文章编号: 1001-0920 (2013) 11-1614-09

基于 CVaR 准则具有预算约束和损失约束的报童决策

许民利, 李 展

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 为了探讨风险态度、现实约束对决策行为的影响, 建立了具有预算约束、损失约束、需求依赖于价格、基于条件风险价值 (CVaR) 准则的价格-订单量决策模型, 并给出了模型最优解与约束条件有效阈值求解方法. 研究结果表明, 条件风险价值对损失约束比对预算约束的敏感程度高, 而不同约束的高敏感区域位置不同; 风险规避程度越高, CVaR 对约束值的弹性系数越低; 预算约束值的提高降低了边际贡献率, 风险规避程度越高, 降低幅度越大.

关键词: 条件风险价值；预算约束；损失约束；弹性系数；边际贡献率

中图分类号: F203；F224.32 **文献标志码:** A

Newsvendor decision with budget constraint and loss constraint under CVaR criterion

XU Min-li, *LI Zhan*

(Business School, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent：XU Min-li, E-mail: 13487316039@163.com)

Abstract: In order to find how the risk attitude and realistic constraint influence the decision behavior, a price-order quantity decision model with stochastic price-dependent demand, budget constraint and loss constraint under the conditional value-at-risk(CVaR) criterion is founded. A method of solution to the model and the effectual threshold of the constraints is given. The research shows that the CVaR is more sensitive to the loss constraint than to the budget constraint, and high-sensitive domains of different constraints are located at different areas. The higher the degree of risk aversion is, the lower the constraint value elasticity coefficient of CVaR is. Higher budget constraint value leads to lower marginal contribution ratio, which is more significant with the degree of risk aversion increasing.

Key words: conditional value-at-risk；budget constraint；loss constraint；elasticity coefficient；marginal contribution ratio

0 引 言

报童问题由来已久, 而且是供应链中最经典的问题之一, 当前供应链中的大多数热点问题也是基于对报童问题研究的延伸. 报童问题的研究作为基础性研究当前仍然受到学者们的重视. 报童问题的研究主要围绕消费者需求、报童决策和目标函数等展开, 还有一部分是对报童模型的扩展及条件的设定, 对此文献 [1] 作了详细的探讨.

经典报童模型往往假设消费者需求为外生变量, 然后给定一个需求分布进行求解, 但实际经济环境中的消费者需求是由许多因素决定的, 如价格、收入、零售商努力程度和订单量等. 为此, 文献 [2-5] 将需求作为内生变量, 引进经济领域的价格需求函数, 研究了需求依赖于价格情况下的最优定价和订单决策模型, 并提出几种价格需求函数模型, 但这些文献都是假定决策者为风险中性的, 目标函数采用期望收益, 没有考虑风险态度对决策行为的影响, 这种假设不符合普遍性原理. 文献 [6] 研究了风险效果和风险规避等, 并研究了不同价格成本参数对风险规避零售商决策行为的影响, 但其风险度量工具有一定的局限性, 存在许多待改进的地方.

随着对风险态度研究的增多, 风险度量工具选择也越来越受到广泛关注. 目前, 风险度量工具多引用金融领域的均值方差、风险价值 (VaR) 和条件风险价值 (CVaR) 等. 其中, CVaR 相对前两种参数具有很大

收稿日期: 2012-07-17；**修回日期:** 2012-09-24.

基金项目: 教育部人文社科基金项目(09YJC630230)；湖南省科技计划项目(2011FJ3241).

作者简介: 许民利(1969−), 男, 副教授, 博士, 从事供应链风险管理、契约管理等研究；李展(1986−), 男, 硕士生, 从事供应链风险管理的研究.

的优越性, 如次可加性和易求解等特点, 尤其是自文献 [7-8] 提出 CVaR 的优化方法之后, 这种风险度量工具被广泛应用. 而 Chen 等[9]将 CVaR 引进报童模型, 并将其纳入目标函数, 研究了决策者最优订单量. 后来, 他们构造了多阶段模型, 并将价格作为决策变量研究了决策者的决策行为[10], 但没有考虑现实的约束情况. Chen 等[11]不仅考虑了风险态度对决策的影响, 也考虑了定价对需求的影响, 给出了求解条件, 并运用比较静态分析方法描述了参数之间的变动关系, 但他们并没有给出最优解的推导过程, 只是给出了解决思路, 而且他们没有考虑现实中存在的各种约束条件对决策的影响.

文献 [12] 研究了多产品报童决策模型, 并进一步考虑了现实约束条件对决策的影响[13-14], 同时将不同的约束条件对决策的影响进行了比较, 但是他们没有考虑决策者的风险态度, 而且将销售价格看作是外生变量进行研究, 没有考虑决策行为对市场需求的影响. 文献 [15] 研究了服务约束与损失约束下报童的定价策略, 讨论了约束与决策变量的关系, 但没有考虑风险态度的对决策的影响.

由此可见, 以上学者对报童问题的研究要么考虑价格对需求的影响, 要么考虑风险态度, 要么引入现实约束条件, 并没有将这些因素进行统一研究. 本文考虑以上所有因素, 更细致地刻画客观世界, 并构建数学模型, 给出非线性规划求解过程, 分析出各因素对报童决策的影响, 为管理决策给出了有效的参考.

1　模型构建

文章采用单一阶段的报童模型, 需求分布不确定, 并且需求依赖于价格. 其中: p 为销售价格, w 为产品进货成本, s 为期末滞销产品的净残值, q 为订单量, D 为市场需求. 假设 $s < w < p$, 且没有缺货惩罚. 这里: p 与 q 为决策变量, $p*$ 与 $q*$ 为模型最优解.

1.1　风险度量工具

本文假设决策者为风险规避者. 虽然 Gotoh 等[16]探讨了不同的损失函数下报童的 CVaR 模型, 但我们更关注报童的收益情况; 因此, 根据文献 [17-18], 本文将收益的 CVaR 作为目标函数来反映决策者风险规避程度.

