j$  有信息传递给节点  $\nu_i$ ,则  $a_{ij} > 0$ ,  $\nu_j \in \mathcal{N}_i$ ; 否则  $a_{ij} = 0$ ,  $\mathcal{N}_i = \{\nu_j \in \mathcal{V}, (\nu_i, \nu_j) \in \mathcal{E}\}$  为节点  $\nu_i$  的邻居集.有向图  $\mathcal{G}$  所对应的 Laplacian 矩阵定义为

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A} = [l_{ij}] \in \mathcal{R}^{n \times n}.$$

其中:  $l_{ii} = d_{\text{in}}(\nu_i) = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ ,  $l_{ij} = -a_{ij}$ ,  $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_{\text{in}}(\nu_1), d_{\text{in}}(\nu_2), \dots, d_{\text{in}}(\nu_n)\}$  为入度矩阵,  $d_{\text{in}}(\nu_i)$  为节点  $\nu_i$  的入度值.若存在标量  $\omega_i > 0$ ,使得  $\omega_i a_{ij} = \omega_j a_{ji}$ ,  $i, j =$

$1, 2, \dots, n$ , 则称  $\mathcal{G}$  的权值满足细致平衡条件,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$  为  $\mathcal{G}$  的 Laplacian 矩阵零特征值所对应的一个左特征向量.有序边序列  $(\nu_1, \nu_2), (\nu_2, \nu_3), \dots$  称为有向路径,  $\nu_j \in \mathcal{V}$ , 若有向图中一节点与其他所有节点之间均存在有向路径,则称图具有有向生成树,该节点称为根节点.若有向图的任意两个节点之间都存在有向路径,则称有向图强连通.若  $(\nu_i, \nu_j) \in \mathcal{E} \iff (\nu_j, \nu_i) \in \mathcal{E}$ , 则称  $\mathcal{G}$  为无向图,且  $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$ .若在不同节点之间都存在无向路径,则称无向图连通.对于无向连通图  $\mathcal{G}$  和任意  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n$ , 有如下性质:

$$x^T \mathcal{L} x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2, \quad (1)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i^T \text{sgn}(x_j - x_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \|x_j - x_i\|_1. \quad (2)$$

### 1.2 非光滑稳定性分析基础理论

考虑微分方程

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \quad (3)$$

其中  $X: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  是 Lebesgue 可测且局部本质有界的,初始条件为  $x(t_0) = x(0)$ .当控制作用不连续或由于拓扑切换导致网络系统不连续时,均可在 Filippov 意义下理解该动态系统.在时间间隔  $[t_0, t_1]$  内,式(1)的 Filippov 解定义为绝对连续函数  $x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{R}^n$ , 且对于所有的  $t \in [t_0, t_1]$  满足

$$\dot{x}(t) \in K[\mathcal{X}](x(t)). \quad (4)$$

其中

$$K[\mathcal{X}](x) \triangleq \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \overline{\text{co}}\{X(\mathcal{B}(x, \delta) \setminus S)\},$$

$\mu(\cdot)$  为 Lebesgue 测度,  $\overline{\text{co}}$  为凸包,  $\mathcal{B}(x, \delta)$  为以  $x$  为中心  $\delta$  为半径的开球,  $S$  为零测度集.可见 Filippov 解用微分包含(4)替换了微分方程(3).若式(3)的 Filippov 解在时间上不能继续拓展,则称其为最大解;若对于每个  $x(0) \in M$ , 至少包含 1 个系统(3)的最大解,则称  $M$  为系统(3)的弱不变集;若对于每个  $x(0) \in M$ , 包含所有系统(3)的最大解,则称  $M$  为系统(3)的强不变集.

