

文章编号: 1001-0920(2013)11-1661-06

多胞约束 LPV 系统多面体不变集 RMPC 算法

王明昊¹, 刘刚¹, 赵鹏涛¹, 杨述华²

(1. 第二炮兵工程大学 701 教研室, 西安 710025; 2. 第二炮兵驻 211 厂 军事代表室, 北京 100076)

摘要: 针对一类输入和输出受约束且具有多胞结构的离散 LPV 系统, 提出一种基于多面体不变集的鲁棒模型预测控制 (RMPC) 算法. 选取一系列收敛于原点的离散状态点, 计算每个状态的反馈控制率, 构建相应的多面体不变集. 在每一个采样时刻, 确定包含当前状态的最小多面体不变集, 通过计算与相邻两个多面体不变集的位置关系, 执行连续的状态反馈控制率. 仿真结果表明, 相比椭圆不变集离线 RMPC 算法, 所提出算法扩大了系统的稳定区域, 取得了保守性较小的结果.

关键词: 线性变参数; 多面体不变集; 鲁棒模型预测控制; 椭圆不变集; 离线

中图分类号: TP273

文献标志码: A

RMPC algorithm for polytopic constrained LPV systems using polyhedral invariant sets

WANG Ming-hao¹, LIU Gang¹, ZHAO Peng-tao¹, YANG Shu-hua²

(1. Section 701, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China; 2. The Second Artillery Military Representative Office Stationed in Factory 211, Beijing 100076, China. Correspondent: WANG Ming-hao, E-mail: 54985963@qq.com)

Abstract: Based on the polyhedral invariant sets, a robust model predictive control algorithm is developed for an input-constrained and output-constrained polytopic linear parameter varying discrete system. A sequence of discrete states converging to the origin is chosen to compute the corresponding state feedback control laws, and also construct each polyhedral invariant sets. At each sampling time, the smallest polyhedral invariant sets that the current measured state can be embedded is determined. The continuous state feedback control laws based on the position of the current measured state between the adjacent polyhedral invariant sets are implemented. Simulation results show that, compared to the ellipsoidal off-line RMPC algorithm, the proposed algorithm yields a substantial expansion of the region stabilized and achieves a less conservative result.

Key words: linear parameter varying; polyhedral invariant sets; robust model predictive control; ellipsoidal invariant sets; off-line

0 引言

近几年, 有关线性变参数 (LPV) 系统的研究得到了控制界的高度关注. LPV 系统可以描述许多实际系统内在的非线性和时变特性, 能够用线性控制理论的方法解决非线性系统的问题, 进而设计变增益控制器. 文献 [1] 提出一切能够在陆地上、水中和太空中运动的机器都是通过变增益控制实现的. LPV 系统研究的一个方向是针对具有多胞形结构的系统, 文献 [2] 给出了将一般 LPV 系统表示成多胞形结构的方法.

模型预测控制 (MPC) 由于其能够明确有效地处

理控制中输入、输出和状态的约束而备受工业界青睐^[3], 然而因为被控系统的复杂性, 通常无法获得与系统完全一致的精确模型, 而这种模型与系统的失配可能会导致系统的控制性能变差, 甚至不稳定^[4]. 鲁棒预测控制就是在考虑模型不确定的情况下, 求解系统的最优控制率, 从而保证系统的动态性能. 近几年来, 鲁棒预测控制器综合的研究主要集中在保证稳定性的前提下, 如何降低在线计算量、提高控制性能和扩大系统初始可行域^[5-9]等几个方面. 由于凸多面体不确定系统与具有多胞形结构的 LPV 系统的相似性,

收稿日期: 2012-07-09; 修回日期: 2012-09-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61132008).

作者简介: 王明昊(1984-), 男, 博士生, 从事 LPV 系统控制理论的研究; 刘刚(1964-), 男, 教授, 博士生导师, 从事卫星应用等研究.