介绍 CVaR 之前首先介绍一下 VaR. 一般给定置信水平 $\beta \in [0,1)$, $\mathit{\Pi}(q,x)$ 表示订单量为 q, 随机需求为 x 情况下的利润函数, 则 VaR 可表示为

$$\mathrm{VaR}_\beta(\mathit{\Pi}(q,x)) = \max\{m \mid p\{\mathit{\Pi}(q,x) \geqslant m\} \geqslant \beta\}. \tag{1}$$

而 CVaR 是利润低于 VaR 部分的期望值, 则关于订购量 q 与置信水平 β 的 β-CVaR 的一般表达式为

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathit{\Pi}(q,x)) = E\{\mathit{\Pi}(q,x) \mid \mathit{\Pi}(q,x) \leqslant \mathrm{VaR}_\beta(\mathit{\Pi}(q,x))\}. \tag{2}$$

文献 [7] 给出了更一般的 CVaR 的计算方法, 即

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathit{\Pi}(q,x)) = \max_{\alpha\in R}\Big\{\alpha + \frac{1}{1-\beta}E(\mathit{\Pi}(q,x)-\alpha)^-\Big\}, \tag{3}$$

其中 $t^- = \min\{t,0\}$.

可以证明式 (2) 和 (3) 是等价的, 而且式 (3) 大括号内的函数是关于 α 的凹函数, 也就是说可以通过第 2 个式子求解 CVaR. 文献 [7] 给出了具体计算方法.

1.2　价格需求函数

本文中, 订单量与销售价格为决策变量, 而需求为随机变量, 需求是价格的函数, 决策者通过对 p 与 q 的选择使目标函数最大化.

需求基于价格的随机性表达一般采取两种方式: 一种是加法原则, 即 $D(p,\epsilon) = y(p) + \epsilon$; 另一种为乘法原则, 即 $D(p,\epsilon) = \epsilon y(p)$. 其中: $y(p)$ (为了方便可以简记为 y) 为关于价格 p 的连续递减函数; ϵ 为在 $[A,B]$ 上的随机变量, 设其概率密度为 $f(\cdot)$; 分布函数为 $F(\cdot)$, 假设分布函数存在连续逆函数, 记为 $F^{-1}(\cdot)$. 本文采用加法原则进行分析, 此时 $E(\epsilon) = 0$, 并假定 $y(p)$ 为经济学上常用的线性形式: $y(p) = a - bp\,(a > 0, b > 0)$. 为了保证在某些 p 值下需求不为负值, 令 $A > -a$.

1.3　基于风险的目标函数

由上可以得出报童问题的利润函数如下:

$$\mathit{\Pi}(q,D) = \begin{cases} pD - wq + s(q-D), D \leqslant q; \\ pq - wq, D > q. \end{cases} \tag{4}$$

为了便于处理利润函数, 本文采取与 Petruzzi[5]一致的处理方式, 令 $z = q - y(p)$, 而 $D(p,\epsilon) = y(p) + \epsilon$, 则利润函数转化为

$$\mathit{\Pi}(p,q) = \mathit{\Pi}(p,z) = \begin{cases} p(y+\epsilon) - w(y+z) + s(z-\epsilon),\ \epsilon \leqslant z; \\ p(y+z) - w(y+z),\ \epsilon > z. \end{cases} \tag{5}$$

使式 (5) 达到最大的解为 (p^*, z^*), 而最优订单量为 q^*, 则有如下关系成立: $q^* = y(p^*) + z^*$. 根据 CVaR_β 的定义, 决策者的 CVaR_β 值如下:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathit{\Pi}(p,z)) = \max_{\alpha\in R}\Big\{\alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_A^B (\mathit{\Pi}(p,z)-\alpha)^- f(x)\mathrm{d}x\Big\} = \max_{\alpha\in R}\Big\{\alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_A^Z (py + sz - w(y+z) +$$

$$(p-s)x-\alpha)^-f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\beta}\int_Z^B(p(y+z)-w(y+z)-\alpha)^-f(x)\mathrm{d}x\Big\}. \tag{6}$$

根据文献 [7] 的研究, 一定存在 α^* 对给定的 p 和 z 使 CVaR_β 达到最大值. 令 $\alpha^*(p,z)$ 为使 CVaR_β 达到最大值的关于 p 和 z 的函数.

定理 1 当 $z\geqslant F^{-1}(1-\beta)$ 时, 有

$$\alpha^*(p,z)=(p-s)F^{-1}(1-\beta)+py+sz-w(y+z);$$

当 $z<F^{-1}(1-\beta)$ 时, 有

$$\alpha^*(p,z)=p(y+z)-w(y+z).$$

证明 定义如下凹函数:

$$g(p,z,\alpha)=\alpha+\frac{1}{1-\beta}\int_A^Z(py+sz-w(y+z)+(p-s)x-\alpha)^-f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\beta}\times\int_Z^B(p(y+z)-w(y+z)-\alpha)^-f(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

对于任意给定的 p 和 z, 有如下关系成立:

1) 当 $\alpha<py+sz-w(y+z)+(p-s)A$ 时, 有

$$g(p,z,\alpha)=\alpha, \tag{8}$$

$$\frac{\partial g(p,z,\alpha)}{\partial\alpha}=1>0. \tag{9}$$

2) 当 $py+sz-w(y+z)+(p-s)A\leqslant\alpha\leqslant p(y+z)-w(y+z)$ 时, 有

$$g(p,z,\alpha)=\alpha+\frac{1}{1-\beta}\Big\{[py+sz-w(y+z)-\alpha]\times F\Big(\frac{\alpha-py}{p-s}-\frac{sz-w(y+z)}{p-s}\Big)+(p-s)\int_A^{\frac{\alpha-py-sz+w(y+z)}{p-s}}xf(x)\mathrm{d}x\Big\}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial g(p,z,\alpha)}{\partial\alpha}=1-\frac{F\Big(\dfrac{\alpha-py-sz+w(y+z)}{p-s}\Big)}{1-\beta}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 g(p,z,\alpha)}{\partial\alpha^2}=-\frac{1}{(p-s)(1-\beta)}f\Big(\frac{\alpha-py-sz}{p-s}+\frac{w(y+z)}{p-s}\Big)<0. \tag{12}$$

