

文章编号: 1001-0920(2013)12-1874-10

## 执行器饱和不确定NCS非脆弱鲁棒容错控制

曹慧超, 李 炜

(兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 兰州 730050)

**摘要:** 针对存在时变时延和丢包的不确定网络化控制系统(NCS), 同时考虑执行器饱和、控制器参数摄动以及非线性扰动等约束, 研究执行器发生结构性失效故障时系统的鲁棒容错多约束控制问题. 基于时滞依赖 Lyapunov 方法和容错吸引域定义, 采用状态反馈控制策略推证出了闭环故障不确定网络化控制系统稳定的少保守性不变集充分条件, 并给出了非脆弱鲁棒容错控制器的设计方法以及最大容错吸引域的估计. 仿真算例验证了所述方法的可行性和有效性.

**关键词:** 网络化控制系统; 鲁棒完整性; 非脆弱控制; 执行器饱和; 综合时变时延

**中图分类号:** TP302.8

**文献标志码:** A

## Non-fragile robust fault-tolerant control for uncertain NCS with actuator saturation

CAO Hui-chao, LI Wei

(College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China.  
Correspondent: LI Wei, E-mail: liwei@lut.cn)

**Abstract:** For a class of uncertain networked control system(NCS) with time-varying delay and data packet dropout, the problem of multi-constraints robust fault-tolerant control for NCS with actuator structural failures is discussed by using state feedback control strategy. The effect of actuator saturation, nonlinear perturbation and controller parameter perturbation are considered simultaneously. Based on a class of delay-dependent Lyapunov method and a definition of the domain of fault-tolerant attraction, the set of invariance conditions of the closed-loop uncertain NCS against actuator structural failures is derived, and the design method of non-fragile robust fault-tolerant controller is given. The domain of fault-tolerant attraction of the closed-loop system is estimated. A simulation example shows the effectiveness and the feasibility of the proposed approach.

**Key words:** networked control system; robust integrality; non-fragile control; actuator saturation; comprehensive time-varying delay

### 0 引 言

现今, 网络化控制系统(NCS)以其诸多优势在各领域都得到了广泛应用. 然而, 由于反馈回路中有通讯网络的介入, 衍生出了网络诱导时延、数据丢包等问题<sup>[1-2]</sup>, 同时, 由于NCS规模更加庞大、结构更加分布、复杂程度更高, 使得不确定性和各种故障诱发因素俱增, 因此对NCS进行容错设计, 提高其安全可靠已成为现代控制系统的本征要求<sup>[3]</sup>. 文献[4-9]针对存在时变时延和丢包的NCS, 采用状态反馈控制策略分别研究了系统的鲁棒完整性、鲁棒 $H_\infty$ 、鲁棒保性能及鲁棒 $H_\infty$ 保性能容错等问题. 考虑在实际工

程应用中, 被控对象状态信息检测受环境或经济条件的制约, 文献[10-11]基于动态输出反馈控制, 讨论了NCS具有鲁棒完整性及具有一定性能约束的鲁棒容错判别准则, 但在现有的研究结果中尚未涉及执行器饱和、控制器参数摄动等约束. 在实际控制系统中, 工业仪表、控制元件本身都存在物理特性的限制, 作为控制系统核心部件的执行器往往受非线性饱和特性的约束<sup>[12]</sup>, 同时, NCS作为典型的数字系统, 控制器参数也存在一定的误差或变化<sup>[13]</sup>. 无论是执行器饱和现象还是控制器实现时的参数摄动都可能导致闭环系统性能劣化或稳定性遭到破坏, 因此

收稿日期: 2012-08-31; 修回日期: 2013-01-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61364011); 甘肃省自然科学基金项目(1212RJZA002).

作者简介: 曹慧超(1986-), 女, 博士生, 从事故障诊断与容错控制的研究; 李炜(1963-), 女, 教授, 博士生导师, 从事动态系统的故障诊断与容错控制、工业过程先进控制等研究.