可以将凸多面体不确定系统的鲁棒模型预测控制思想用于 LPV 系统的控制。

在文献 [8-9] 设计的离线预测算法中, 通过选取一系列逐渐收敛到原点的离散状态, 分别计算各自的椭圆不变集及对应的控制参数, 最后选取与实测状态相邻的两个椭圆的控制参数进行凸组合得到该状态的控制率, 从而达到降低在线计算量的目的. 事实上, 系统所受到的物理约束往往是由线性不等式的形式给出的, 因而采用椭圆不变集来处理约束问题会带来较大的保守性, 减小了系统的稳定区域和控制器的初始可行域。

本文通过采用多面体不变集, 提出一种针对具有多胞形结构约束 LPV 系统的 LMI 算法. 该算法降低了由于采用椭圆不变集所带来的保守性, 增大了系统的稳定区域。

1 问题描述

考虑如下离散 LPV 系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(k)$ 为系统的状态, $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别为系统的控制输入和输出. 具有如下多胞形结构:

$$\begin{aligned} [A(k), B(k)] &\in \Omega, \\ \Omega &= \text{Co}\{[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_L, B_L]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: Ω 表示凸多面体, Co 表示多面体的凸壳, $[A_j, B_j]$ 为其凸壳的顶点. 在任意的离散时间 k , $[A(k), B(k)]$ 均在由 $[A_j, B_j]$ 围成的凸多面体内, 而且可以由其线性组合来表示, 即

$$\begin{aligned} [A(k), B(k)] &= \sum_{j=1}^L \lambda_j [A_j, B_j], \\ \sum_{j=1}^L \lambda_j &= 1, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

本文研究的目标为, 设计如下状态反馈控制器:

$$u(k+1|k) = Kx(k+1|k) \quad \min_{u(k+1|k)} \max_{[A(k), B(k)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k), \quad (4)$$

使得系统 (1) 在受到如下输入约束的情况下稳定:

$$|u_h(k+1|k)| \leq u_{h,\max}, \quad h = 1, 2, \dots, n_u; \quad (5)$$

$$|y_r(k+1|k)| \leq y_{r,\max}, \quad r = 1, 2, \dots, n_y. \quad (6)$$

且满足代价函数

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ u(k+1|k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ u(k+1|k) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中 $\Theta > 0$ 和 $R > 0$ 均为对称权系数矩阵。

文献 [10] 给出了不确定离散系统鲁棒约束 MPC 在线算法来设计状态反馈控制率, 在每一个采样时刻, 将最坏情况下代价函数的最小化问题转化为凸优化问题, 使用 LMI 工具得以解决. 其算法的具体步骤在定理 1 中给出。

定理 1 考虑离散 LPV 系统 (1), 在每一个采样时刻 k , 最小化 MPC 代价函数 $J_\infty(k)$ 在最坏情况下的上界 γ , 同时闭环系统鲁棒稳定的状态反馈控制率 $K = YQ^{-1}$, 且其子集 $\varepsilon = \{x|x^T Q^{-1} x \leq 1\}$ 为一椭圆不变集. 其中 Y 和 Q 通过求解如下线性矩阵不等式获得:

$$\begin{aligned} \min_{\gamma, Y, Q} \gamma. \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ A_j Q + B_j Y & Q & * & * \\ \Theta^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \\ \forall j = 1, 2, \dots, L; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} X & * \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$X_{hh} \leq u_{h,\max}^2, \quad h = 1, 2, \dots, n_u; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S & * \\ (A_j Q + B_j Y)^T C^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad S_{rr} \leq y_{r,\max}^2, \\ r = 1, 2, \dots, n_y, \quad \forall j = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (11)$$