进行非光滑稳定性分析需要广义梯度和集值李导数的概念.令  $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  是局部 Lipschitz 函数, Clarke 广义梯度  $\partial V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{R}^n)$  定义为

$$\partial V(x) \triangleq \text{co} \left\{ \lim_{x_i \rightarrow x} \nabla V(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S \cup \Omega_V \right\}.$$

其中:  $\text{co}$  为凸壳,  $\Omega_V$  为  $V$  不可微点的集合.在  $x$  处,  $V$  相对于  $X$  的集值李导数  $\mathcal{L}_X V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{R})$  定义为

$$\mathcal{L}_X V = \{a \in \mathcal{R} | \exists v \in X(x), \zeta^T v = a, \forall \zeta \in \partial V(x)\}.$$

若  $X$  取凸且紧值,则对于每个  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathcal{L}_X V$  是有界闭区间或空集.若  $x$  在  $V$  处连续可微,则  $\mathcal{L}_X V =$

$\{(\nabla V(x))^T v, v \in X(x)\}$ .

### 1.3 问题描述

考虑多智能体网络由  $n$  个智能体组成, 第  $i$  个智能体动态描述为

$$\dot{x}_i = f(t, x_i) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

其中:  $x_i \in \mathcal{R}^m, u_i \in \mathcal{R}^m$  分别为第  $i$  个智能体的状态矢量和控制矢量;  $f: \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \mapsto \mathcal{R}^m$  为智能体的本质非线性动态. 本文的目的是设计分布式控制协议使得每个智能体均能在有限时间内跟踪目标动态

$$x_0 = f(t, x_0), \quad (6)$$

其中  $x_0 \in \mathcal{R}^m$  为目标动态的状态矢量. 由于本质非线性动态的存在, 目标动态可能为周期轨迹或混沌轨迹, 而并非常值矢量.

**定义 1** 若对于任何初始状态, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $x_i(t) \rightarrow x_0(t), i = 1, 2, \dots, n$ , 则称多智能体网络 (5) 实现渐近跟踪.

**定义 2** 若对于任何初始状态, 都存在有限时间  $T$  使得当  $t \geq T$  时, 有  $x_i(t) = x_0(t), i = 1, 2, \dots, n$ , 则称多智能体网络 (5) 实现有限时间跟踪.

**假设 1** 令非线性动态  $f(t, x)$  满足 Lipschitz 条件, 即  $\|f(t, x_i) - f(t, x_j)\| \leq \gamma \|x_i - x_j\|$ , 其中  $\gamma$  为已知正常数.

## 2 主要结果

假设只有部分智能体已知目标动态. 针对具有本质非线性动态的多智能体网络 (5) 提出如下分布式混杂控制协议:

$$u_i = -\alpha \sum_{j=0}^n a_{ij}(x_i - x_j) - \beta \sum_{j=0}^n a_{ij} \text{sgn}(x_i - x_j). \quad (7)$$

其中:  $\alpha > 0, \beta > 0$ . 当智能体  $i$  已知目标动态时,  $a_{i0} > 0$ ; 否则  $a_{i0} = 0$ . 由于控制协议不连续, 在 Filippov 意义下理解网络系统状态变化. 令跟踪误差为  $\varepsilon_i = x_i - x_0$ , 网络误差矢量为  $\varepsilon = [\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \dots, \varepsilon_n^T]^T$ , 则误差动态为

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i = & -\alpha \sum_{j=0}^n a_{ij}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) - \beta \sum_{j=0}^n a_{ij} \text{sgn}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + \\ & f(t, x_i) - f(t, x_0). \end{aligned} \quad (8)$$

由此, 跟踪问题即转化为设计控制协议使得在有限时间内实现  $\varepsilon = 0$ . 令  $\tilde{f}_i = f(t, x_i) - f(t, x_0), \tilde{f} = [\tilde{f}_1^T, \tilde{f}_2^T, \dots, \tilde{f}_n^T]^T$ , 则误差动态解定义为微分包含

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i \in K[\mathcal{F}](\varepsilon) = K \left[ -\alpha \sum_{j=0}^n a_{ij}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) - \right. \\ \left. \beta \sum_{j=0}^n a_{ij} \text{sgn}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + \tilde{f}_i \right] (\varepsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

的绝对连续解, 且由假设 1 得到  $0 \in K[\mathcal{F}](0)$ .