设计一种同时考虑这两种因素的非脆弱鲁棒控制器便显得尤为重要. 文献 [14-15] 基于不同控制策略, 分别研究了 NCS 考虑执行器饱和约束时的稳定性及鲁棒  $H_\infty$  优化控制问题; 文献 [16-19] 采用不同方法, 分别给出了 NCS 具有非脆弱  $H_\infty$  抗干扰性能、非脆弱保性能、非脆弱  $H_\infty$  保性能的充分条件. 但上述研究仅限于无故障的正常系统.

当实际系统发生故障时, 控制量通常远大于正常情形, 而执行器受自身饱和和物理属性的限制, 只能达到一定的输出值, 控制器实现时也无法避免误差. 因此, 同时考虑上述约束, 对执行器饱和 NCS 进行非脆弱鲁棒容错控制研究, 更具实际意义和挑战性. 基于此, 本文针对具有网络诱导时延和数据丢包的不确定 NCS, 在执行器发生结构性失效故障的情形下, 同时考虑执行器饱和、控制器参数摄动及非线性扰动等约束, 基于时滞依赖的 Lyapunov 方法和容错吸引域定义, 推证出不确定闭环故障 NCS 具有鲁棒完整性的少保守性充分条件, 同时给出非脆弱鲁棒容错控制器的设计方法, 并通过优化处理得到最大容错吸引域的估计. 最后以一个仿真算例验证了文中所述方法的可行性和有效性.

## 1 问题描述

考虑具有执行器饱和及非线性扰动约束的不确定 NCS 被控对象模型

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)\text{sat}(u(t)) + f(t, x), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_M, 0]. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  分别为系统的状态、控制输入向量;  $\phi(t)$  为给定的初始向量值连续函数;  $\text{sat}(\cdot) : R^n \rightarrow R^m$  为标准饱和函数, 即

$$\text{sat}(u) = [\text{sat}(u_1) \quad \text{sat}(u_2) \quad \cdots \quad \text{sat}(u_m)]^T,$$

$$\text{sat}(u_i) \triangleq \text{sign}(u_i) \min\{1, |u_i|\};$$

$f(t, x)$  为不确定非线性项, 满足 Lipschitz 条件  $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \|G(x_1 - x_2)\|$ ,  $G$  为已知的实常矩阵;  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$  为适当维数的常数矩阵;  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  为范数有界的时变参数不确定性矩阵, 满足

$$[\Delta A, \Delta B] = H_1 F_1(t) [E_1, E_2], \quad (2)$$

$H_1$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  为已知的适当维数实常数矩阵;  $F_1(t)$  为未知时变实值连续矩阵函数, 其元素 Lebesgue 可测, 且满足  $F_1^T(t) F_1(t) \leq I$ ,  $I$  为单位矩阵.

对网络作如下假设:

**假设 1** 传感器为时钟驱动, 控制器、执行器及零阶保持器为事件驱动, 数据采用单包传输, 系统所有状态均可测量, 采样周期为常数  $T$ .

**假设 2** 从传感器到控制器、控制器到执行器

均存在网络诱导时延和数据丢包.

依据文献 [8, 20] 对 NCS 时延和丢包的描述以及控制器的推导, 同时考虑时变时延和丢包的状态反馈非脆弱鲁棒控制器为

$$\begin{aligned} u(t) &= (K + \Delta K)x(t - h(t)), \\ t &\in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \cdots, \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $K \in R^{m \times n}$  为控制增益阵;  $\Delta K \in R^{m \times n}$  为控制增益摄动阵, 本文采用加法式控制增益摄动, 即

$$\Delta K = H_2 F_2(t) E_3, \quad (4)$$

$H_2$ ,  $E_3$  为已知的适当维数实常数矩阵,  $F_2(t)$  定义同  $F_1(t)$ ;  $h(t)$  为包含时延和丢包的区间时变时延, 满足

$$0 < h_m \leq h(t) \leq h_M, \quad (5)$$

$$\dot{h}(t) \leq \mu, \quad (6)$$

$h_m$ ,  $h_M$  分别为时变时延的下界和上界, 且  $h_m = \underline{\tau}$ ,  $h_M = \bar{\tau} + (\bar{d} + 1)T$ ,  $\bar{\tau}$  和  $\underline{\tau}$  分别为时延上、下界,  $\bar{d}$  为最大丢包数,  $\mu$  为常数.