其中: 式 (8) 构建了椭圆不变集, 式 (9) 保证了闭环系统的鲁棒稳定性, 式 (10) 和 (11) 分别使闭环系统满足输入和输出约束。

在利用定理 1 进行控制器计算时, 要求在每个离散时间 k 上通过求解式 (8)~(11) 进行优化计算, 在线计算量大, 而且随着凸多面体系统顶点数的增加, 会进一步增大在线计算量, 这与当前系统控制器设计的实时性要求相背离. 另一方面, 由于具有多胞结构的 LPV 系统与凸多面体不确定系统具有相似性, 可以将其思想用于具有多胞结构的 LPV 系统控制。

2 基于多面体不变集的多胞受约束 LPV 系统离线 RMPC 算法

文献 [8-9] 提出了一种离线鲁棒约束 MPC 算法. 在算法的离线部分, 利用一系列离散的状态点构建嵌套渐近稳定不变椭圆集, 对应每个不变椭圆集计算出对应的控制率; 在其在线部分, 通过二分法搜索在每一个离散时间点上相邻最近的两个椭圆不变集, 通过其凸组合得到系统最终的控制率. 本文将采用这种离

线计算的思想, 同时采用多面体不变集, 在每一个离散时刻, 选取能够覆盖该状态的最小多面体不变集, 实施相应的状态反馈控制率, 由此降低因使用椭圆不变集带来的保守性.

定义 1(多面体不变集)^[9] 集合 $S = \{x | Mx \leq d\}$, 如果 $x(k) \in S$, 且 $x(k+i) \in S, \forall i = 1, 2, \dots, \infty$, 则称 S 为多面体不变集.

算法 1 离线部分的计算.

Step 1: 选取一系列逐渐收敛到原点的离散状态点 $x_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 通过求解如下线性矩阵不等式得到每个离散状态相应的状态反馈控制率 $K_i = Y_i Q_i^{-1}$:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma_i, Y_i, Q_i, X_i, S_i} \gamma_i. \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1 & * \\ x_i & Q_i \end{bmatrix} \geq 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Q_i & * & * & * \\ A_j Q_i + B_j Y_i & Q_i & * & * \\ \theta^{1/2} Q_i & 0 & \gamma_i I & * \\ R^{1/2} Y_i & 0 & 0 & \gamma_i I \end{bmatrix} \geq 0, \\ & \forall j = 1, 2, \dots, L; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X_1 & * \\ Y_i^T & Q_i \end{bmatrix} \geq 0, \\ & X_{1,hh} \leq u_{h,\max}^2, h = 1, 2, \dots, n_u; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Z_1 & * \\ (A_j Q_i + B_j Y_i)^T C^T & Q_i \end{bmatrix} \geq 0, \\ & Z_{1,rr} \leq y_{r,\max}^2, \\ & r = 1, 2, \dots, n_y, \forall j = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (15)$$

Step 2: 通过 Step 1, 可以得到一系列状态反馈控制率 $K_i = Y_i Q_i^{-1}, i \in \{1, 2, \dots, N\}$. 对于每个 K_i , 通过以下步骤构建相应的多面体不变集 $S_i = \{x | M_i x \leq d_i\}$.

Step 2.1: 令

$$\begin{aligned} M_i &= [C^T, -C^T, K_i^T, -K_i^T]^T, \\ d_i &= [y_{\max}^T, -y_{\min}^T, y_{\max}^T, -y_{\min}^T]^T, \end{aligned}$$

M_i 的第 m 行记为 $M_{i,m}$, d_i 的第 m 行记为 $d_{i,m}$, 令 $m = 1$.