首先证明误差动态 (8) Filippov 解的存在性, 然后分别针对无向切换拓扑和有向固定拓扑两种情况进行有限时间跟踪控制的研究.

### 2.1 Filippov 解的存在性

**引理 1**<sup>[15]</sup> 若矢量域  $X$  是 Lebesgue 可测且局部本质有界的, 则对于所有的初始条件  $x(0) \in \mathcal{R}^n$ , 都存在微分方程 (3) 的 Filippov 解.

**定理 1** 考虑具有本质非线性动态的多智能体网络 (5), 若非线性动态满足假设 1, 则对于任意的初始条件  $\varepsilon(0) \in \mathcal{R}^n$ , 误差动态 (8) 的 Filippov 解存在.

**证明** 由已知条件和误差动态 (8) 可得

$$\|\dot{\varepsilon}\| \leq (\|\alpha \mathcal{L}\| + \gamma) \|\varepsilon\| + \beta \max(d_{\text{in}}(\nu_i)) = p \|\varepsilon\| + q,$$

其中  $\max(d_{\text{in}}(\nu_i))(i = 1, 2, \dots, n)$  为节点的最大入度值. 因为  $\varepsilon(t)$  是微分包含 (9) 的绝对连续解, 所以  $\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$ . 根据范数性质和 Gronwall 积分不等式得

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \|\varepsilon(0)\| + \int_0^t \|\dot{\varepsilon}(\tau)\| d\tau \leq$$

$$\|\varepsilon(0)\| + qt + \int_0^t \|\varepsilon(\tau)\| d\tau \leq (\|\varepsilon(0)\| + qt) \exp(pt).$$

符号函数 Lebesgue 可测且局部本质有界<sup>[15]</sup>, 因此由引理 1 得到误差动态 (8) 的 Filippov 解存在.  $\square$

### 2.2 无向切换拓扑情况

在实际应用中, 由于设备故障、传感范围有限或存在障碍物, 智能体间的通信连接通常不可靠, 从而使网络系统内的信息交换拓扑是动态的. 令  $\mathcal{N}_i(t)$  为第  $i$  个跟随者变化的邻居集,  $\mathcal{N}_i(t) \subset \{0, 1, \dots, n\}$ .  $\mathcal{L}(t)$  为时变网络拓扑的 Laplacian 矩阵, 此时考虑分布式时变控制协议

$$\begin{aligned} u_i = & -\alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij}(x_i - x_j) - \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij} \text{sgn}(x_i - x_j). \end{aligned} \quad (10)$$

**引理 2**<sup>[4]</sup> 令  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \geq 0$  且  $0 < p \leq 1$ , 有

$$\left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^p \leq \sum_{i=1}^n \xi_i^p.$$

**引理 3**<sup>[8]</sup> 令  $V$  为局部 Lipschitz 连续且正则函数,  $x(0) \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}^n$ , 其中  $\mathcal{Q}$  为式 (3) 的紧的强不变集. 假定对于所有的  $x \in \mathcal{Q}$ , 有  $\max \mathcal{L}_X V(x) \leq 0$  或  $\mathcal{L}_X V(x) = \emptyset$ . 令  $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{R}^n : 0 \in \mathcal{L}_X V(x)\}$ ,  $\mathcal{M}$  为  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{I}$  的最大弱不变子集, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \mathcal{M}) = 0$ .