令  $\ell(K) = \{x_0 \in R^n : |k_j x| \leq 1, i = 1, 2, \cdots, m\}$ , 矩阵  $K \in R^{m \times n}$ ,  $k_j$  是  $K$  的第  $j$  行, 称  $\ell(K)$  为反馈控制的非饱和域, 或饱和反馈控制的线性域, 即对于任意的  $x \in \ell(K)$ ,  $\text{sat}(Fx) = Fx$ .

考虑控制系统可能发生执行器结构性失效故障, 其模型为

$$u^f(t) = Mu(t). \quad (7)$$

其中:  $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$  为执行器故障矩阵,  $M \in \Omega$  表示所有可能执行器失效故障模式的集合. 当  $m_i = 0$  时, 表示第  $i$  个执行器完全失效; 当  $m_i = 1$  时, 表示第  $i$  个执行器正常工作; 当  $m_i \in (0, 1)$  时, 表示第  $i$  个执行器部分失效.

为便于分析, 引入如下矩阵:

$$M_u = \text{diag}\{m_{u1}, m_{u2}, \cdots, m_{un}\};$$

$$M_l = \text{diag}\{m_{l1}, m_{l2}, \cdots, m_{ln}\};$$

$$M_0 = \text{diag}\{m_{01}, m_{02}, \cdots, m_{0n}\},$$

$$m_{0i} = (m_{ui} + m_{li})/2;$$

$$J = \text{diag}\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}, \quad j_i = \frac{m_{ui} - m_{li}}{m_{ui} + m_{li}};$$

$$L = \text{diag}\{l_1, l_2, \cdots, l_n\}, \quad l_i = \frac{m_i - m_{0i}}{m_{0i}};$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

则有

$$M = M_0(I + L), \quad (8)$$

其中  $|L| \leq J \leq I$  且  $M_l \leq M \leq M_u$ .

结合式 (1)、(3) 和 (7), 得执行器饱和和不确定网络化闭环故障系统 (NCFS) 模型为

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}Msat(\bar{K}x(t-h(t))) + f(t, x),$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}), k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (9)$$

其中

$$\bar{A} = A + \Delta A, \bar{B} = B + \Delta B, \quad (10)$$

$$\bar{K} = K + \Delta K. \quad (11)$$

为得到本文结果, 首先给出以下 3 个定义和 5 个引理.

对于  $x(0) = x_0 \in R^n$ , 假设系统 (9) 执行器无故障时, 相应的状态轨迹为  $\psi(t, x_0)$ .

**定义 1**<sup>[21]</sup> 原点的吸引域记为  $\varphi_a$ , 定义

$$\varphi_a = \{x_0 \in R^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, x_0) = 0\}.$$

**定义 2**<sup>[21]</sup> 收缩不变集记为  $\varphi$ , 定义

$$x_0 \in \varphi \Rightarrow x(t) \in \varphi, \forall t \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, x_0) = 0$$

对所有的初始条件  $x_0 \in \varphi \setminus \{0\}$  均成立.

**注 1** 如果集合  $\varphi$  是收缩不变集, 则其应在吸引域内部. 一般而言, 一个系统的吸引域很难精确获得, 因此, 吸引域的求取通常可采用不变集进行估计.

令  $P \in R^{n \times n}$  是一个正定矩阵, 对一个正数  $\rho$ , 定义椭球体

$$\varepsilon(P, \rho) = \{x \in R^n, x^T P x \leq \rho\},$$

则椭球体  $\varepsilon(P, \rho)$  可被用来估计吸引域. 为了符号的简单, 记  $\varepsilon(P)$  表示  $\varepsilon(P, 1)$ .

**注 2** 前述定义仅给出了 NCS 执行器无故障时原点吸引域, 并未考虑执行器发生故障的情形. 下面给出容错吸引域的定义.

**定义 3** 系统在状态转移过程中, 执行器无论发生  $M \in \Omega$  的何种故障, 从  $\varphi_b$  出发的任何初始状态均能收敛于平衡点, 即

$$\varphi_b = \{x_0 \in R^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, x_0) = 0, \forall M \in \Omega\}.$$

此时称  $\varphi_b$  为容错吸引域.

