

文章编号: 1001-0920(2013)11-1745-06

## 离散LPV重复过程的 $l_2-l_\infty$ 动态输出反馈控制

李艳辉, 李珊珊, 赵 辉

(东北石油大学 电气信息工程学院, 黑龙江 大庆 163318)

**摘要:** 探究离散线性参数变化(LPV)重复过程的 $l_2-l_\infty$ 动态输出反馈控制问题. LPV重复过程是一类复杂的时变2D系统. 对于整个参数变化空间, 传统方法是基于二次稳定框架设计过程的控制器, 具有较大的保守性. 这里利用参数依赖Lyapunov函数, 设计离散LPV重复过程的参数依赖鲁棒 $l_2-l_\infty$ 动态输出反馈控制器, 可确保闭环离散LPV重复过程沿通道渐近稳定, 且具有一定的 $l_2-l_\infty$ 扰动抑制水平. 最后, 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 重复过程; LPV系统; 动态输出反馈控制;  $l_2-l_\infty$ 性能; 参数线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标志码: A

### $l_2-l_\infty$ dynamic output feedback control for discrete LPV repetitive processes

LI Yan-hui, LI Shan-shan, ZHAO Hui

(College of Electrical and Information Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China.  
Correspondent: LI Yan-hui, E-mail: ly\_hui@hotmail.com)

**Abstract:** The  $l_2-l_\infty$  dynamic output feedback control problem is investigated for discrete LPV repetitive processes which are a kind of complicated time-varying 2D systems. Traditionally, based on the quadratic stability framework, a comment controller which has usually large conservatism is designed for the whole parameter variation space. Therefore, the robust  $l_2-l_\infty$  dynamic output feedback controller with parameter-dependent is designed by using parameter-dependent Lyapunov function, which reduces the conservatism of the design, and guarantees that the closed-loop discrete LPV repetitive process is asymptotically stable along the pass and has a certain  $l_2-l_\infty$  disturbance rejection level. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed design scheme.

**Key words:** repetitive processes; linear parameter-varying systems; dynamic output feedback control;  $l_2-l_\infty$  performance; parameterized linear matrix inequality

## 0 引言

重复过程是一类具有较强工程背景的特殊二维系统<sup>[1]</sup>, 已在长壁法采煤、金属轧制过程以及迭代学习控制中有重要的应用<sup>[2]</sup>. 近年来, 线性重复过程的研究受到国内外学者的广泛关注. 例如: 文献[3]采用线性矩阵不等式方法研究了其稳定性和镇定性问题; 文献[4]采用线性凸优化方法研究了其滤波问题; 文献[5]研究了其 $H_\infty$ 模型降阶问题. LPV系统普遍存在于化工过程、机器人系统等许多实际过程中, 是一类重要的时变系统<sup>[6]</sup>. 在一维系统的稳定性分析和控制器设计方面已取得了较多研究成果<sup>[6-7]</sup>, 但在二维系统特别是重复过程的分析与综合中, 仍然是富有挑

战性的问题; 因此, 针对线性参数变化重复过程的研究具有重要的理论与工程意义.

另外, 控制问题一直是工程应用中备受关注的领域之一. 在许多实际问题中, 系统的状态往往是不能直接测量的, 有时即使可以直接测量, 但考虑到实施控制的成本和系统可靠性等因素, 难以应用状态反馈控制律来对系统进行控制; 因此, 输出反馈控制方式是一种有效的解决途径, 对其进行研究具有十分重要的工程价值<sup>[8-9]</sup>.

本文扩展一维LPV系统的研究成果, 探究离散LPV重复过程的 $l_2-l_\infty$ 动态输出反馈控制问题. 假设过程参数实时可测, 且在某一紧集上有界变化. 首先

收稿日期: 2012-07-10; 修回日期: 2012-10-09.

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12511002).

作者简介: 李艳辉(1970-), 女, 教授, 博士后, 从事鲁棒控制、智能控制等研究; 李珊珊(1989-), 女, 硕士生, 从事鲁棒控制、滤波的研究.

基于参数依赖 Lyapunov 函数, 给出了容许的  $l_2$ - $l_\infty$  动态输出反馈控制器存在的充分条件, 该充分条件存在参数依赖 Lyapunov 函数矩阵与系统矩阵之间的乘积项, 是一个非线性问题, 通过引入一个松弛矩阵实现解耦目的. 基于新的 PLMI 条件, 容许的控制器设计问题被转化为受 PLMI 约束的凸优化问题, 是个无穷维问题; 利用近似基函数和网格技术获得期望的控制器可以使闭环离散 LPV 重复过程沿通道渐近稳定且具有一定的  $l_2$ - $l_\infty$  扰动抑制水平. 通过仿真验证了所提出控制器设计方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下的离散 LPV 重复过程:

$$\begin{cases} x_{k+1,p+1} = A(r_{k+1,p})x_{k+1,p} + B_0(r_{k,p})y_{k,p} + \\ \quad B_1(r_{k+1,p})u_{k+1,p} + B_2(r_{k+1,p})w_{k+1,p}; \\ y_{k+1,p} = C(r_{k+1,p})x_{k+1,p} + D_0(r_{k,p})y_{k,p} + \\ \quad D_1(r_{k+1,p})u_{k+1,p} + D_2(r_{k+1,p})w_{k+1,p}; \\ z_{k+1,p} = E(r_{k+1,p})x_{k+1,p} + F_0(r_{k,p})y_{k,p} + \\ \quad F_1(r_{k+1,p})w_{k+1,p}; \\ v_{k+1,p} = G(r_{k+1,p})x_{k+1,p} + H_0(r_{k,p})y_{k,p}; \\ x_{k+1,0} = d_{k+1}, \forall k \geq 0; \\ y_{0,p} = g(p), \forall 0 \leq p \leq \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\alpha$  为通道长度;  $x_{k+1,p} \in R^n$  为过程状态向量;  $y_{k,p} \in R^m$  为通道剖面向量;  $u_{k+1,p} \in R^l$  为控制输入;  $w_{k+1,p} \in R^q$  为扰动输入, 并假定其为能量有界, 即  $w_{k+1,p} \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ ;  $z_{k+1,p} \in R^l$  为测量输出;  $v_{k+1,p} \in R^l$  为控制输出;  $d_{k+1} \in R^n$  为一个已知的常数向量;  $g(p) \in R^m$  为一个关于变量  $p$  的函数向量;  $A(\cdot), B_0(\cdot), B_1(\cdot), B_2(\cdot), C(\cdot), D_0(\cdot), D_1(\cdot), D_2(\cdot), E(\cdot), F_0(\cdot), F_1(\cdot), G(\cdot)$  和  $H_0(\cdot)$  为时变参数向量  $r_{k,p}$  的函数; 时变参数向量

$$r_{k,p} = [r_{k,p}^1 \quad r_{k,p}^2 \quad \cdots \quad r_{k,p}^s]^T$$

为变量  $k$  和  $p$  的函数,  $r_{k,p}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) 实时可测且有界. 为了表述方便, 下面分别用  $r, r_1$  和  $r_2$  表示  $r_{k,p}, r_{k+1,p}$  和  $r_{k+1,p+1}$ .

设计如下形式的依赖于参数的全阶动态输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \phi_{k+1,p+1} = A_c(r_1)\phi_{k+1,p} + B_{0c}(r)\varphi_{k,p} + \\ \quad B_c(r_1)z_{k+1,p}, \\ \varphi_{k+1,p} = C_c(r_1)\phi_{k+1,p} + D_{0c}(r)\varphi_{k,p} + \\ \quad D_c(r_1)z_{k+1,p}, \\ u_{k+1,p} = G_c(r_1)\phi_{k+1,p} + H_{0c}(r)\varphi_{k,p} + \\ \quad H_c(r_1)z_{k+1,p}. \end{cases} \quad (2)$$

其中: 在第  $k+1$  个通道上,  $\phi_{k+1,p} \in R^n$  为控制器的状态向量;  $\varphi_{k,p} \in R^m$  为控制器的通道剖面向量;  $A_c(r_1), B_{0c}(r), B_c(r_1), C_c(r_1), D_{0c}(r), D_c(r_1), G_c(r_1), H_{0c}(r), H_c(r_1)$  为待设计控制器的参数矩阵.

由式 (1) 和 (2) 可得闭环离散 LPV 重复过程为

$$\begin{cases} \xi_{k+1,p+1} = \bar{A}(r_1)\xi_{k+1,p} + \bar{B}_0(r)\zeta_{k,p} + \\ \quad \bar{B}_1(r_1)w_{k+1,p}, \\ \zeta_{k+1,p} = \bar{C}(r_1)\xi_{k+1,p} + \bar{D}_0(r)\zeta_{k,p} + \\ \quad \bar{D}_1(r_1)w_{k+1,p}, \\ v_{k+1,p} = \bar{G}(r_1)\xi_{k+1,p} + \bar{H}_0(r)\zeta_{k,p}. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_{k+1,p} &= [x_{k+1,p}^T, \phi_{k+1,p}^T]^T, \quad \zeta_{k,p} = [y_{k,p}^T, \varphi_{k,p}^T]^T, \\ \bar{A}(r_1) &= \begin{bmatrix} A(r_1) + B_1(r_1)H_c(r_1)E(r_1) & B_1(r_1)G_c(r_1) \\ B_c(r_1)E(r_1) & A_c(r_1) \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_0(r) &= \begin{bmatrix} B_0(r) + B_1(r_1)H_c(r_1)F_0(r) & B_1(r_1)H_{0c}(r) \\ B_c(r_1)F_0(r) & B_{0c}(r) \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_1(r_1) &= \begin{bmatrix} B_2(r_1) + B_1(r_1)H_c(r_1)F_1(r_1) \\ B_c(r_1)F_1(r_1) \end{bmatrix}, \\ \bar{C}(r_1) &= \begin{bmatrix} C(r_1) + D_1(r_1)H_c(r_1)E(r_1) & D_1(r_1)G_c(r_1) \\ D_c(r_1)E(r_1) & C_c(r_1) \end{bmatrix}, \\ \bar{D}_0(r) &= \begin{bmatrix} D_0(r) + D_1(r_1)H_c(r_1)F_0(r) & D_1(r_1)H_{0c}(r) \\ D_c(r_1)F_0(r) & D_{0c}(r) \end{bmatrix}, \\ \bar{D}_1(r_1) &= \begin{bmatrix} D_2(r_1) + D_1(r_1)H_c(r_1)F_1(r_1) \\ D_c(r_1)F_1(r_1) \end{bmatrix}, \\ \bar{G}(r_1) &= [G(r_1) \quad 0], \quad \bar{H}_0(r) = [H_0(r) \quad 0]. \end{aligned} \quad (4)$$