**引理 4**<sup>[7]</sup> 令  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}^n$  为包含原点的开集, 考虑微分包含 (4), 其中  $x \in \mathcal{Q}$  且  $0 \in K[\mathcal{X}](0)$ . 若存在连续可微函数  $V(x) : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  和正定连续函数  $r : \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$ , 其中  $r(0) = 0$ , 满足  $\max \mathcal{L}_X V(x) \leq -r(V(x)), \forall x \in \mathcal{Q}$ , 且对于所有的  $\epsilon > 0$ , 有  $\int_0^\epsilon (dz/r(z)) < +\infty$ ,

则微分包含(4)的原点是有限时间稳定的,且有限收敛时间满足  $T \leq \int_0^{V(x(0))} (dz/r(z))$ .

**定理 2** 考虑具有本质非线性动态的多智能体网络(5),若非线性动态满足假设1,网络拓扑在每个拓扑切换时间间隔内均保持无向连通,且至少存在一个智能体已知目标动态,则当参数满足  $\alpha > \gamma/\lambda_{\min}(\mathcal{L}(t))$  时,控制协议(10)能够实现该无向切换网络的有限时间跟踪控制.

**证明** 采取两步法,首先证明网络渐近跟踪,然后给出有限跟踪时间的上界.令 Lyapunov 函数  $V(\varepsilon) = \varepsilon^T \varepsilon/2$ ,  $\varepsilon(0) \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}^{nm}$ . 根据文献[6]的定理1可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon) &= \varepsilon^T \mathcal{K}[\mathcal{F}](\varepsilon) = \\ & \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^T \left( -\alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + \tilde{f}_i \right) + \\ & \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^T \mathcal{K} \left[ -\beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij} \operatorname{sgn}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \right](\varepsilon) \subseteq \\ & -\alpha \varepsilon^T (\mathcal{L}(t) \otimes I_m) \varepsilon + \varepsilon^T \tilde{f} - \\ & \beta \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^T \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij} \operatorname{sgn}(\varepsilon_i - \varepsilon_j). \end{aligned}$$

由拓扑连接情况可得  $\mathcal{L}(t)$  为非奇异正定矩阵<sup>[16]</sup>,且由假设1得到

$-\alpha \varepsilon^T (\mathcal{L}(t) \otimes I_m) \varepsilon + \varepsilon^T \tilde{f} \leq -(\alpha \lambda_{\min}(\mathcal{L}(t)) - \gamma) \|\varepsilon\|^2$ , 则当  $\alpha \geq \gamma/\lambda_{\min}(\mathcal{L}(t)) + \delta$  ( $\delta > 0$ ) 时,讨论  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon)$  的取值情况 ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ):

1) 当  $\varepsilon_i \neq 0$  且  $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$  时,由性质(2)可得

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon) \leq -\delta \|\varepsilon\|^2 - \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij} \|\varepsilon_i - \varepsilon_j\|_1 < 0;$$

2) 当  $\varepsilon_i \neq 0$  且  $\varepsilon_i = \varepsilon_j$  时,  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon) = 0$ ;

3) 当  $\varepsilon_i = 0$  时,  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon) = 0$ .

可见对于所有的  $\varepsilon \in \mathcal{Q}$ , 有  $\max \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon) \leq 0$  或  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon) = 0$ , 当且仅当  $\varepsilon = 0$  时  $0 \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon)$ . 因此,  $\mathcal{I} = \{(\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \dots, \varepsilon_n^T)^T \in \mathcal{R}^{nm} : \varepsilon_i = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ , 则  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{I}$  的最大弱不变集为  $\mathcal{M} = \{\varepsilon \in \mathcal{R}^n : \varepsilon = 0\}$ . 由引理3得出网络系统实现渐近一致.