**引理 1**<sup>[21]</sup> 给定矩阵  $K, F \in R^{m \times n}$ , 对于  $x \in R^n$ , 如果  $x \in \ell(F)$ , 则有

$$\text{sat}(Kx) \in \text{co}\{\Upsilon_i Kx + \Upsilon_i^- Fx : i = 1, 2, \dots, 2^m\}. \quad (12)$$

其中:  $\text{co}\{\cdot\}$  表示  $\Upsilon_i Kx + \Upsilon_i^- Fx (\Upsilon_i \in \Upsilon, i = 1, 2, \dots, 2^m)$  组成的凸包;  $\Upsilon$  表示一个  $m \times m$  对角矩阵的集合, 且其对角线上的元素是 1 或者 0. 显然  $\Upsilon$  含有  $2^m$  个元素, 例如, 若  $m = 2$  时, 则

$$\Upsilon = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

假设  $\Upsilon$  的每个元素被标记为  $\Upsilon_i, i = 1, 2, \dots, 2^m$ , 即  $\Upsilon = \{\Upsilon_i : i \in [1, 2^m]\}$ . 定义  $\Upsilon_i^- = I - \Upsilon_i$ , 则  $\Upsilon_i^- \in \Upsilon$ .

**引理 2**<sup>[22]</sup> 对于任意矩阵  $N \in R^{n \times n}, N = N^T \geq 0$ , 标量  $\gamma > 0$  及向量值函数  $\dot{x} : [-\gamma, 0] \rightarrow R^n$ , 以下积分不等式成立:

$$-\gamma \int_{t-\gamma}^t \dot{x}^T(s) N \dot{x}(s) ds \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\gamma) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -N & N \\ N & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\gamma) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

**引理 3**<sup>[23]</sup> 对于任意标量  $W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \tau(t)$  是一个连续函数且满足式 (5), 则有

$$\frac{W_1}{\tau(t) - \tau_m} + \frac{W_2}{\tau_M - \tau(t)} \geq \min \left\{ \frac{3W_1 + W_2}{\tau_M - \tau_m}, \frac{W_1 + 3W_2}{\tau_M - \tau_m} \right\}. \quad (14)$$

**引理 4**<sup>[24]</sup> 对于具有适当维数的矩阵  $Y, M$  和  $E$ , 其中  $Y = Y^T$ , 有

$$Y + MF(t)E + E^T F^T(t)M^T < 0 \quad (15)$$

对于所有满足  $F^T(t)F(t) \leq I$  的矩阵  $F(t)$  成立, 当且仅当存在一个常数  $\varepsilon > 0$ , 使得如下不等式成立:

$$Y + \varepsilon MM^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0. \quad (16)$$

**引理 5**<sup>[25]</sup> 对于具有适当维数的矩阵  $Y_1, G, H$  和  $I$ , 其中  $Y_1 = Y_1^T$ , 有

$$Y_1 + GHI^T + IH^T G^T < 0 \quad (17)$$

对于所有满足  $H = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_r), H_i^T H_i \leq I (i = 1, 2, \dots, r)$  的矩阵  $H$  成立, 当且仅当存在一个对角矩阵  $U > 0$ , 使得

$$Y_1 + GUG^T + IU^{-1}I^T < 0. \quad (18)$$

## 2 主要结果

针对具有执行器饱和约束及非线性扰动的不确定 NCS, 在执行器发生结构性失效故障情形下, 非脆弱鲁棒容错控制的设计目标为: 寻求状态反馈增益阵  $K$ , 使得同时受控制器参数摄动和执行器饱和约束的不确定网络化闭环故障系统具有鲁棒完整性, 即系统 (9) 具有不变收缩集.