Step 2.2: 通过下式判断 $M_{i,m}(A_j + B_j K_i)x \leq d_{i,m}$ 相对于约束 $M_i x \leq d_i$ 是否是冗余的:

$$\begin{aligned} & \max_x W_{i,m,j}. \\ \text{s.t.} & W_{i,m,j} = M_{i,m}(A_j + B_j K_i)x - d_{i,m}; \\ & M_i x \leq d_i, j = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (16)$$

如果 $W_{i,m,j} > 0$, 则 $M_{i,m}(A_j + B_j K_i)x \leq d_{i,m}$ 相对于

约束 $M_i x \leq d_i$ 不是冗余的, 令

$$M_i = [M_i^T, (M_{i,m}(A_j + B_j K_i))^T]^T d_i = [d_i^T, d_{i,m}^T]^T, \text{ 并将其加入到 } M_i \text{ 和 } d_i \text{ 中.}$$

Step 2.3: 令 $m = m + 1$, 如果 $m \leq M$, 则返回 Step 2.2, 否则就退出.

在线部分的计算如下: 在每一个离散时间 k , 确定包含该时刻测量状态值的最小多面体不变集 $S_i = \{x | M_i x \leq d_i\}$, 并对系统实施相应的状态反馈控制率 $u(k|k) = K_i x(k|k)$.

注 1 在进行离散状态点 $x_i (i \in \{1, 2, \dots, N\})$ 的选择时, 第 1 个离散点应稍大于系统的初值 $x(0)$, 这是为了满足初值点在所构建的一系列多面体不变集中最大的不变集中, 同时必须保证 x_{i+1} 与原点之间的距离小于 x_i 与原点之间的距离. 这是为了保证所构造的多面体不变集是逐层嵌套的, 即 $S_{i+1} \subset S_i$. 由此, 系统的状态 x_i 位于不变集 S_i 中并趋近于 S_{i+1} , 并最终收敛到原点.

注 2 所选择的离散状态点 $x_i (i \in \{1, 2, \dots, N\})$ 的数量, 同时也是多面体不变集 $S_i (i \in \{1, 2, \dots, N\})$ 的数量, 将直接影响到系统的控制性能. 通过增加多面体不变集的数目, 将会有更大的自由来根据当前状态与原点之间的距离选择变化的反馈矩阵, 从而改善系统的控制性能. 需要注意的是, 多面体不变集仅仅表示控制率能稳定的范围, 即控制率可以保证当前的量测状态最终被驱动到原点, 并不代表使性能指标最优的范围, 因为使性能指标达到最优的范围是由其椭圆不变集确定的.

定理 2 给定 LPV 系统 (1), 初始状态 $x(0) \in S_1$, 则由算法 1 给出的控制器能够保证闭环系统的鲁棒稳定性.

证明 在离线部分的计算中, 将所有非冗余的 $M_{i,m}(A_j + B_j K_i) \leq d_{i,m}$ 添加至由 (M_i, d_i) 构建的多面体不变集中, 从而由初始状态确定的多面体不变集 $S_i = \{x | M_i x \leq d_i\}$ 将保证未来所有状态在满足输入和输出约束的情况下同样在该不变集中.

令 $P(i, k) = \gamma Q(i, k)^{-1}$, 由 Schur 补, 式 (9) 可等价

$$\begin{aligned} & x(k+i|k)^T \{ [A(k+i) + B(k+i)K_i]^T P(i, k) \times \\ & [A(k+i) + B(k+i)K_i] - P(i, k) \} x(k+i|k) \leq \\ & - \{ x(k+i|k)^T \theta x(k+i|k) + \\ & u(k+i|k)^T R x(k+i|k) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

因此, $V(i, k) = x(k+i|k)^T P(i, k)x(k+i|k)$ 是一个严格递减 Lyapunov 函数, 状态反馈控制率 K_i 使闭环系统稳定. \square

在算法 1 中, 当量测状态在两个同样相邻的多面体不变集中时, 得到的控制率是相同的, 且在不变集的边界上, 控制器不是连续的, 即所得到的控制器是一系列离散参数. 为了进一步降低保守性, 提出以下算法来构建连续的状态反馈率.