本文的研究目的为: 针对重复过程 (1) 设计形如式 (2) 的全阶动态输出反馈控制器, 使得闭环重复过程 (3) 沿通道渐近稳定且满足  $l_2$ - $l_\infty$  性能约束, 即

$$\|v_{k+1,p}\|_\infty < \gamma \|w_{k+1,p}\|_2, \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \|v_{k+1,p}\|_\infty &\triangleq \sqrt{\sup_{\forall k \geq 0, p \in [0, \alpha]} v_{k+1,p}^T v_{k+1,p}}, \\ \|w_{k+1,p}\|_2 &\triangleq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\alpha-1} w_{k+1,p}^T w_{k+1,p}}. \end{aligned}$$

## 2 主要结果

首先给出闭环离散 LPV 重复过程 (3) 沿通道渐近稳定且满足  $l_2$ - $l_\infty$  性能约束的充分条件, 该条件为后续动态输出反馈控制器的设计奠定了基础.

### 2.1 闭环离散 LPV 重复过程性能分析

**定理 1** 考虑闭环重复过程 (3), 给定标量  $\gamma > 0$ , 如果存在矩阵  $P(r_1) > 0, Q > 0$ , 使得下面的矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P(r_1) & 0 & 0 & \bar{A}^T(r_1)P(r_2) & \bar{C}^T(r_1)Q \\ * & -Q & 0 & \bar{B}_0^T(r)P(r_2) & \bar{D}_0^T(r)Q \\ * & * & -I & \bar{B}_1^T(r_1)P(r_2) & \bar{D}_1^T(r_1)Q \\ * & * & * & -P(r_2) & 0 \\ * & * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -P(r_1) & 0 & \bar{G}^T(r_1) \\ * & -Q & \bar{H}_0^T(r) \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

则闭环离散 LPV 重复过程 (3) 沿通道渐近稳定且具有一定  $l_2$ - $l_\infty$  扰动抑制水平  $\gamma$ .

**证明** 选取如下 Lyapunov 函数:

$$V(k, p) = V_1(p, k) + V_2(k, p). \quad (8)$$

其中

$$V_1(p, k) = \xi_{k+1,p}^T P(r_1) \xi_{k+1,p},$$

$$V_2(k, p) = \zeta_{k,p}^T Q \zeta_{k,p},$$

这里  $P(r_1)$  和  $Q$  为待定的矩阵. 考虑如下差分:

$$\Delta V(k, p) = \Delta V_1(p, k) + \Delta V_2(k, p). \quad (9)$$

其中

$$\Delta V_1(p, k) = \xi_{k+1,p+1}^T P(r_{k+1,p+1}) \xi_{k+1,p+1} - \xi_{k+1,p}^T P(r_{k+1,p}) \xi_{k+1,p},$$

$$\Delta V_2(k, p) = \zeta_{k+1,p}^T Q \zeta_{k+1,p} - \zeta_{k,p}^T Q \zeta_{k,p}.$$

根据闭环离散 LPV 重复过程 (3) 及参数变化轨迹, 经过适当的数值计算可得, 当扰动输入  $w_{k+1,p} = 0$  时, 有

$$\Delta V(k, p) = \eta_{k,p}^T \Pi_1 \eta_{k,p}. \quad (10)$$

其中

$$\eta_{k,p} = [\xi_{k+1,p}^T \quad \zeta_{k,p}^T]^T, \quad \Pi_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ * & A_{22} \end{bmatrix}.$$

这里

$$A_{11} = \bar{A}^T(r_1)P(r_2)\bar{A}(r_1) - P(r_1) + \bar{C}^T(r_1)Q\bar{C}(r_1),$$

$$A_{12} = \bar{A}^T(r_1)P(r_2)\bar{B}_0(r) + \bar{C}^T(r_1)Q\bar{D}_0(r),$$

$$A_{22} = \bar{B}_0^T(r)P(r_2)\bar{B}_0(r) + \bar{D}_0^T(r)Q\bar{D}_0(r) - Q.$$

利用 Schur 补引理, 由式 (6) 可推出  $\Pi_1 < 0$ ; 又由于  $\eta_{k,p} = [\xi_{k+1,p}^T \quad \zeta_{k,p}^T]^T \neq 0$  可得  $\Delta V(k, p) < 0$ ; 因此, 由 Lyapunov 稳定性理论可知, 闭环离散 LPV 重复过程 (3) 沿通道是渐近稳定的.