### 2.1 不变集条件

**定理 1** 考虑系统 (9), 给定常数  $\mu > 0, \varepsilon_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ , 如果存在对称正定矩阵  $X, \tilde{S}_i, \tilde{R}_i, \tilde{Q}_j (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 6)$ , 对角矩阵  $W_1$  及适当维数的矩阵  $\tilde{K}, \tilde{F}$ , 使得对于任意可能的执行器结构性失效故障模式  $M$  和可接受的系统参数不确定性与控制器参数摄动, 满足下列矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Sigma^1 & \Sigma^2 & \Sigma^3 \\ * & \Sigma^4 & \Sigma^5 \\ * & * & \Sigma^6 \end{bmatrix} < 0, \quad (19a)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}^1 & \Sigma^2 & \Sigma^3 \\ * & \Sigma^4 & \Sigma^5 \\ * & * & \Sigma^6 \end{bmatrix} < 0, \quad (19b)$$

$\varepsilon(P) \subset \ell(F)$ , 即  $\forall x \in R^n : |f_j x| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m$ , 其中  $f_j$  为  $F$  的第  $j$  行. 则  $\forall x_0 \in \varepsilon(P)$ , 不确定 NCFS (9) 渐近稳定, 系统状态轨迹仍能保持在不变集  $\varepsilon(P)$  内, 即式 (3) 是一使得系统 (9) 具有鲁棒完整性的非脆弱鲁棒容错控制器, 控制器参数可由  $K = \tilde{K}X^{-1}$  求得. 式 (19) 中: \* 表示由矩阵对称性得到的矩阵块; 而