由情况(1)和引理2得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(\varepsilon) &\leq \\ & -\delta \varepsilon^T \varepsilon - \frac{\beta}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij}^2 (\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & -2\delta V(\varepsilon) - \frac{\beta}{2} (\varepsilon^T (\bar{\mathcal{L}}(t) \otimes I_m) \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & -2\delta V(\varepsilon) - \frac{\beta}{2} \sqrt{2\lambda_{\min}(\bar{\mathcal{L}}(t))} V^{\frac{1}{2}}(\varepsilon). \end{aligned}$$

其中:  $\bar{\mathcal{L}}(t) = 2\bar{\mathcal{L}}'(t) + \operatorname{diag}\{a_{10}^2, a_{20}^2, \dots, a_{n0}^2\}$  为非奇

异正定矩阵,  $\bar{\mathcal{L}}'(t)$  为邻接矩阵是  $\bar{\mathcal{A}}' = [a_{ij}^2]_{n \times n}$  的网络所对应的 Laplacian 矩阵. 令

$$r(V(\varepsilon)) = 2\delta V(\varepsilon) + \frac{\beta}{2} \sqrt{2\lambda_{\min}(\bar{\mathcal{L}}(t))} V^{\frac{1}{2}}(\varepsilon),$$

则由引理4得到微分包含(9)在  $\varepsilon = 0$  处是有限时间稳定的,即无向切换网络(5)能够实现有限时间跟踪控制. 由文献[17]得到收敛时间的上界为

$$\frac{2}{k_1} \ln \frac{k_1 \sqrt{V(\varepsilon(0))} + k_2}{k_2},$$

其中  $k_1 = 2\delta$ ,  $k_2 = \frac{\beta}{2} \sqrt{2\lambda_{\min}(\bar{\mathcal{L}}(t))}$ .  $\square$

### 2.3 有向固定拓扑情况

下面放宽对网络拓扑的限制,讨论加权有向拓扑情况下的有限时间跟踪控制. 令有向图包含  $l$  个强连通部分,  $Q_j$  表示构成每部分节点的索引集合,且  $\bigcup_{i=1}^l Q_j = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**引理 1** 若有向图  $\mathcal{G}$  强连通且细致平衡,则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^T \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - x_i) = \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \|x_j - x_i\|_1, \end{aligned}$$

其中标量  $\omega_i > 0$ , 且  $\omega_i a_{ij} = \omega_j a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**定理 3** 考虑具有本质非线性动态的多智能体网络(5),若非线性动态满足假设1,则网络拓扑具有有向生成树且根节点已知目标动态. 在强连通部分权值满足细致平衡的条件下,选取

$$\alpha > \max \left\{ \frac{\gamma \max_{i \in Q_j}(\omega_i)}{\lambda_{\min}(\mathcal{W}_j \mathcal{L}_j)} \right\}, j = 1, 2, \dots, l,$$

其中  $\mathcal{L}_j$  和  $\mathcal{W}_j$  为第  $j$  个强连通部分对应的 Laplacian 阵和其零特征值的左特征向量  $\omega_i$  构成的对角阵,则控制协议(7)实现该有向固定网络的有限时间跟踪控制.

**证明** 采取三步法证明,由特殊情况推广到一般情况.

1) 令有向图  $\mathcal{G}$  强连通且细致平衡,令 Lyapunov 函数为

$$V_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T (\mathcal{W} \otimes I_m) \varepsilon,$$

其中  $\varepsilon(0) \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}^{nm}$ ,  $\mathcal{W} = \operatorname{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . 其集值李导数为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V_1(\varepsilon) &= \varepsilon^T (\mathcal{W} \otimes I_m) \mathcal{K}[\mathcal{F}](\varepsilon) = \\ & \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i^T \left( -\alpha \sum_{j=0}^n a_{ij} (\varepsilon_i - \varepsilon_j) + \tilde{f}_i \right) + \\ & \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i^T \mathcal{K} \left[ -\beta \sum_{j=0}^n a_{ij} \operatorname{sgn}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \right](\varepsilon) \subseteq \\ & -\alpha \varepsilon^T (\mathcal{W} \mathcal{L} \otimes I_m) \varepsilon + \varepsilon^T (\mathcal{W} \otimes I_m) \tilde{f} - \end{aligned}$$

$$\beta \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i^T \sum_{j=0}^n a_{ij} \text{SGN}(\varepsilon_i - \varepsilon_j).$$