3) 当 $\alpha>p(y+z)-w(y+z)$ 时, 有

$$g(p,z,\alpha)=\alpha+\frac{1}{1-\beta}\int_A^Z(py+sz-w(y+z)+(p-s)x-\alpha)f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\beta}\int_Z^B(p(y+z)-w(y+z)-\alpha)f(x)\mathrm{d}x, \tag{13}$$

$$\frac{\partial g(p,z,\alpha)}{\partial\alpha}=1-\frac{1}{1-\beta}<0. \tag{14}$$

综上所述, p 和 z 固定, 当 $py+sz-w(y+z)+(p-s)A\leqslant\alpha\leqslant p(y+z)-w(y+z)$ 时, $g(p,z,\alpha)$ 达到最大值. 由此可知:

1) 当 $z\geqslant F^{-1}(1-\beta)$ 时, $g(p,z,\alpha)$ 关于 α 在

$$[py+sz-w(y+z)+(p-s)A,p(y+z)-w(y+z)]$$

上先增后减, 因此有

$$\alpha^*(p,z)=(p-s)F^{-1}(1-\beta)+py+sz-w(y+z);$$

2) 当 $z<F^{-1}(1-\beta)$ 时, $g(p,z,\alpha)$ 关于 α 在

$$[py+sz-w(y+z)+(p-s)A,p(y+z)-w(y+z)]$$

上为增函数, 因此有 $\alpha^*(p,z)=p(y+z)-w(y+z)$. □

根据定理 1 与目标函数 (6) 即可得出目标函数关于 p 和 z 的函数如下:

$$\max\mathrm{CVaR}_\beta(p,z)=\begin{cases}pz+sz-w(y+z)+(p-s)F^{-1}(1-\beta)-\dfrac{p-s}{1-\beta}\displaystyle\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x, & z\geqslant F^{-1}(1-\beta);\\ py+pz-w(y+z)-\dfrac{p-s}{1-\beta}\displaystyle\int_A^Z F(x)\mathrm{d}x, & z<F^{-1}(1-\beta).\end{cases} \tag{15}$$

由此可以证明式 (15) 为连续函数, 并且存在 q 和 z 的一阶、二阶偏导数.

1.4 约束条件

与文献 [14] 一致, 假设决策者面对两种约束, 一种为预算约束, 约束值为 M, 另一种为损失约束, 约束值为 N. 文献 [14] 根据两个约束条件分别建立两个模型, 本文与其不同的是直接将两个约束条件放进一个模型中进行考虑. 约束条件如下:

$$\text{s.t.}\quad w(z+a-bp)\leqslant M, \tag{16}$$

$$(w-s)\int_A^Z F(x)\mathrm{d}x\leqslant N, \tag{17}$$

$$p>w,\ A\leqslant z\leqslant B. \tag{18}$$

式 (16) 为预算约束, 式 (17) 为损失约束, 这里损失约束同样不考虑缺货损失, 只考虑滞销损失 $(w-s)$.

由式 (15) 可知, 目标函数为分段函数, 为了求解便利性, 可将分段条件并入约束条件内建立如下两个非线性规划模型:

$$M_1:\quad \max\mathrm{CVaR}_\beta^{(1)}(p,z)=pz+sz-w(y+z)+(p-s)F^{-1}(1-\beta)-\frac{p-s}{1-\beta}\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x;$$

$$\text{s.t.}\quad w(z+a-bp)\leqslant M,\quad (w-s)\int_A^Z F(x)\mathrm{d}x\leqslant N,\quad y=a-bp,\ z\geqslant F^{-1}(1-\beta),\ p>w.$$

$$M_2: \quad \max \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)= py+pz-w(y+z)-\frac{p-s}{1-\beta}\int_A^Z F(x)\mathrm{d}x;$$
$$\text{s.t.}\quad w(z+a-bp)\leqslant M,$$
$$(w-s)\int_A^Z F(x)\mathrm{d}x\leqslant N,$$
$$y=a-bp,\ z<F^{-1}(1-\beta),\ p>w.$$

2 模型求解

下面分别对两个模型进行讨论以确定最优解. 与文献 [5] 类似, 本文将 p 和 z 作为独立变量进行分析.

2.1 非线性规划 M_1

容易证明, M_1 目标函数连续且存在二阶连续偏导数, 偏导数如下:

$$\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta^{(1)}(p,z)}{\partial z}=s-w<0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(1)}(p,z)}{\partial z^2}=0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta^{(1)}(p,z)}{\partial p}=a-2bp+wb+F^{-1}(1-\beta)-\frac{1}{1-\beta}\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(1)}(p,z)}{\partial p^2}=-2b<0. \tag{22}$$

由此可以看出: M_1 虽然是有约束非线性规划, 但比较特殊, 目标函数对 z 为递减线性函数, 而对 p 为凹函数, 约束均为线性约束, 可行域为凸集; 并且由式 (19) 和 (21) 可知, z 和 p 对目标函数影响是独立的; 因此模型一定存在最优解, 而且求解比较简单.

为了避免 M_1 最优定价 $p_1^*\leqslant w$, 作如下假设:

$$w<\frac{a+wb+F^{-1}(1-\beta)}{2b}-\frac{1}{2b(1-\beta)}\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x. \tag{23}$$

此假设可确保 M_1 最优定价高于产品进货成本, 且不影响后续求解. 因为如果给定的参数使假设不成立, 则 M_1 的最优定价只能是批发价, 利润小于等于 0, 这与实际不符, M_1 最优解不可能被采纳为最终解, 因此此假设不会影响最终结果. 为了求解过程简便, 可在求解 M_1 之前进行假设验证, 如果此假设不成立, 则直接求解 M_2.