算法 2 离线部分与算法 1 中的离线部分相同, 并将计算得到的 Q_i^{-1} , $K_i (= Y_i Q_i^{-1})$, M_i 和 d_i 存储在一个 look-up 表中. 如果对于每个 x_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 都有

$$Q_i^{-1} - (A_j + B_j K_{i+1})^T Q_i^{-1} (A_j + B_j K_{i+1}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, L, \quad (18)$$

则在线部分的计算如下: 在每一个离散时刻 k , 给定系统当前的测量状态 $x(k)$, 在 look-up 表中, 寻找包含当前状态的最小多面体不变集 $S_i = \{x | M_i x \leq d_i\}$. 从原点向状态 $x(k)$ 作投影 $\boldsymbol{x}(k)$, 由于多面体不变集是闭集, $\boldsymbol{x}(k)$ 与 S_i 必交于一点, 记为 $S_i(k)$. 如果 $i \neq N$, 同理, 将与 S_{i+1} 交于一点, 记为 $S_{i+1}(k)$, 令

$$\alpha_i(k) = \frac{\|\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}_{i+1}(k)\|_2}{\|\boldsymbol{S}_i(k) - \boldsymbol{S}_{i+1}(k)\|_2}, \quad (19)$$

则当前状态的控制率为

$$u(k) = (\alpha_i(k) K_i + (1 - \alpha_i(k)) K_{i+1}) x(k); \quad (20)$$

如果 $i = N$, 则当前的控制率为

$$u(k) = K_N x(k). \quad (21)$$

定理 3 给定系统 (1), 初始状态 $x(0) \in S_1$, 则由算法 2 给出的控制器能够保证闭环系统的鲁棒稳定性.

证明 将控制器代入系统中, 可得闭环系统

$$x(k+1) = \begin{cases} (A(k) + B(k)K(\alpha_i(k)))x(k), \\ i \neq N, M_i x(k) \leq d_i, M_{i+1} x(k) \geq d_{i+1}; \\ (A(k) + B(k)K_N)x(k), M_N x(k) \leq d_N. \end{cases} \quad (22)$$

其中 $K(\alpha_i(k)) = \alpha_i(k) K_i + (1 - \alpha_i(k)) K_{i+1}$, $\alpha_i(k) (0 \leq \alpha_i(k) \leq 1)$ 为满足式 (19) 的解.

令

$$\begin{aligned} K(\alpha_i) &= \alpha_i K_i + (1 - \alpha_i) K_{i+1}, \\ Q(\alpha_i)^{-1} &= \alpha_i Q_i^{-1} + (1 - \alpha_i) Q_{i+1}^{-1}, \\ X(\alpha_i) &= \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i) X_{i+1}, \\ Z(\alpha_i) &= \alpha_i Z_i + (1 - \alpha_i) Z_{i+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

对每个 x_i , 由式 (13) 和 (18) 可得

$$\begin{bmatrix} Q_i^{-1} & (A_j + B_j K(\alpha_i))^T \\ A_j + B_j K(\alpha_i) & Q_i \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (24)$$

同时, 由 x_i 和 x_{i+1} 各自分别满足的式 (14) 和 (15), 可

保证存在对称矩阵 $X(\alpha_i)$ 和 $Z(\alpha_i)$ 满足如下 LMI:

$$\begin{bmatrix} X(\alpha_i) & * \\ Y_i^T & Q_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad X(\alpha_i)_{hh} \leq u_{h,\max}^2, \quad h = 1, 2, \dots, n_u; \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} Z(\alpha_i) & * \\ (A_j Q_i + B_j Y_i)^T C^T & Q_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z(\alpha_i)_{rr} \leq y_{r,\max}^2, \quad r = 1, 2, \dots, n_y, \quad \forall j = 1, 2, \dots, L. \quad (26)$$

由此可知, 状态反馈率 $u(x) = K(\alpha_i(k))x(k)$ 将保证状态在不变集 S_i 中, 并在满足输入和输出约束的情况下趋近于 S_{i+1} . 最终, 状态反馈控制率 $u(x) = K_N x(k)$ 将状态包含于 S_N 中并趋近于原点. \square

推论 1 算法 2 中的状态反馈矩阵 K 是状态 x 的连续函数.