当假设 1 成立时有

$$-\alpha \varepsilon^T (\mathcal{W}\mathcal{L} \otimes I_m) \varepsilon + \varepsilon^T (\mathcal{W} \otimes I_m) \tilde{f} \leq -(\alpha \lambda_{\min}(\mathcal{W}\mathcal{L}) - \gamma \max_{1 \leq i \leq n}(\omega_i)) \|\varepsilon\|^2,$$

则当  $\alpha \geq \gamma \max_{1 \leq i \leq n}(\omega_i) / \lambda_{\min}(\mathcal{W}\mathcal{L}) + \delta$  时, 由引理 3 同样可得网络系统 (5) 实现渐近一致. 由上述分析、引理 2 和引理 5 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{F}} V_1(\varepsilon) &\leq -\delta \varepsilon^T \varepsilon - \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \|\varepsilon_i - \varepsilon_j\|_1 - \beta \sum_{i=1}^n \omega_i a_{i0} \|\varepsilon_i\|_1 \leq -\delta \varepsilon^T \varepsilon - \frac{\beta}{2} \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (\omega_i a_{ij})^2 (\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2 \right) + (2\omega_i a_{i0})^2 \varepsilon_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = -\delta \varepsilon^T \varepsilon - \frac{\beta}{2} (\varepsilon^T ((2\mathcal{L}' + \mathcal{B}') \otimes I_m) \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \leq -2\delta V - \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{2\lambda_{\min}(2\mathcal{L}' + \mathcal{B}')}{\max_{1 \leq i \leq n}(\omega_i)}} V^{\frac{1}{2}}(\varepsilon). \end{aligned}$$

其中:  $\mathcal{L}'$  为邻接矩阵是  $\mathcal{A}' = [(\omega_i a_{ij})^2]_{n \times n}$  的网络所对应的 Laplacian 矩阵,  $\mathcal{B}' = \text{diag}\{(2\omega_1 a_{10})^2, (2\omega_2 a_{20})^2, \dots, (2\omega_n a_{n0})^2\}$ . 令

$$r(V(\varepsilon)) = 2\delta V + \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{2\lambda_{\min}(2\mathcal{L}' + \mathcal{B}')}{\max_{1 \leq i \leq n}(\omega_i)}} V^{\frac{1}{2}}(\varepsilon),$$

由定理 2 可知微分包含 (9) 是有限时间稳定的, 则网络实现了有限时间跟踪控制且收敛时间的上界为

$$\frac{2}{k_1} \ln \frac{k_1 \sqrt{V(\varepsilon(0))} + k_2}{k_2},$$

其中  $k_1 = 2\delta, k_2 = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{2\lambda_{\min}(2\mathcal{L}' + \mathcal{B}')}{\max_{1 \leq i \leq n}(\omega_i)}}$ .

2) 令网络系统中有  $k(k < n)$  个领航者,  $n - k$  个跟随者, 跟随者之间和领航者之间的拓扑均为强连通且细致平衡. 不失一般性, 令  $i = 1, 2, \dots, k$  为领航者, 由第 1) 步可得在有限时间  $t_1$  内领航者跟踪上目标动态, 即  $\varepsilon_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$ . 令 Lyapunov 函数为

$$V_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T (\mathcal{W}' \otimes I_m) \varepsilon,$$

其中  $\mathcal{W}' = \text{diag}\{0, 0, \dots, 0, \omega'_{k+1}, \dots, \omega'_n\}$ , 标量  $\omega'_i > 0$  且  $\omega'_i a_{ij} = \omega'_j a_{ji} (i, j = k + 1, k + 2, \dots, n)$ . 则当参数满足

$$\alpha > \max \left\{ \frac{\gamma \max_{1 \leq i \leq n}(\omega_i)}{\lambda_{\min}(\mathcal{W}\mathcal{L})}, \frac{\gamma \max_{k+1 \leq i \leq n}(\omega'_i)}{\lambda_{\min}(\mathcal{W}'\mathcal{L})} \right\}$$

时, 同样可以得出跟随者在有限时间内跟踪上领航者, 具有目标动态.