1) 在预算约束、损失约束不起作用下, M 和 N 的范围为

$$\begin{aligned}&M\geqslant\frac{aw}{2}+\frac{wF^{-1}(1-\beta)}{2}-\frac{w}{2}\Big(wb-\frac{1}{1-\beta}\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x\Big),\\&N\geqslant(w-s)\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{24}$$

M_1 的最优解为一阶条件, 即

$$\begin{cases}p_1'=\dfrac{a+wb+F^{-1}(1-\beta)}{2b}-\dfrac{1}{2b(1-\beta)}\displaystyle\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x,\\ z_1'=F^{-1}(1-\beta).\end{cases} \tag{25}$$

2) 当预算约束起作用、损失约束不起作用时, M 和 N 的范围为

$$\begin{aligned}&0<M<\frac{aw}{2}+\frac{wF^{-1}(1-\beta)}{2}-\frac{w}{2}\Big(wb-\frac{1}{1-\beta}\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x\Big),\\&N\geqslant(w-s)\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{26}$$

求的最优解如下:

$$\begin{cases}p_1''=\dfrac{aw+wF^{-1}(1-\beta)-M}{bw},\\ z_1''=F^{-1}(1-\beta).\end{cases} \tag{27}$$

3) 在损失约束或者预算约束过度约束的情况下, 当 M 和 N 满足

$$N<(w-s)\int_A^{F^{-1}(1-\beta)}F(x)\mathrm{d}x$$

或者 $M\leqslant 0$ 时, 根据实际意义, M_1 的最优解只能取 (0, 0), 即决策者不会订货.

由此可见, 损失约束对 M_1 解的影响只有两种情况, 要么约束不起作用, 要么过度约束导致决策者不订货.

2.2 非线性规划 M_2

M_2 规划为有约束的非线性规划, 比较复杂, 而且 z 和 p 对目标函数的影响是相关的, 因此应该从规划本身进行分析.

定理 2 非线性规划 M_2 一定存在最优解, 而且有唯一最优解.

证明 容易证明 M_2 目标函数连续, 且存在二阶连续偏导, 求得偏导数如下:

$$\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial z}=p-w-\frac{p-s}{1-\beta}F(z), \tag{28}$$

$$\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial p}=a-2bp+wb-\frac{1}{1-\beta}\int_A^Z F(x)\mathrm{d}x, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial z^2}=-\frac{p-s}{1-\beta}f(z)<0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial p^2}=-2b<0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial z\partial p}=1-\frac{F(z)}{1-\beta}>0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial p\partial z}=-\frac{F(z)}{1-\beta}<0. \tag{33}$$

求得 M_2 目标函数海塞矩阵行列式如下:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial z^2} & \dfrac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial z \partial p} \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial p \partial z} & \dfrac{\partial^2 \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p,z)}{\partial p^2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{p-s}{1-\beta}f(z) & 1-\dfrac{F(z)}{1-\beta} \\ -\dfrac{F(z)}{1-\beta} & -2b \end{vmatrix} > 0. \tag{34}$$

由式 (30) 可知, $-\dfrac{p-s}{1-\beta}f(z) < 0$; 根据式 (30) 和 (34) 可知, M_2 目标函数海塞矩阵处处负定; 因此, M_2 目标函数为严格凹函数, 而约束条件为线性约束, 可行域为凸集. 由此可知, 模型一定存在最优解, 而且是唯一最优解. □

1) 在预算约束与损失约束不起作用的情况下, 当 $z \in [A, F^{-1}(1-\beta)), p \in (0,\infty)$ 时, 目标函数是严格凹函数, 而且关于 z 和 p 均是单峰; 因此, 根据 Whitin[2], 此时 M_2 的最优解便是一阶条件, 最优解方程为

$$\begin{cases} p-w-\dfrac{p-s}{1-\beta}F(z)=0, \\ a-2bp+wb-\dfrac{1}{1-\beta}\displaystyle\int_A^Z F(x)\mathrm{d}x=0. \end{cases} \tag{35}$$

设所求得的最优解为 $(p_2^{'}, z_2^{'})$, 文献 [11] 给出了此种情况的其他解题思路. 可以看出, 式 (28) 的解便是 p 固定时标准报童模型在以 CVaR 为目标函数的最优解[11]. 此时可推出预算约束、损失约束不起作用时的约束值范围为

$$\begin{cases} M \geqslant wz_2^{'}+wa-bwp_2^{'}, \\ N \geqslant (w-s)\displaystyle\int_A^{z_2^{'}} F(x)\mathrm{d}x=0. \end{cases} \tag{36}$$

2) 在损失约束、预算约束均起作用的情况下, M 和 N 的范围为

$$\begin{cases} 0 < M < wz_2^{'}+wa-bwp_2^{'}, \\ 0 < N < (w-s)\displaystyle\int_A^{z_2^{'}} F(x)\mathrm{d}x=0. \end{cases} \tag{37}$$

当两个约束均起作用时, 目标函数与损失约束中含有积分式, 利用库恩-塔克条件求解比较困难; 但是, 对于某些特殊的 $F(x)$, 可通过计算将积分式化简为简单的线性表达式, 然后用库恩-塔克条件求解, 这样比较简单.

本文假设 $F(x)$ 为一般的分布函数表达式, 这样, 无论目标函数还是约束条件都含有积分式. 此时, 像一维搜索、二次规划法、可行方向法等常规方法都无法求最优解, 本文利用小步梯度法求解. 具体思路如下: 设 $(p^{(k)}, z^{(k)})$ 为 M_2 的一个可行解, 通过泰勒级数展开非线性方程 (目标函数或者约束条件), 略去高次项, 得出线性近似式.

目标函数的线性近似式如下:

$$\begin{aligned} &\max \overline{\mathrm{CVaR}}_\beta^{(2)}(p,z) = \\ &\mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p^{(k)},z^{(k)})+ \\ &\nabla^{\mathrm{T}}\mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p^{(k)},z^{(k)}) \begin{bmatrix} p-p^{(k)} \\ z-z^{(k)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{38}$$

其中: “$\overline{u}$”表示“u”的近似, “∇^{T}”表示 $\mathrm{CVaR}_\beta^2(p,z)$ 梯度的转置.