下面证明闭环离散 LPV 重复过程 (3) 满足  $l_2$ - $l_\infty$  性能约束, 对于  $\forall k \geq 0, \forall 0 \leq p \leq \alpha$ , 考虑

$$J = V(k, p) - \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{p-1} w_{\mu+1,\beta}^T w_{\mu+1,\beta}. \quad (11)$$

假定在零初始条件下, 即

$$\begin{cases} \xi_{k+1,0} = 0, \quad \forall k \geq 0; \\ \zeta_{0,p} = 0, \quad \forall 0 \leq p \leq \alpha. \end{cases}$$

有如下公式成立:

$$J = V(k, p) - V(0, 0) - \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{p-1} w_{\mu+1,\beta}^T w_{\mu+1,\beta} =$$

$$\sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{p-1} \Phi_{\mu,\beta}^T \Pi_2 \Phi_{\mu,\beta}.$$

其中

$$\Phi_{\mu,\beta} = [\xi_{\mu+1,\beta}^T \quad \zeta_{\mu,\beta}^T \quad w_{\mu+1,\beta}^T]^T,$$

$\Pi_2 =$

$$\begin{bmatrix} -P(r_{\mu+1,\beta}) & 0 & 0 \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T(r_{\mu+1,\beta}) \\ \bar{B}_0^T(r_{\mu,\beta}) \\ \bar{B}_1^T(r_{\mu+1,\beta}) \end{bmatrix} (-P(r_{\mu+1,\beta+1})) \begin{bmatrix} \bar{A}^T(r_{\mu+1,\beta}) \\ \bar{B}_0^T(r_{\mu,\beta}) \\ \bar{B}_1^T(r_{\mu+1,\beta}) \end{bmatrix}^T -$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}^T(r_{\mu+1,\beta}) \\ \bar{D}_0^T(r_{\mu,\beta}) \\ \bar{D}_1^T(r_{\mu+1,\beta}) \end{bmatrix} (-Q) \begin{bmatrix} \bar{C}^T(r_{\mu+1,\beta}) \\ \bar{D}_0^T(r_{\mu,\beta}) \\ \bar{D}_1^T(r_{\mu+1,\beta}) \end{bmatrix}^T.$$

根据 Schur 补引理, 由式 (6) 可推出  $\Pi_2 < 0$ , 因此, 对于任意的  $\Phi_{\mu,\beta} \neq 0$  有  $J < 0$ . 另一方面, 再次利用 Schur 补可知式 (7) 等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{G}^T(r_1) \\ \bar{H}_0^T(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}(r_1) & \bar{H}_0(r) \end{bmatrix} < \gamma^2 \begin{bmatrix} P(r_1) & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}. \quad (12)$$

因此, 根据式 (3), (11) 和 (12) 可知, 对于任意的  $k \geq 0, p \in [0, \alpha]$  存在

$$\begin{aligned} v_{k+1,p}^T v_{k+1,p} < \\ \gamma^2 \begin{bmatrix} \xi_{k+1,p} \\ \zeta_{k,p} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(r_1) & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{k+1,p} \\ \zeta_{k,p} \end{bmatrix} < \\ \gamma^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} w_{\mu+1,\beta}^T w_{\mu+1,\beta}. \end{aligned} \quad (13)$$

在  $k \geq 0, p \in [0, \alpha]$  内取极值可得式 (5), 由此定理 1 得证.  $\square$

**注 1** 定理 1 中存在参数依赖 Lyapunov 函数矩阵与系统参数矩阵之间的乘积项, 是一个非线性问题. 本文通过引入一个松弛矩阵有效地解决了系统中存在的多变量耦合问题, 从而降低了所设计控制器的保守性, 同时提高了其控制精度.

**定理 2** 考虑闭环重复过程 (3), 给定标量  $\gamma > 0$ , 如果存在矩阵  $P(r_1) > 0, Q > 0$  及  $G$ , 使式 (7) 和如下参数矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P(r_1) & 0 & 0 & \bar{A}^T(r_1)G & \bar{C}^T(r_1)Q \\ * & -Q & 0 & \bar{B}_0^T(r)G & \bar{D}_0^T(r)Q \\ * & * & -I & \bar{B}_1^T(r_1)G & \bar{D}_1^T(r_1)Q \\ * & * & * & A_1 & 0 \\ * & * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

则闭环离散 LPV 重复过程 (3) 沿通道渐近稳定且具有一定  $l_2$ - $l_\infty$  扰动抑制水平  $\gamma$ . 其中

$$A_1 = P(r_2) - (G + G^T).$$

**证明** 若式 (6) 成立, 则选择  $G = G^T = P(r_2)$ ,

代入式(6)可得式(14),说明由式(6)可推出式(14).