3) 最后考虑一般情况. 在有向图中, 任何只有一个节点的子图都是强连通的, 因此有向图的强连通部分划分其节点. 若有向图包含  $l$  个强连通部分, 则在该部分权值满足细致平衡的条件下, 选取

$$\alpha > \max \left\{ \frac{\gamma \max_{i \in Q_j}(\omega_i)}{\lambda_{\min}(\mathcal{W}_j \mathcal{L}_j)} \right\}, j = 1, 2, \dots, l,$$

其中  $\mathcal{L}_j$  和  $\mathcal{W}_j$  为第  $j$  个强连通部分对应的 Laplacian 阵和其零特征值的左特征向量  $\omega_i$  构成的对角阵. 假设与某些强连通部分节点通信的其他智能体均已达到目标动态, 可由第 2) 步得出在有限时间内这些节点的状态能够跟踪上领航者的状态. 可见最终整个有向拓扑网络实现了有限时间跟踪控制.  $\square$

### 3 仿真研究

利用两个仿真实例验证理论结果, 分别考虑无向切换拓扑和有向固定拓扑两种情况. 令目标动态为  $\dot{x}_0 = \sin(0.333 x_0)$ , 第  $i$  个跟随者动态为  $\dot{x}_i = \sin(0.333 x_i) + u_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 由本质非线性动态  $f(t, x_i) = \sin(0.333 x_i)$  可得  $\gamma \geq 1$ , 本文取  $\gamma = 1$ .

首先考虑由 7 个智能体组成的无向网络, 拓扑图见图 1, 智能体 0 代表虚拟领航者, 具有目标动态. 可见, 无向图  $\mathcal{G}$  中跟随者 1~6 之间始终保持连通, 且虚拟领航者为跟随者 1 或跟随者 4 的邻居. 拓扑每隔 0.2 s 在图 1(a) 和图 1(b) 之间进行切换. 当采用控制协议 (10),  $\alpha = 10, \beta = 1$  时, 跟踪误差曲线如图 2 所示. 可见, 跟踪误差在 0.6 s 内收敛到零, 即所有跟随者在有限时间内都能够跟踪目标动态, 与定理 2 结论相符.

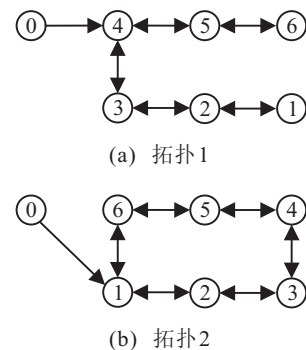


图 1 无向切换拓扑

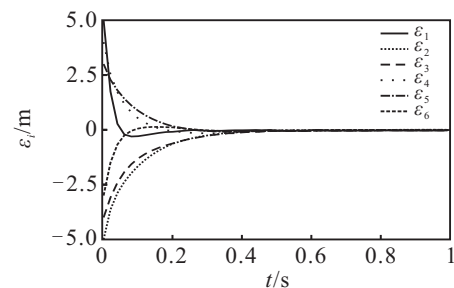


图 2 跟踪误差曲线 (无向)

考虑由7个智能体组成的有向网络, 拓扑如图3所示, 数字代表边的权值. 可见, 图3具有有向生成树, 节点 $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{6\}$ ,  $\{7\}$ 将整个网络划分为4个强连通部分且其权值满足细致平衡条件. 令智能体1已知目标动态, 且 $a_{10} = 7$ . 当采用控制协议(7),  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 1$ 时, 跟踪误差曲线如图4所示. 可见, 智能体1~智能体3的跟踪误差约在1.5s收敛到零, 智能体6、智能体4、智能体5和智能体7的跟踪误差约在2.2s依次收敛到零, 所有的跟随者在有限时间内都能够跟踪目标动态, 与定理3结论相符.