证明 算法 2 中的状态反馈矩阵为

$$K(x) = \begin{cases} \alpha_i K_i + (1 - \alpha_i) K_{i+1}, \\ M_i x(k) \leq d_i, M_{i+1} x(k) > d_{i+1}, \quad i \neq N; \\ K_N, \quad M_N x(k) \leq d_N. \end{cases} \quad (27)$$

分别考虑以下两个带状区域

$$\begin{aligned} \xi_{i-1} &= \{x | M_{i-1} x \leq d_{i-1}, M_i x > d_i\}, \\ \xi_i &= \{x | M_i x \leq d_i, M_{i+1} x > d_{i+1}\}. \end{aligned}$$

由式 (19) 可知

$$\alpha_i = \frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{S}_{i+1}\|_2}{\|\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_{i+1}\|_2},$$

因此在 ξ_i 中, α_i 是关于 x 的连续函数, $K(\alpha_i)$ 同样也是. 同理可证, 在 ξ_{i-1} 中, $K(\alpha_{i-1})$ 也是关于 x 的连续函数. 在 ξ_i 与 ξ_{i-1} 的分界线上时, 当 $x \in \xi_{i-1}$ 时, $M_i x - d_i \rightarrow 0$ 意味着 $\alpha_{i-1} \rightarrow 0$; 当 $x \in \xi_i$ 时, $M_i x - d_i \rightarrow 0$ 意味着 $\alpha_i \rightarrow 1$, 即

$$\lim_{\alpha_{i-1} \rightarrow 0} K(\alpha_{i-1}) = \lim_{\alpha_i \rightarrow 1} K(\alpha_i) = K_i.$$

由此可知, 状态反馈矩阵 K 是状态 x 的连续函数. \square

3 仿真实例和分析

以文献 [8] 中的经典角位置系统为仿真对象, 检验所提出算法的有效性. 该算法的运动方程如下:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \theta(k+1) \\ \dot{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 - 0.1\alpha(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1k \end{bmatrix} u(k) \triangleq \\ &A(k)x(k) + Bu(k), \\ y(k) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \end{bmatrix} = Cx(k). \end{aligned} \quad (28)$$

其中: $k = 0.787 \text{ rad}/(\text{volts}/\text{sec}^2)$, $0.1 \text{ sec}^{-1} \leq \alpha(k) \leq 10 \text{ sec}^{-1}$.

由此, 本文采用如下多胞形 LPV 系统表示: $A(k) \in \Omega = \text{Co}\{A_1, A_2\}$. 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

控制器设计的目标是将状态 θ 从 0.2 调节至原点, 代价函数由式 (5) 给定, 输入约束 $|u(k)| \leq 2\text{volts}$.

其中: $\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = 0.00002$.

选取 7 个离散的状态点

$$x_i = \{(0.35, 0.35), (0.30, 0.30), (0.25, 0.25), (0.20, 0.20), (0.15, 0.15), (0.10, 0.10), (0.05, 0.05)\}, i = 1, 2, \dots, 7.$$

由式 (12)~(15) 计算相应的状态反馈增益矩阵, 图 1 给出了每个离散状态点所对应的椭圆不变集, 图 2 为每个离散状态所对应的多面体不变集. 由图 3 可知, 对于每个离散的状态, 多面体不变集的稳定区域相对于椭圆不变集有了明显的扩大, 这主要是因为文献 [6] 中的椭圆不变集仅是由系统约束直接转化成的多面体不变集的近似.