同理, 损失约束线性近似式为

$$(w-s)\int_A^{z^{(k)}} F(x)\mathrm{d}x + (w-s)F(z^{(k)})(z-z^{(k)}) \leqslant N. \tag{39}$$

M_2 模型近似转化为以下线性近似模型:

$$\begin{aligned} M_3:\ &\max \overline{\mathrm{CVaR}}_\beta^{(2)}(p,z) = \\ &\mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p^{(k)},z^{(k)})+ \\ &\nabla^{\mathrm{T}}\mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p^{(k)},z^{(k)}) \begin{bmatrix} p-p^{(k)} \\ z-z^{(k)} \end{bmatrix}; \\ \text{s.t.}\ &w(z+a-bp) \leqslant M, \\ &(w-s)\int_A^{z^{(k)}} F(x)\mathrm{d}x + \\ &(w-s)F(z^{(k)})(z-z^{(k)}) \leqslant N, \\ &y=a-bp,\ z<F^{-1}(1-\beta),\ p>w. \end{aligned}$$

增加约束条件, 将变量 p 和 z 取值范围进行如下限制:

$$\begin{cases} |p-p^{(k)}| < \xi_1^{(k)}, \\ |z-z^{(k)}| < \xi_2^{(k)}, \end{cases} \tag{40}$$

其中 $\xi_1^{(k)}$ 和 $\xi_2^{(k)}$ 为步长限制值.

求解 M_3 与式 (40) 构成的线性规划问题, 解为 $(p^{(k+1)}, z^{(k+1)})$. 如果得出的解为原问题可行解, 则用 $(p^{(k+1)}, z^{(k+1)})$ 替换 $(p^{(k)}, z^{(k)})$, 沿用步长限制, 同样用上述方法将原问题线性化求解. 若 $(p^{(k+1)}, z^{(k+1)})$ 不是原问题的可行解, 则减少步长限制, 重新求当前线性规划问题的解.

综上所述, 根据文献 [14] 和 [20] 可得求解的一般步骤如下:

Step 1: 确定初始可行解 $(p^{(1)}, z^{(1)})$, 设定步长限制 $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}$, 缩小系数 $0<\eta<1$, 允许误差 θ_1, θ_2, 置 $k=1$.

Step 2: 对 M_3 与式 (40) 组成的线性规划求解, 最优解为 $(p^{\sim}, z^{\sim})$.

Step 3: $(p^{\sim}, z^{\sim})$ 为原问题的可行解, 则令 $(p^{\sim}, z^{\sim}) = (p^{(k+1)}, z^{(k+1)})$, 转至 Step 4; 否则, 令 $\xi_1^{(1)} = \eta\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)} = \eta\xi_2^{(1)}$, 转至 Step 2.

Step 4: 如果

$$\begin{cases} |\mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p^{(k+1)},z^{(k+1)}) - \mathrm{CVaR}_\beta^{(2)}(p^{(k)},z^{(k)})| < \theta_1, \\ |p^{(k+1)}-p^{(k)}| < \theta_2, \\ |z^{(k+1)}-z^{(k)}| < \theta_2, \end{cases} \tag{41}$$

则点 $(p^{(k+1)}, z^{(k+1)})$ 为原问题近似解; 否则, 令 $\xi_1^{(k+1)} = \xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k+1)} = \xi_2^{(k)}, k = k+1$, 转至 Step 2.

3) 在预算约束起作用、损失约束不起作用的情况下, M 和 N 的范围为

$$\begin{cases} 0 < M < wz_2' + wa - bwp_2', \\ N \geqslant (w-s)\int_A^{z_2'} F(x)\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{42}$$

去掉损失约束, 计算步骤与情况 2) 相同.

4) 在损失约束起作用、预算约束不起作用的情况下, M 和 N 的范围为

$$\begin{cases} M \geqslant wz_2' + wa - bwp_2', \\ 0 < N < (w-s)\int_A^{z_2'} F(x)\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{43}$$

去掉损失约束, 计算步骤与情况 3) 相同.

5) 在损失约束、预算约束过度约束的情况下, $M < 0$ 或者 $N < 0$, 根据实际意义, 模型解为 (0,0), 即决策者不会订货.

综上所述, 引出如下定理:

定理 3　(p_1^*, z_1^*), (p_2^*, z_2^*) 分别为 M_1, M_2 的最优解, 则模型的最优解为使 CVaR_β 最大的一组解, 记为 (p^*, z^*), 决策者在预算约束与损失约束下的最优定价为 p^*, 最优订购量为 $q^* = y(p^*) + z^*$.

3　算例分析

文献 [11] 利用比较静态分析给出了无约束条件下部分参数之间的关系, 本文主要通过算例来探讨风险态度、约束条件对最优决策、目标函数的影响及风险态度、约束条件与边际贡献率之间的关系.

首先, 将各参数进行赋值: $w = 20$, $s = 10$, $a = 100$, $b = 2$, $y(p) = 100 - 2p$, ϵ 服从 $[-10, 10]$ 上均匀分布; 因此, $A = -10$, $B = 10$, $f(x) = 1/20$, $F(x) = (x+10)/20$, $F^{-1}(x) = 20x - 10$. β 反映风险规避水平, β 越大决策者越规避风险, 本文取 $\beta = 0$ (风险中性). $\beta = 0.2$ 和 $\beta = 0.5$ 三种风险水平; 然后利用 Lingo 软件计算出不同风险水平、不同约束组合下的最优决策, 结果如表 1～表 3 所示.

由表 1～表 3 可以发现, 在无预算约束和损失约束下的结果与文献 [11] 得出的一些描述性结论一致, 如风险规避程度越高, 最优定价越低. 同时还发现, 风险规避水平较高时, 收益的 CVaR 较低, 这体现了风险与收益对等的观点. 下面将详细讨论约束条件、风险态度对最优决策、目标函数值、边际贡献率等的影响.