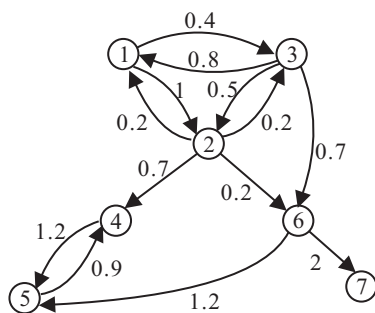


图3 有向固定拓扑

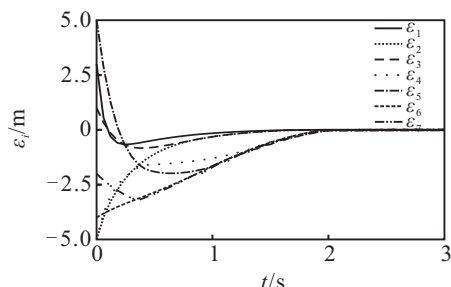


图4 跟踪误差曲线(有向)

## 4 结论

本文在仅有部分个体已知目标动态的前提下, 研究具有本质非线性动态的多智能体网络的有限时间跟踪问题. 假设本质非线性动态满足 Lipschitz 条件, 设计分布式不连续控制协议, 并应用非光滑稳定性分析方法和微分包含稳定性理论, 给出了固定和切换拓扑情况下系统实现有限时间跟踪的充分条件. 若无向拓扑在每个切换时间间隔内保持连通或有向拓扑具有生成树且强连接部分满足细致平衡条件, 则均可选取合适的控制增益使得多智能体网络在有限时间内跟踪上目标动态. 下一步将针对二阶非线性网络的有限时间控制展开研究.

## 参考文献(References)

[1] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM J of Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.  
 [2] Wang X, Hong Y G. Finite-time consensus for multi-agent networks with second order agent dynamics[C]. Proc of

17th World Congress of the Int Federation of Automatic Control. Seoul: IEEE Press, 2008: 15185-15190.

- [3] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092-2099.  
 [4] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(4): 950-955.  
 [5] Filippov A F. Differential aligns with discontinuous right-hand side[J]. American Mathematical Society Trans, 1964, 42(2): 191-231.  
 [6] Paden B E, Sastry S S. A calculus for computing filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1987, 34(1): 73-82.  
 [7] Moulay E, Perruquetti W. Finite time stability of differential inclusions[J]. IMA J of Mathematical Control and Information, 2005, 22(4): 465-475.  
 [8] Cortes J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1993-2000.  
 [9] Hui Q, Haddadb W M, Bhat S P. Finite-time semistability, Filippov systems and consensus protocols for nonlinear dynamical networks with switching topologies[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2010, 4(3): 557-573.  
 [10] Hui Q. Finite-time rendezvous algorithms for mobile autonomous agents[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(1): 201-211.  
 [11] Wu C. Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems[M]. Singapore: World Scientific, 2007: 53-60.  
 [12] 马广富, 梅杰. 有向网络下非线性多智能体系统的协调跟踪[J]. 控制与决策, 2011, 26(12): 1861-1864. (Ma G F, Mei J. Coordinated tracking for nonlinear multi-agent systems under directed networks[J]. Control and Decision, 2011, 26(12): 1861-1864.)  
 [13] Yu W, Chen G R, Cao M, et al. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, PartB: Cybernetics, 2010, 40(3): 881-891.  
 [14] Cao Y, Ren W, Chen F, et al. Finite-time consensus of multi-agent networks with inherent nonlinear dynamics[C]. Proc of the American Control Conf. San Francisco: IEEE Press, 2011: 4020-4025.  
 [15] Cortes J. Discontinuous dynamical systems: A tutorial on solutions, nonsmooth analysis and stability[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2008, 28(3): 36-73.

(下转第1501页)