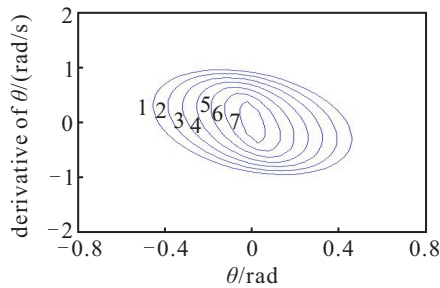


图 1 7 个离散点的椭圆不变集

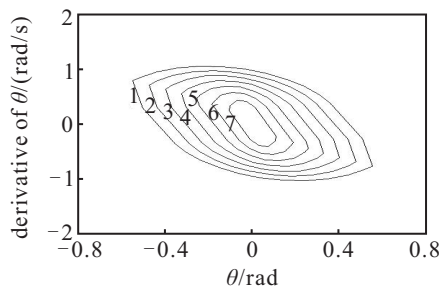


图 2 7 个离散点的多面体不变集

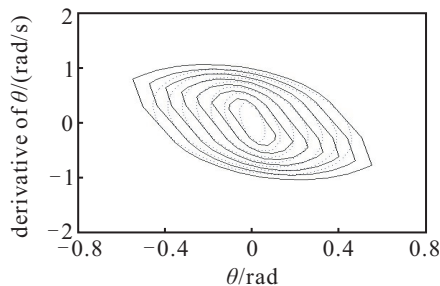


图 3 椭圆不变集与多面体不变集对比

令 $\alpha(k) = 5.05 + 4.95 \sin(k)$, 在 $[0.1, 10]$ 上变化, 闭环系统的状态曲线如图 4 和图 5 所示. 由图 4 和图 5

可见, 采用本文算法所得状态的收敛速度要明显优于文献 [6] 中的算法. 这是因为采用了稳定区域明显扩大的多面体不变集, 并使用较大的反馈增益将系统状态收敛至原点, 如图 6 所示.

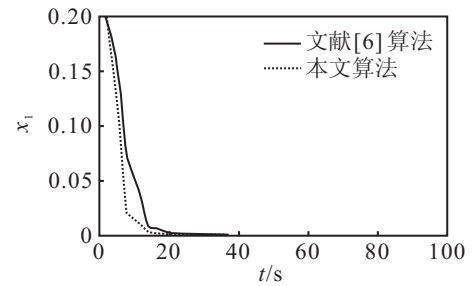


图 4 角位置响应

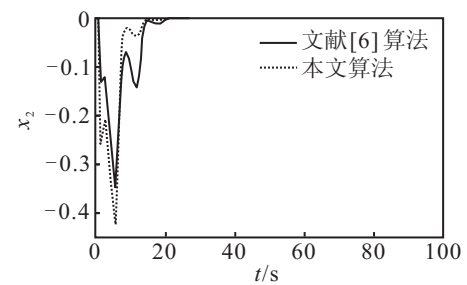


图 5 角速度响应

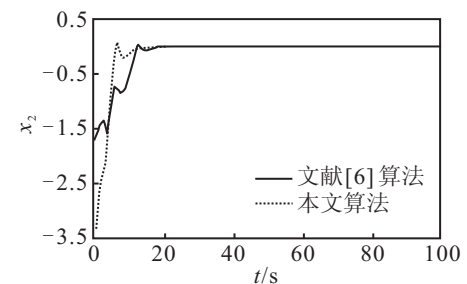


图 6 控制输入量对比

4 结 论

本文针对一类具有多胞形结构的约束 LPV 系统, 提出了一种基于多面体不变集的离线 RMPC 算法. 该算法分为离线计算和在线计算两部分. 离线部分: 通过选取一系列收敛向原点的离散状态点, 计算每个状态的反馈率, 同时构建相应的多面体不变集. 在线部分: 在每一个采样时刻, 确定包含当前状态的最小多面体不变集, 通过当前状态与相邻两个多面体不变集的位置关系, 执行连续的状态反馈控制率. 仿真结果表明, 相比椭圆不变集离线 RMPC, 本文算法扩大了系统的稳定区域, 并且加快了状态的收敛速度.