表 1　风险因子等于 0 时 ($\beta = 0$)、不同约束组合下的报童最优决策

指标	无约束条件	预算约束单独作用 $0 < M < 624.8$			损失约束单独作用 $0 < N < 2.5$			预算、损失约束均作用	
		$M = 400$	$M = 300$	$M = 200$	$N = 2$	$N = 1.5$	$N = 1$	$M = 300, N = 1.5$	$M = 200, N = 1$
最优定价 p^*	34.38	38.33	39.91	41.55	33.16	33.07	32.98	38.72	41.01
最优订单量 q^*	31.24	20.01	15.00	9.99	26.51	26.31	26.04	15.01	9.98
maxCVaR	388.28	335.19	281.28	207.92	344.22	340.40	335.70	276.56	206.90

注: 不同风险水平下损失约束有效阈值变化较大, 所以不同风险水平下所取 N 值不尽相同, 对比时注意.

表 2　风险因子等于 0.2 时 ($\beta = 0.2$)、不同约束组合下的报童最优决策

指标	无约束条件	预算约束单独作用 $0 < M < 621.2$			损失约束单独作用 $0 < N < 22$			预算、损失约束均作用	
		$M = 400$	$M = 300$	$M = 200$	$N = 18$	$N = 12$	$N = 1$	$M = 300, N = 12$	$M = 200, N = 1$
最优定价 p^*	34.16	37.75	39.47	41.25	34.06	33.86	32.97	39.47	41.00
最优订单量 q^*	31.06	19.99	15.00	10.01	30.37	29.21	26.06	15.00	10.00
maxCVaR	373.38	328.77	277.75	206.40	372.80	369.04	335.13	277.75	206.13

表 3　风险因子等于 0.5 时 ($\beta = 0.5$)、不同约束组合下的报童最优决策

指标	无约束条件	预算约束单独作用 $0 < M < 574.2$			损失约束单独作用 $0 < N < 8.48$			预算、损失约束均作用	
		$M = 400$	$M = 300$	$M = 200$	$N = 7$	$N = 5$	$N = 1$	$M = 300, N = 5$	$M = 200, N = 1$
最优定价 p^*	33.52	36.80	38.77	40.80	33.47	33.37	32.95	38.77	40.80
最优订单量 q^*	28.71	20.01	15.01	10.00	28.35	27.73	26.10	15.01	10.00
maxCVaR	349.28	318.63	272.27	204.06	349.04	347.41	333.41	272.27	204.06

3.1 约束条件对最优决策的影响

通过表1～表3中的不同约束组合最优决策结果分析, 当预算约束单独作用时, 最优定价显著高于无约束时最优定价, 最优订单量显著低于无约束时最优订单量, 并且约束越紧, 最优订单量越低, 最优定价越高, 这主要是因为预算限制导致订单量下降, 市场可供应产品量降低, 造成供不应求; 因此, 决策者可通过提高价格来提高自身收益, 但预算约束的存在显著降低了最优收益CVaR.

与预算约束不同的是, 当损失约束单独作用时, 最优定价与最优订单量均低于无约束时的最优定价、最优订单量, 约束越紧, 最优订单量越低, 最优定价越低. 产生这种现象的原因主要有两方面: 一方面, 当只存在滞销损失时, 在损失约束下, 决策者趋向于减少订单量来避免滞销造成的损失; 另一方面, 为了避免滞销损失, 决策者趋向于制定较低的定价来刺激市场需求, 从而增加销售量来避免供过于求产生的损失. 与预算约束一致的是, 损失约束显著降低了最优收益CVaR, 而且约束越紧, 收益CVaR也会越低.

文中有效阀值是指使约束条件影响目标函数值的最大约束值, 如表1中的预算约束有效阀值为624.8, 损失约束有效阀值为2.5. 从表1～表3中可以看出, 预算约束的有效阀值远远高于损失约束的有效阀值; 因此, 预算约束更容易对决策的结果产生影响. 当预算约束与损失约束同时起作用时, 最优定价与最优订单量明显偏向于预算约束单独作用时的最优决策, 这说明预算约束对决策的影响力大. 主要原因是模型没有缺货损失, 而且最优解求解过程中也涵盖了供大于求带来的损失的影响; 因此, 模型本身的最优解已经分散掉一部分损失规避.

3.2 约束条件与风险态度对CVaR的影响

通过表1～表3可以发现, 风险态度与约束值的改变对最优收益CVaR的影响幅度不尽相同; 因此, 本文进一步进行模拟, 获得了不同风险态度下目标函数CVaR对约束值M和N的弹性系数模拟曲线, 如图1和图2所示.

通过将图1和图2对比发现, 虽然预算约束的

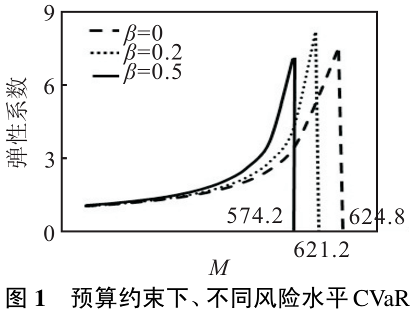

图1 预算约束下、不同风险水平CVaR对约束值弹性系数

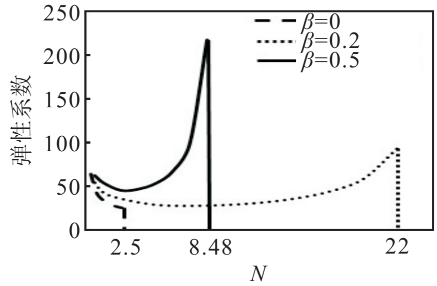

图2 损失约束下、不同风险水平CVaR对约束值弹性系数

有效阀值明显高于损失约束, 但损失约束的弹性系数明显高于预算约束, 最高可以达到几十倍, 这说明损失约束对收益CVaR的敏感度较高, 少许地放宽损失约束可大幅度地改善目标函数值.