若式(14)成立,则有

$$G + G^T - P(r_2) > 0,$$

$$(G - P(r_2))^T P^{-1}(r_2)(G - P(r_2)) > 0$$

成立,进而可得

$$\Lambda_2 = -G^T P^{-1}(r_2)G \leq P(r_2) - G - G^T,$$

则由式(14)可推出

$$\begin{bmatrix} -P(r_1) & 0 & 0 & \bar{A}^T(r_1)G & \bar{C}^T(r_1)Q \\ * & -Q & 0 & \bar{B}_0^T(r)G & \bar{D}_0^T(r)Q \\ * & * & -I & \bar{B}_1^T(r_1)G & \bar{D}_1^T(r_1)Q \\ * & * & * & \Lambda_2 & 0 \\ * & * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

利用  $\text{diag}\{I, I, I, G^{-1}P(r_2), I\}$  对式(15)作等价变换可得式(6). 由此定理2得证.  $\square$

## 2.2 动态输出反馈控制器的设计

本节将根据定理2中解耦的性能判据,并结合 PLMI 技术,给出离散 LPV 重复过程的鲁棒  $l_2$ - $l_\infty$  动态输出反馈控制器的参数化方法.

**定理 3** 考虑离散 LPV 重复过程(1),给定标量  $\gamma > 0$ ,存在形如式(2)的动态输出反馈控制器,使闭环重复过程(3)沿通道渐近稳定且具有  $l_2$ - $l_\infty$  性能水平  $\gamma$  的充分条件为:存在矩阵变量  $\bar{P}_1(r_1), \bar{P}_2(r_1), \bar{P}_3(r_1), A_{cc}(r_1), B_{0cc}(r), B_{cc}(r_1), C_{cc}(r_1), D_{0cc}(r), D_{cc}(r_1), G_{cc}(r_1), H_{0cc}(r), H_{cc}(r_1), X > 0, Y > 0, M > 0, N > 0$ ,使得如下参数线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} \\ * & \bar{\Xi}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{P}_1(r_1) & -\bar{P}_2(r_1) & 0 & 0 & G^T(r_1) \\ * & -\bar{P}_3(r_1) & 0 & 0 & YG^T(r_1) \\ * & * & -M & -I & H_0^T(r) \\ * & * & * & -N & NH_0^T(r) \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

其中

$$\bar{\Xi}_{11} = \begin{bmatrix} -\bar{P}_1(r_1) & -\bar{P}_2(r_1) & 0 & 0 & 0 \\ * & -\bar{P}_3(r_1) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -M & -I & 0 \\ * & * & * & -N & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Xi}_{12} = \begin{bmatrix} \Psi_{16} & \Psi_{17} & \Psi_{18} & \Psi_{19} \\ A_{cc}^T(r_1) & \Psi_{27} & C_{cc}^T(r_1) & \Psi_{29} \\ \Psi_{36} & \Psi_{37} & \Psi_{38} & \Psi_{39} \\ B_{0cc}^T(r) & \Psi_{47} & D_{0cc}^T(r) & \Psi_{49} \\ \Psi_{56} & \Psi_{57} & \Psi_{58} & \Psi_{59} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Xi}_{22} = \begin{bmatrix} \Psi_{66} & \Psi_{67} & 0 & 0 \\ * & \Psi_{77} & 0 & 0 \\ * & * & -M & -I \\ * & * & * & -N \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{16} = [XA(r_1) + B_{cc}(r_1)E(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{17} = [A(r_1) + B_1(r_1)H_{cc}(r_1)E(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{18} = [MC(r_1) + D_{cc}(r_1)E(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{19} = [C(r_1) + D_1(r_1)H_{cc}(r_1)E(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{27} = [A(r_1)Y + B_1(r_1)G_{cc}(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{29} = [C(r_1)Y + D_1(r_1)G_{cc}(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{36} = [XB_0(r) + B_{cc}(r_1)F_0(r)]^T,$$

$$\Psi_{37} = [B_0(r) + B_1(r_1)H_{cc}(r_1)F_0(r)]^T,$$

$$\Psi_{38} = [MD_0(r) + D_{cc}(r_1)F_0(r)]^T,$$

$$\Psi_{39} = [D_0(r) + D_1(r_1)H_{cc}(r_1)F_0(r)]^T,$$

$$\Psi_{47} = [B_0(r)N + B_1(r_1)H_{0cc}(r)]^T,$$

$$\Psi_{49} = [D_0(r)N + D_1(r_1)H_{0cc}(r)]^T,$$

$$\Psi_{56} = [XB_2(r_1) + B_{cc}(r_1)F_1(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{57} = [B_2(r_1) + B_1(r_1)H_{cc}(r_1)F_1(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{58} = [MD_2(r_1) + D_{cc}(r_1)F_1(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{59} = [D_2(r_1) + D_1(r_1)H_{cc}(r_1)F_1(r_1)]^T,$$