参考文献(References)

- [1] Rugh W, Shamma J. Research on gain scheduling[J]. Automatica, 2000, 36(10): 1401-1425.
- [2] Petres Z. Polytopic decomposition of linear parameter-varying models by tensor-product model

- transformation[D]. Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2006.
- [3] Kanev S, Verhaegen M. Robust asymptotically stable finite-horizon MPC[J]. *Automatica*, 2006, 42(12): 2189-2194.
- [4] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993: 1-10.
(Xi Y G. Model predictive control[M]. Beijing: National Defense Publishing House, 1993: 1-10.)
- [5] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J]. *自动化学报*, 2008, 34(10): 1225-1234.
(Xi Y G, Li D W. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1225-1234.)
- [6] Wan Z Y, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 837-846.
- [7] 丁宝仓, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制综合[J]. *自动化学报*, 2006, 32(2): 304-310.
(Ding B C, Yang P. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal performance cost[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(2): 304-310.)
- [8] 丁宝仓, 邹涛. 约束时变不确定系统的输出反馈预测控制综合[J]. *自动化学报*, 2007, 33(1): 78-83.
(Ding B C, Zou T. Synthesizing output feedback predictive control for constrained uncertain time-varying discrete systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(1): 78-83.)
- [9] Wan Z Y, Kothare M V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities[J]. *J of Process Control*, 2002, 12(2): 763-774.
- [10] 李小军, 丁宝仓, 牛永肖. 基于部分闭环优化的约束鲁棒调节器的新方法[C]. 2006 中国控制与决策学术年会. 天津, 2006: 133-136.
(Li X J, Ding B C, Niu Y X. A synthesis approach of constrained robust regulation based on partial closed-loop optimization[C]. Proc of 2006 Chinese Control and Decision Conf. Tianjin, 2006: 133-136.)
- [11] 牛永肖, 丁宝仓, 孙鹤旭. 输入非线性系统的两步法预测控制的鲁棒稳定性[J]. *控制与决策*, 2006, 21(4): 457-461.
(Niu Y X, Ding B C, Sun H X. Robust stability of two-step predictive control for systems with input nonlinearities[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(4): 457-461.)
- [12] Gilbert E G, Tan K T. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(9): 1008-1020.
- [13] Kothare M V, Balakrishnan V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [14] Pluymers B, Rossiter J A, Suykens J A K, et al. The efficient computation of polyhedral invariant sets for linear systems with polytopic uncertainty[C]. Proc of the American Control Conf. Portland, 2005: 1296-1304.
- [15] Bumroongsri P, Kheawhom S. An off-line robust MPC algorithm for uncertain polytopic discrete-time systems using polyhedral invariant sets[J]. *J of Process Control*, 2012, 22(5): 975-983.
- [16] 席裕庚, 朱红林, 李德伟. 基于多面体不变集的离线鲁棒预测控制器综合[J]. *控制与决策*, 2009, 24(2): 187-191.
(Xi Y G, Zhu H L, Li D W. Synthesizing off-line robust model predictive control based on polyhedron invariant set[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(2): 187-191.)
- [17] 高宪文, 张立, 王介生, 等. 变约束高效预测控制[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(6): 855-860.
(Gao X W, Zhang L, Wang J S, et al. Efficient model-predictive control with variable constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 855-860.)

~~~~~

(上接第1660页)

- [18] Wu J, Sun B L, Liang C Y, et al. A linear programming model for determining ordered weighted averaging operator weights with maximal Yager's entropy[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2009, 57(3): 742-747.
- [19] Xia M M, Xu Z S. Entropy/cross entropy-based group decision making under intuitionistic fuzzy environment[J]. *Information Fusion*, 2012, 13(1): 31-47.
- [20] Xu Z S. On method for uncertain multiple attribute decision making problems with uncertain multiplicative preference information on alternatives[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2005, 4(2): 131-139.