$$\begin{aligned} \Sigma^1 &= (\Sigma_{ij}^1)_{7 \times 7}, \delta = h_M - h_m, \\ \Sigma_{11}^1 &= AX + XA^T + \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 - \tilde{R}_1 - \\ &\quad \tilde{R}_2 + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_4 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 H_1 H_1^T, \\ \Sigma_{12}^1 &= BM_0 \Upsilon_i \tilde{K} + BM_0 \Upsilon_i^{-1} \tilde{F}, \\ \Sigma_{13}^1 &= -\tilde{R}_1 + \tilde{Q}_2, \Sigma_{15}^1 = \tilde{R}_2 + \tilde{Q}_5, \\ \Sigma_{17}^1 &= XE_1^T, \Sigma_{22}^1 = -(1 - \mu)\tilde{S}_1 - 4\tilde{R}_3, \\ \Sigma_{24}^1 &= 3\tilde{R}_3, \Sigma_{26}^1 = \tilde{R}_3, \\ \Sigma_{27}^1 &= \tilde{K}^T \Upsilon_i^T M_0^T E_2^T + \tilde{F}^T \Upsilon_i^{-T} M_0^T E_2^T, \\ \Sigma_{33}^1 &= -\tilde{R}_1 + \tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_1, \Sigma_{34}^1 = -\tilde{Q}_2, \\ \Sigma_{56}^1 &= -\tilde{Q}_5, \Sigma_{44}^1 = -\tilde{S}_2 - \tilde{Q}_3 - 3\tilde{R}_2, \\ \Sigma_{55}^1 &= -\tilde{R}_2 + \tilde{Q}_6 - \tilde{Q}_4, \\ \Sigma_{66}^1 &= -\tilde{S}_3 - \tilde{Q}_6 - \tilde{R}_3, \Sigma_{77}^1 = -\varepsilon_2 I, \\ \Sigma_{23}^1 &= \Sigma_{25}^1 = \Sigma_{35}^1 = \Sigma_{36}^1 = \Sigma_{37}^1 = 0, \\ \Sigma_{45}^1 &= \Sigma_{46}^1 = \Sigma_{47}^1 = \Sigma_{57}^1 = \Sigma_{67}^1 = 0, \\ \tilde{\Sigma}^1 &= (\tilde{\Sigma}_{ij}^1)_{7 \times 7}, \tilde{\Sigma}_{24}^1 = \tilde{R}_3, \tilde{\Sigma}_{26}^1 = 3\tilde{R}_3, \\ \tilde{\Sigma}_{44}^1 &= -\tilde{S}_2 - \tilde{Q}_3 - \tilde{R}_2, \tilde{\Sigma}_{66}^1 = -\tilde{S}_3 - \tilde{Q}_6 - 3\tilde{R}_3, \\ \tilde{\Sigma}^1 &\text{中其余项同 } \Sigma^1; \\ \Sigma^2 &= (\Sigma_{ij}^2)_{7 \times 4}, \\ \Sigma_{11}^2 &= \Sigma_{12}^2 = \Sigma_{13}^2 = XA^T, \Sigma_{14}^2 = XE_1^T, \\ \Sigma_{21}^2 &= \Sigma_{22}^2 = \Sigma_{23}^2 = \\ &\quad \tilde{K}^T \Upsilon_i^T M_0^T B^T + \tilde{F}^T \Upsilon_i^{-T} M_0^T B^T, \\ \Sigma_{24}^2 &= \tilde{K}^T \Upsilon_i^T M_0^T E_2^T + \tilde{F}^T \Upsilon_i^{-T} M_0^T E_2^T, \\ \Sigma_{31}^2 &= \dots = \Sigma_{34}^2 = \Sigma_{41}^2 = \dots = \Sigma_{44}^2 = 0, \\ \Sigma_{71}^2 &= \Sigma_{72}^2 = \Sigma_{73}^2 = I, \\ \Sigma_{51}^2 &= \dots = \Sigma_{54}^2 = \Sigma_{61}^2 = \dots = \Sigma_{64}^2 = \Sigma_{74}^2 = 0; \\ \Sigma^3 &= (\Sigma_{ij}^3)_{7 \times 5}, \\ \Sigma_{11}^3 &= \Sigma_{14}^3 = 0, \Sigma_{12}^3 = BM_0 \Upsilon_i H_2, \\ \Sigma_{13}^3 &= BM_0 J, \Sigma_{15}^3 = XG^T, \Sigma_{21}^3 = XE_3^T, \\ \Sigma_{72}^3 &= E_2 M_0 \Upsilon_i H_2, \\ \Sigma_{24}^3 &= \tilde{K}^T \Upsilon_i^T W_1^T + \tilde{F}^T \Upsilon_i^{-T} W_1^T, \\ \Sigma_{73}^3 &= E_2 M_0 J, \Sigma_{22}^3 = \Sigma_{32}^3 = \dots = \Sigma_{62}^3 = 0, \\ \Sigma_{23}^3 &= \Sigma_{33}^3 = \dots = \Sigma_{63}^3 = 0, \\ \Sigma_{34}^3 &= \Sigma_{44}^3 = \dots = \Sigma_{74}^3 = 0, \\ \Sigma_{25}^3 &= \Sigma_{35}^3 = \dots = \Sigma_{75}^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{31}^3 &= \Sigma_{41}^3 = \dots = \Sigma_{71}^3 = 0; \\ \Sigma^4 &= \text{diag} \left\{ -\frac{4}{h_m^2} (2X - \tilde{R}_1) + \varepsilon_3 H_1 H_1^T, \right. \\ &\quad \left. -\frac{4}{h_M^2} (2X - \tilde{R}_2) + \varepsilon_3 H_1 H_1^T, \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{\delta^2} (2X - \tilde{R}_3) + \varepsilon_3 H_1 H_1^T, -\varepsilon_3 I \right\}; \\ \Sigma^5 &= (\Sigma_{ij}^5)_{4 \times 5}, \\ \Sigma_{12}^5 &= \Sigma_{22}^5 = \Sigma_{32}^5 = BM_0 \Upsilon_i H_2, \\ \Sigma_{42}^5 &= E_2 M_0 \Upsilon_i H_2, \\ \Sigma_{13}^5 &= \Sigma_{23}^5 = \Sigma_{33}^5 = BM_0 J, \Sigma_{43}^5 = E_2 M_0 J, \\ \Sigma_{11}^5 &= \dots = \Sigma_{41}^5 = \Sigma_{14}^5 = \dots = \\ \Sigma_{44}^5 &= \Sigma_{15}^5 = \dots = \Sigma_{45}^5 = 0; \\ \Sigma^6 &= (\Sigma_{ij}^6)_{5 \times 5}, \\ \Sigma_{11}^6 &= -\varepsilon_4^{-1} I, \Sigma_{22}^6 = -\varepsilon_4 I, \Sigma_{33}^6 = \Sigma_{44}^6 = -W_1, \\ \Sigma_{24}^6 &= H_2^T \Upsilon_i^T W_1^T, \Sigma_{55}^6 = -\varepsilon_1 I, \\ \Sigma_{12}^6 &= \dots = \Sigma_{15}^6 = \\ \Sigma_{23}^6 &= \Sigma_{25}^6 = \Sigma_{34}^6 = \Sigma_{35}^6 = \Sigma_{45}^6 = 0. \end{aligned}$$