$$\Psi_{66} = \bar{P}_1(r_2) - 2X,$$

$$\Psi_{67} = \bar{P}_2(r_2) - 2I,$$

$$\Psi_{77} = \bar{P}_3(r_2) - 2Y.$$

如果上述 PLMIs 有可行解,则形如式(2)的  $l_2$ - $l_\infty$  动态输出反馈控制器的参数矩阵可通过求解以下方程得到:

$$H_{cc}(r_1) = H_c(r_1),$$

$$H_{0cc}(r) = H_c(r_1)F_0(r)N + H_{0c}(r)S_{12}^T,$$

$$G_{cc}(r_1) = H_c(r_1)E(r_1)Y + G_c(r_1)R_{12}^T,$$

$$D_{cc}(r_1) = MD_1(r_1)H_c(r_1) + Q_{12}D_c(r_1),$$

$$D_{0cc}(r) = M[D_0(r) + D_1(r_1)H_c(r_1)F_0(r)]N +$$

$$Q_{12}D_c(r_1)F_0(r)N +$$

$$MD_1(r_1)H_{0c}(r)S_{12}^T + Q_{12}D_{0c}(r)S_{12}^T,$$

$$C_{cc}(r_1) = M[C(r_1) + D_1(r_1)H_c(r_1)E(r_1)]Y +$$

$$Q_{12}D_c(r_1)E(r_1)Y +$$

$$MD_1(r_1)G_c(r_1)R_{12}^T + Q_{12}C_c(r_1)R_{12}^T,$$

$$B_{cc}(r_1) = XB_1(r_1)H_c(r_1) + G_{12}B_c(r_1),$$

$$B_{0cc}(r) = X[B_0(r) + B_1(r_1)H_c(r_1)F_0(r)]N +$$

$$G_{12}B_c(r_1)F_0(r)N + XB_1(r_1)H_{0c}(r)S_{12}^T +$$

$$G_{12}B_{0c}(r)S_{12}^T,$$

$$A_{cc}(r_1) = X[A(r_1) + B_1(r_1)H_c(r_1)E(r_1)]Y + G_{12}B_c(r_1)E(r_1)Y + XB_1(r_1)G_c(r_1)R_{12}^T + G_{12}A_c(r_1)R_{12}^T. \quad (18)$$

**证明** 如果式 (14) 成立, 则矩阵  $P(r_1), G$  及  $Q$  为非奇异阵, 令  $R = G^{-1}, S = Q^{-1}$ , 并将其分解为

$$G \triangleq \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{bmatrix}, R = G^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix},$$

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}, S = Q^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}.$$

假设  $G_{12}$  和  $R_{12}$  为非奇异阵, 若定义

$$\Gamma_G \triangleq \begin{bmatrix} G_{11} & I \\ G_{12}^T & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_R \triangleq \begin{bmatrix} I & R_{11} \\ 0 & R_{12}^T \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_Q \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11} & I \\ Q_{12}^T & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_S \triangleq \begin{bmatrix} I & S_{11} \\ 0 & S_{12}^T \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}(r_1) \triangleq \Gamma_R^T P(r_1) \Gamma_R = \begin{bmatrix} \bar{P}_1(r_1) & \bar{P}_2(r_1) \\ \bar{P}_2^T(r_1) & \bar{P}_3(r_1) \end{bmatrix} > 0,$$

则有

$$G\Gamma_R = \Gamma_G, R\Gamma_G = \Gamma_R, G_{11}R_{11} + G_{12}R_{12}^T = I,$$

$$Q\Gamma_S = \Gamma_Q, S\Gamma_Q = \Gamma_S, Q_{11}S_{11} + Q_{12}S_{12}^T = I.$$

利用  $\text{diag}\{\Gamma_R, \Gamma_S, I, \Gamma_R, \Gamma_S\}$  和  $\text{diag}\{\Gamma_R, \Gamma_S, I\}$  分别对式 (14) 和 (7) 进行全等变换, 考虑式 (4), (18) 及如下定义的矩阵变量:

$$X = G_{11}, Y = R_{11}, M = Q_{11}, N = S_{11},$$

可得式 (16) 和 (17); 因此, 由定理 2 可知, 满足式 (16) 和 (17) 的闭环离散 LPV 重复过程 (3) 沿通道渐近稳定且具有  $l_2$ - $l_\infty$  性能水平  $\gamma$ , 由此定理 3 得证.  $\square$

**推论 1** 离散 LPV 重复过程 (1) 的  $l_2$ - $l_\infty$  动态输出反馈次优控制器可通过如下凸优化问题求解:

$$\min \gamma, \quad \text{subject to (16), (17)}.$$

**注 2** 若推论 1 中的凸优化问题有解, 则控制器的参数化过程由以下两个步骤组成:

Step 1: 分别对  $G_{12}R_{12}^T = I - XY$  和  $Q_{12}S_{12}^T = I - MN$  进行奇异值分解, 求得  $G_{12}, R_{12}$  和  $Q_{12}, S_{12}$ ;

Step 2: 根据式 (18) 计算出控制器的参数矩阵.