由图1可知, 预算约束下, 随着约束值M的增大, 弹性系数呈指数增长, 当约束值超过有效阀值时, 弹性系数变为0; 因此, 在有效阀值内, 当约束值趋近于有效阀值时, 放宽预算约束可有效改善目标函数值.

从图1还可以看出, 风险规避程度越高, 预算约束的有效阀值越小, 而在有效阀值内, 相同约束值下, 风险规避程度越高, 弹性系数越大, 随着约束值的增大, 弹性系数之间的差距也变大, 这说明在相同的预算约束值下, 对风险规避者来说, 放宽预算约束可更多地提高目标收益CVaR.

通过分析图2发现, 与预算约束不同的是, 在损失约束下, 风险水平变化与约束的有效阀值变化不单调, 随着风险规避程度的增大, 有效阀值先增大后减小, 在3种风险水平中, 当$\beta = 0.2$时最大, 达到22. 而不同风险水平下, 弹性系数随约束值的变化亦不同, 当$\beta = 0$时, 弹性系数在有效阀值内随约束值的增大而降低; 而当$\beta = 0.2$与$\beta = 0.5$时, 弹性系数在有效阀值内随约束值的增大先降低, 然后呈指数增长, 而风险规避程度越大, 增长幅度越大, 超过有效阀值后弹性系数降为0; 因此, 损失约束值对目标函数的高敏感区域因风险水平的不同而不同, 在有效阀值内, 当风险规避程度低时, 高敏感区远离有效阀值, 风险规避程度高时靠近有效阀值. 然而, 与预算约束一致的是, 在有效阀值内, 相同约束值下, 风险规避程度越高, 弹性系数越大, 这说明在相同的损失约束值下, 风险规避程度大的主体放宽约束值可更大幅度地提高目标函数值.

3.3 约束条件与风险态度对边际贡献率的影响

作为目标函数的收益CVaR值涵盖了报童问题的风险与收益, 但并没有涵盖报童决策的质量, 因为收益CVaR值是一种绝对值, 计算引用的函数是扣除了各项成本的净收益值, 并没有考虑为获得当前净收益的付出, 也就是没有考虑经营效率. 为此, 本文引进

边际贡献率来衡量不同风险态度与约束条件下的经营效率变化. 由于损失约束下不同约束值的边际贡献率差别不大, 仅分析预算约束下不同风险水平的边际贡献率变化, 如图 3 所示.

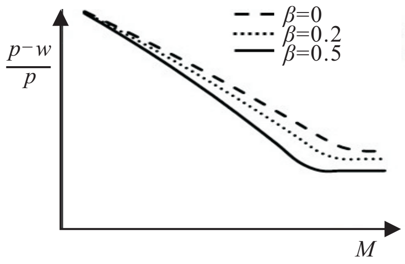

图 3　不同风险水平下预算约束值-边际贡献率

由图 3 可以看出, 在预算约束的有效阀值内, 边际贡献率随约束值增大而降低, 当约束值超过有效阀值时边际贡献率达到固定水平. 这说明, 随着预算约束的放宽, 决策者的经营效率却在降低. 这是因为在有较紧的预算约束情况下, 订单量较低, 为了应对供不应求局面, 决策者可提高价格, 同时占用较少的资源量, 所以具有较高的经营效率; 但此时决策者的盈利规模会降低, 因为从表 1～表 3 可以看出, 当预算约束趋紧时, 收益 CVaR 值有显著的降低.

从图 3 还发现, 不同风险水平对边际贡献率的影响幅度不同, 在偏紧的预算约束下, 不同风险水平的边际贡献率区别不大; 但随着预算约束值变大, 风险规避程度越高, 边际贡献率降低幅度越大, 当超过有效阀值时不同风险水平之间保持固定的边际贡献率差距. 也就是说, 相同情况下, 风险规避程度高的主体经营效率低于风险规避程度低的主体, 并且经营效率随预算约束值的变化有较大的波动.

通过以上研究, 发现了风险水平、约束条件对最优决策、目标函数产生的不同影响; 通过分析讨论, 发现了约束条件与风险态度对报童问题经营效率的影响规律.

4　结　论

本文建立了具有预算约束、损失约束、需求依赖于价格, 以及基于 CVaR 准则的有关报童问题的价格-订单量决策模型, 探讨了模型解的存在性与求解的一般方法, 并且计算出了预算约束与损失约束的有效阀值. 最后进行了算例分析, 通过研究分析, 将预算约束与损失约束对目标函数的敏感程度进行比较, 找出了各自的高敏感区域, 发现了 CVaR 对约束值的弹性系数与风险规避程度之间的关系, 探明了预算约束和风险规避程度对边际贡献率的影响规律等, 而以往学者对这些方面的研究较少. 下面将研究的主要结论与相应管理借鉴归结如下:

1) 约束条件对最优决策的影响.

在预算约束下, 决策者不得不降低订单量, 由此产生供货紧张, 决策者会趋向提高售价来提高自身收益; 但是, 在损失约束下, 决策者为了将损失限制在给定范围内, 趋向于同时降低订单量与销售价格.

预算约束对于决策者来讲具有可以调整的余地, 但为了获取更大规模的收益, 决策者应该避免预算约束, 而对损失约束决策者没有自调整策略; 因此, 管理者应该极力提高损失的承受能力, 将约束值控制在有效阀值之外.

2) 约束条件与风险态度对 CVaR 的影响.

① 相对于预算约束, 损失约束的 CVaR 对约束值的弹性系数较大, 提高损失约束的约束值可显著提高目标函数值.

当同时面对损失约束与预算约束的限制时, 改进成本区别不大, 决策者应该优先改进损失约束, 因为损失约束的放宽可更大幅度地提高目标函数值.

② 在有效阀值内, 预算约束弹性系数在趋近有效阀值时相对较大, 而且趋近的过程中呈指数增长, 而损失约束的弹性系数变化趋势与风险规避程度有关, 在有效阀值内, 风险规避程度高时弹性系数在趋近于有效阀值处相对较大, 风险规避水平低时在远离有效阀值处相对较大.