证明 构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) + V_3(x(t)), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &= \\ &\quad x^T(t)Px(t) + \int_{t-h(t)}^t x^T(s)S_1x(s)ds + \\ &\quad \int_{t-h_m}^t x^T(s)S_2x(s)ds + \int_{t-h_M}^t x^T(s)S_3x(s)ds, \quad (21) \\ V_2(x(t)) &= \\ &\quad \frac{h_m}{2} \int_{-h_m/2}^0 \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds + \\ &\quad \frac{h_M}{2} \int_{-h_M/2}^0 \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds + \\ &\quad \delta \int_{-h_M}^{-h_m} \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta ds, \quad (22) \\ V_3(x(t)) &= \\ &\quad \int_{t-\frac{h_m}{2}}^t \frac{h_m}{2} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \frac{h_m}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \frac{h_m}{2}) \end{bmatrix} ds + \\ &\quad \int_{t-\frac{h_M}{2}}^t \frac{h_M}{2} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \frac{h_M}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_4 & Q_5 \\ * & Q_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \frac{h_M}{2}) \end{bmatrix} ds. \quad (23) \end{aligned}$$

其中:  $P^T = P > 0, S_i^T = S_i > 0, R_i^T = R_i > 0, i = 1, 2, 3; Q_j^T = Q_j > 0, j = 1, 2, \dots, 6; \delta = h_M - h_m$ .

沿系统 (9) 对  $V(x(t))$  求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x(t)) &= \\ &\quad 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)S_1x(t) - \\ &\quad (1 - \mu)x^T(t - h(t))S_1x(t - h(t)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^T(t)S_2x(t) - x^T(t-h_m)S_2x(t-h_m) + \\ & x^T(t)S_3x(t) - x^T(t-h_M)S_3x(t-h_M). \end{aligned} \quad (24)$$

由引理 1、引理 4 和式 (21), 得

$$\begin{aligned} & 2x^T(t)P\dot{x}(t) \leq \\ & \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T(t)P[\bar{A}x(t) + \bar{B}M(\Upsilon_i\bar{K} + \Upsilon_i^-F)x(t-h(t))] + 2x^T(t)Pf(t, x) \leq \\ & \max_{i \in [1, 2^m]} 2x^T(t)P[\bar{A}x(t) + \bar{B}M(\Upsilon_i\bar{K} + \Upsilon_i^-F)x(t-h(t))] + \varepsilon_1^{-1}x^T(t)P^T Px(t) + \varepsilon_1 x^T(t)G^T Gx(t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x(t)) = & \\ & \frac{h_m^2}{4}\dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \frac{h_m}{2}\int_{t-h_m}^t \frac{h_m}{2}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds + \\ & \frac{h_M^2}{4}\dot{x}^T(t)R_2\dot{x}(t) - \frac{h_M}{2}\int_{t-h_M}^t \frac{h_M}{2}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds + \\ & \delta^2\dot{x}^T(t)R_3\dot{x}(t) - \delta\int_{t-h_M}^{t-h_m} \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds. \end{aligned} \quad (26)$$

由引理 2, 得

$$\begin{aligned} & -\frac{h_m}{2}\int_{t-h_m}^t \frac{h_m}{2}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds \leq \\ & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_m}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_m}{2}) \end{bmatrix}, \quad (27) \\ & -\frac{h_M}{2}\int_{t-h_M}^t \frac{h_M}{2}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds \leq \\ & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_M}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_2 & R_2 \\ R_2 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_M}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