### 3 仿真实例

考虑离散 LPV 重复过程 (1), 给定通道长度  $\alpha = 20$  及如下参数矩阵:

$$A(r_1) = \begin{bmatrix} -0.21 + 0.1r_1^1 & -0.42 & 0.00 \\ 0.00 & 0.96 & -0.10 + 0.2r_1^2 \\ 0.30 & 0.00 & 0.23 \end{bmatrix},$$

$$B_0(r) = \begin{bmatrix} 0.73 + 0.1r^1 & 0.00 \\ -0.22 & 0.64 \\ 0.00 & 0.41 + 0.2r^2 \end{bmatrix},$$

$$B_1(r_1) = \begin{bmatrix} -0.43 - 0.1r_1^1 & -0.13 \\ 0.23 & 0.48 + 0.1r_1^2 \\ 0.21 & -0.18 \end{bmatrix},$$

$$B_2(r_1) = \begin{bmatrix} -0.40 \\ 0.00 + 0.1r_1^1 \\ -0.21 \end{bmatrix},$$

$$C(r_1) = \begin{bmatrix} -0.40 & -0.28 + 0.1r_1^1 & -0.37 \\ 0.52 & 0.00 + 0.1r_1^2 & -0.15 \end{bmatrix},$$

$$D_0(r) = \begin{bmatrix} -0.18 & -0.31 \\ 0.15 & 0.54 + 0.1r^1 \end{bmatrix},$$

$$D_1(r_1) = \begin{bmatrix} -0.24 + 0.1r_1^1 & -0.52 \\ -0.11 & 0.32 \end{bmatrix},$$

$$E(r_1) = \begin{bmatrix} -0.21 & 0.26 & 0.10 + 0.2r_1^1 \\ 0.00 & 0.32 & 0.11 \end{bmatrix},$$

$$F_0(r) = \begin{bmatrix} -0.15 + 0.2r^1 & 0.26 \\ 0.00 & 0.10 \end{bmatrix},$$

$$D_2(r_1) = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.35 + 0.1r_1^1 \end{bmatrix}, F_1(r_1) = \begin{bmatrix} -0.30 - 0.1r_1^1 \\ -0.22 \end{bmatrix},$$

$$G(r_1) = \begin{bmatrix} 0.25 + 0.2r_1^1 & -0.20 & 0.61 \\ 0.00 & 0.12 & 0.40 \end{bmatrix},$$

$$H_0(r) = \begin{bmatrix} -0.15 + 0.1r^1 & 0.30 \\ 0.00 & 0.15 \end{bmatrix},$$

其中  $r_{k,p}^1 = \sin(k+p)$  和  $r_{k,p}^2 = |\cos(k+p)|$  为时变参数, 参数变化区间为  $[-1, 1] \times [0, 1]$ . 定理 3 中的式 (16) 和 (17) 是无限维 PLMI, 利用近似基函数和网格技术将其转化为有限维 LMI, 通过求解推论 1 中的凸优化问题可得到容许的控制器的参数矩阵. 选取如下基函数:

$$f_1(r_{k,p}) = 1, f_2(r_{k,p}) = r_{k,p}^1, f_3(r_{k,p}) = r_{k,p}^2.$$

利用奇异值分解函数  $[U, T, V] = \text{svd}(A)$  分别对

$$G_{12}R_{12}^T = I - XY, Q_{12}S_{12}^T = I - MN$$

进行奇异值分解, 可得  $G_{12}, R_{12}, Q_{12}, S_{12}$ , 进而可求得次优的  $l_2$ - $l_\infty$  噪声抑制水平  $\gamma^* = 0.8659$  以及相应控制器的参数矩阵.

为了更有效地验证系统性能, 给出边界条件和噪声信号分别如下:

$$x_{k+1,0} = [0 \ 0 \ 0]^T;$$

$$y_{0,p} = [\sin(p\pi/20) \ \sin(p\pi/20)]^T;$$

$$w_{k,p} = \begin{cases} \vartheta(k, p), & 1 \leq k \leq 15, 1 \leq p \leq 15; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中  $\vartheta(k, p)$  表示具有零均值和单位方差的任意变量. 利用所求得的  $l_2$ - $l_\infty$  动态输出反馈控制器对该系统进行

行控制,图 1 为闭环离散 LPV 重复过程的状态响应轨迹. 由图 1 可见,所设计的控制器能使闭环重复过程(3)沿通道渐近稳定且满足给定的  $l_2-l_\infty$  扰动抑制水平,这表明所设计的动态输出反馈控制器是有效的.