当预算缺口不大时, 管理者应该尽量采取措施满足预算需要, 因为此时稍微的预算短缺将大幅度降低盈利水平; 而对于损失约束的改进应该考虑当前风险水平下所处的约束值区域, 当处于低弹性系数区域时要慎重比较改进的边际成本与获得的边际收益.

③ 无论在预算约束还是损失约束下, 风险规避均显著降低了 CVaR 对约束值的弹性系数, 风险规避程度高的主体放宽约束值时对目标函数值的改善幅度低.

对约束值进行放宽改进时, 应该考虑决策主体的风险态度, 如果管理者为风险规避类型, 则改进的风险较大; 因为他们的安全边际较低, 改进的成本容易高于新增的收益.

3) 约束条件与风险态度对边际贡献率的影响.

在有效阀值内, 当预算约束值增大时, 边际贡献率降低, 风险规避程度越高, 边际贡献率下降幅度越大, 超过有效阀值后边际贡献率保持在固定水平.

在既定的模型假设下, 约束值的放宽可有效地提高目标函数值, 但却降低了经营的效率; 因此, 如果固定成本占总成本比例较小, 则在规模效益不大时, 作为决策者, 尤其是风险规避决策者可选择不完全投资, 而将剩余的资源投资于盈利能力更高的项目中, 从而实现既定资源收益最大化.

以上即是本文研究的一些主要结论与管理借鉴, 这些结论对今后的理论研究与管理决策都有一些借鉴意义, 但在研究过程中仍有许多不足. 例如: 没有考虑缺货损失, 仅考虑了价格需求函数的加法形式; 对于损失约束对弹性系数的具体影响未作深入研究, 并且只考虑了单报童单阶段决策, 未全面考虑市场环境. 未来的研究可以针对模型的局限性进行探讨, 还可以探讨多产品决策, 讨论不同价格需求函数对结果的影响等.

参考文献(**References**)

[1] Qin Y, Wang R, Vakharia A J, et al. The newsvendor problem: Review and directions for future research[J]. European J of Operational Research, 2011, 213(2): 361-374.

[2] Whitin T M. Inventory control and price theory[J]. Management Science, 1955, 2(1): 61-68.

[3] Mills E S. Uncertainty and price theory[J]. The Quarterly J of Economics, 1959, 73(1): 116-130.

[4] Karlin S, Carr C R. Prices and optimal inventory policy[M]. Standford: Stanford University Press, 1962: 159-172.

[5] Petruzzi N C, Dada M. Pricing and newsvendor problem: A review with extensions[J]. Operations Research, 1999, 47(2): 183-194.

[6] Eeckhoudt L, Gollier C, Schlesinger H . The risk averse (and prudent) newsboy[J]. Management Science, 1995, 41 (5): 786-794.

[7] Rockafellar R T, Uryasev S . Optimization of conditional value-at-risk[J]. J of Risk, 2000, 2(3): 21-41.

[8] Rockafellar R T, Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distribution[J]. J of Banking and Finance, 2002, 26(7): 1443-1471.

[9] Chen X, Sim M, Simchi-Levi D, et al. Risk aversion in inventory management [R]. Cambriage: MIT, 2003: 1-32.

[10] Chen X, Sim M, Simchi-Lev D, et al. Risk aversion in inventory management[J]. Operations Research, 2007, 55 (5): 828-842.

[11] Chen Y, Xu M, Zhang Z G . A risk averse newsvendor model under the CVaR criterion[J]. Operations Research, 2009, 57(4): 1040-1044.

[12] Zhou Y j, Chen X H, Wang Z R. Optimal ordering quantities for multi-products with stochastic demand: Return-CVaR model[J]. Int J of Production Economics, 2008, 112(2): 782-795.

[13] 周艳菊, 邱菀华, 王宗润. 损失约束下多产品报童问题的求解方法研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(9): 1005-1010.
(Zhou Y J, Qiu W H, Wang Z R. Solving approach to multi-product newsvendor model with loss constraint[J]. Control and Decision, 2007, 22(9): 1005-1010.)

[14] 周艳菊, 邱菀华, 王宗润. 不同约束下多产品报童问题解的比较研究[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(1): 97-103.
(Zhou Y J, Qiu W H, Wang Z R. Comparativeanalysis of the solutions for multi-product newsvendor problem with different constraints[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(1): 97-103.)

[15] Jamernegg W, Kischka P. The price setting newsvendor with service and loss constraints[EB/OL]. http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2012.03.011.2012.4.6/2012.6.25.

[16] Gotoh J, Takano Y. Newsvendor solutions via conditional value-at-risk minimization[J]. European J of Operational Research, 2007, 179(1): 80-96.

[17] 许明辉, 于刚, 张汉勤. 带有缺货惩罚的报童问题模型中的CVaR研究[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26 (10): 1-8.
(Xu M H, Yu G, Zhang H Q. CVaR in a newsvendor model with lost sale penalty cost[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2006, 26 (10): 1-8.)

[18] 柳键, 罗春林. 利润-CVaR准则下的二级供应链定价与订货策略研究[J]. 控制与决策, 2010, 25(1): 130-136.
(Liu J, Luo C L. Pricing and ordering strategies in a two-echelon supply chain under criterion of profit-CVaR[J]. Control and Decision, 2010, 25(1): 130-136.)

[19] 周树民, 王涛. 基于CVaR准则下二层报童问题模型及其解法[J]. 江汉大学学报: 自然科学版, 2009, 37 (1): 12-15.
(Zhou S M, Wang T. Model and solution for bilevel newsboy problem with CVaR criterion[J]. J of Jianghan University: Natural Science Edition, 2009, 37(1): 12-15.)

[20] Himmelblau D M. Applied nonlinear programming[M]. Beijing: Science Press, 1981: 244-299.

[21] Wu J, Wang S, Chao X , et al . Impact of risk aversion on optimal decisions in supply contracts[J]. Int J of Production Economics, 2010, 128(2): 569-576.