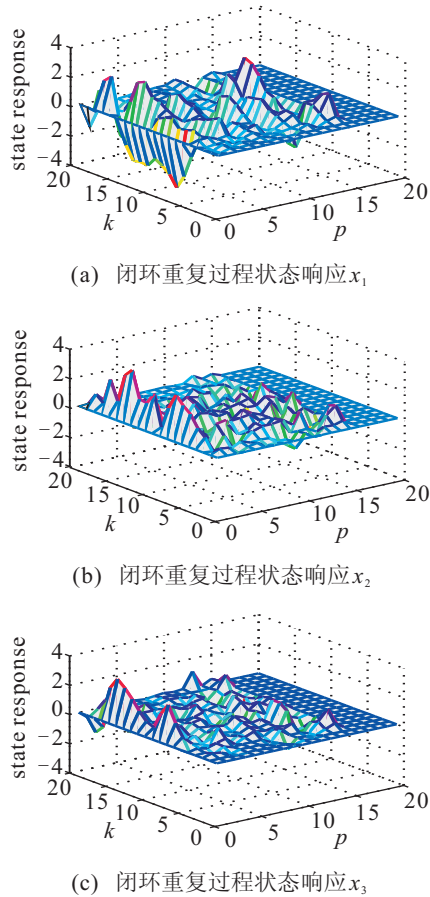


图 1 闭环离散 LPV 重复过程的状态响应轨迹

## 4 结 论

针对离散 LPV 重复过程,提出了依赖于参数的  $l_2-l_\infty$  性能准则. LPV 系统是一类参数变化且实时可测的重要时变系统,其应用范围日益广泛,从航天、航空到机器人、工业控制等领域都有成功的应用. 本文将参数依赖 Lyapunov 函数思想应用于 LPV 重复过程的  $l_2-l_\infty$  动态输出反馈控制器设计中,利用 PLMI 技术得到容许的动态输出反馈控制器,能够保证闭环离散 LPV 重复过程沿通道渐近稳定且满足  $l_2-l_\infty$  性能约束. 最后,通过数值仿真进一步验证了所提出方法的有效性.

(上接第 1744 页)

[10] 李岳明, 庞永杰, 万磊. 水下机器人自适应 S 面控制[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(2): 195-200.  
(Li Y M, Pang Y J, Wan L. Adaptive S plane control for autonomous underwater vehicle[J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2012, 46(2): 195-200.)

## 参考文献(References)

- [1] Dabkowski P, Galkowski K, Rogers E. Strong practical stability and stabilization of differential linear repetitive processes[J]. Systems and Control Letters, 2010, 59(10): 639-644.
- [2] Rabenstein R, Steffen P. Numerical iterative methods and repetitive processes [J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2012, 23(1-2): 163-183.
- [3] Galkowski K, Paszke W, Rogers E, et al. Stability and control of differential linear repetitive processes using an LMI setting [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 2003, 50(9): 662-666.
- [4] Wu L G, Zheng W X. Reduced-order filtering for discrete linear repetitive processes[J]. Signal Processing, 2011, 91(7): 1636-1644.
- [5] 吴立刚, 胡跃明. 线性连续重复过程的  $H_\infty$  模型降阶[J]. 控制与决策, 2008, 23(10): 1196-1200.  
(Wu L G, Hu Y M.  $H_\infty$  model reduction for linear differential repetitive processes[J]. Control and Decision, 2008, 23(10): 1196-1220.)
- [6] 虞忠伟, 陈辉堂, 王月娟. 基于 LMI 方法的机器人 LPV 鲁棒  $H_\infty$  控制器设计[J]. 控制与决策, 2001, 16(2): 146-150.  
(Yu Z W, Chen H T, Wang Y J. Robot manipulator LPV robust  $H_\infty$  controller design based on LMI approach[J]. Control and Decision, 2001, 16(2): 146-150.)
- [7] Corno M, Savaresi S M, Balas G J. On linear-parameter-varying(LPV) slip-controller design for two-wheeled vehicles[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(12): 1313-1336.
- [8] Fang Y M, Zhao L L, Ou F S. Robust dynamic output feedback synchronous control for both sides of pressing down position system for cold rolling mill[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(4): 438-442.
- [9] Huang D, Nguang S K. Dynamic output feedback control for uncertain networked control systems with random network-induced delays[J]. Automation and Systems, 2009, 7(5): 841-847.
- [11] 常文君, 刘建成, 于华男, 等. 水下机器人运动控制与仿真的数学模型[J]. 船舶工程, 2002, 3: 58-60.  
(Chang W J, Liu J C, Yu H N, et al. A mathematical model for motion control and simulation of underwater vehicle[J]. Ship Engineering, 2002, 3: 58-60.)