由引理 2 和引理 3, 得

$$\begin{aligned} & -\delta\int_{t-h_M}^{t-h_m} \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds = \\ & -\delta\int_{t-h(t)}^{t-h_m} \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds - \\ & \delta\int_{t-h_M}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds \leq \\ & -\max\left\{\frac{3W_1+W_2}{h_M-h_m}, \frac{W_1+3W_2}{h_M-h_m}\right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$W_1 = \left(\int_{t-h(t)}^{t-h_m} \dot{x}(s)ds\right)^T \delta R_3 \left(\int_{t-h(t)}^{t-h_m} \dot{x}(s)ds\right), \quad (30)$$

$$W_2 = \left(\int_{t-h_M}^{t-h(t)} \dot{x}(s)ds\right)^T \delta R_3 \left(\int_{t-h_M}^{t-h(t)} \dot{x}(s)ds\right), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x(t)) = & \\ & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_m}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_m}{2}) \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} x(t-\frac{h_m}{2}) \\ x(t-h_m) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\frac{h_m}{2}) \\ x(t-h_m) \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_M}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_4 & Q_5 \\ * & Q_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{h_M}{2}) \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} x(t-\frac{h_M}{2}) \\ x(t-h_M) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_4 & Q_5 \\ * & Q_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\frac{h_M}{2}) \\ x(t-h_M) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

由式 (24)~(32), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \\ \dot{V}_1(x(t)) + \dot{V}_2(x(t)) + \dot{V}_3(x(t)) \leq & \\ \max_{i \in [1, 2^m]} \zeta^T(t)\Xi_1\zeta(t) \text{ or } \max_{i \in [1, 2^m]} \zeta^T(t)\tilde{\Xi}_1\zeta(t). \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta^T(t) = & \\ & \left[ x^T(t), x^T(t-h(t)), x^T\left(t-\frac{h_m}{2}\right), x^T(t-h_m), \right. \\ & \left. x^T\left(t-\frac{h_M}{2}\right), x^T(t-h_M), f^T(t, x) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_1 = & \\ & \begin{bmatrix} \Xi_{11}^{(1)} & \Xi_{12}^{(1)} & \Xi_{13}^{(1)} & 0 & \Xi_{15}^{(1)} & 0 & \Xi_{17}^{(1)} \\ * & \Xi_{22}^{(1)} & 0 & 3R_3 & 0 & R_3 & \Xi_{27}^{(1)} \\ * & * & \Xi_{33}^{(1)} & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55}^{(1)} & -Q_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66}^{(1)} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Xi_{77}^{(1)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_1 = & \\ & \begin{bmatrix} \Xi_{11}^{(1)} & \Xi_{12}^{(1)} & \Xi_{13}^{(1)} & 0 & \Xi_{15}^{(1)} & 0 & \Xi_{17}^{(1)} \\ * & \Xi_{22}^{(1)} & 0 & R_3 & 0 & 3R_3 & \Xi_{27}^{(1)} \\ * & * & \Xi_{33}^{(1)} & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tilde{\Xi}_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55}^{(1)} & -Q_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & \tilde{\Xi}_{66}^{(1)} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Xi_{77}^{(1)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{11}^{(1)} = & \\ & P\bar{A} + \bar{A}^T P + \varepsilon_1 P^T P + \varepsilon_1^{-1} G^T G + S_1 + \\ & S_2 + S_3 - R_1 - R_2 + Q_1 + Q_4 + \end{aligned}$$

$$\bar{A}^T (h_m^2 R_1/4 + h_M^2 R_2/4 + \delta^2 R_3) \bar{A},$$

$$\begin{aligned} \Xi_{12}^{(1)} = & \\ & P\bar{B}M(\Upsilon_i\bar{K} + \Upsilon_i^{-1}F) + \bar{A}^T (h_m^2 R_1/4 + \\ & h_M^2 R_2/4 + \delta^2 R_3) \bar{B}M(\Upsilon_i\bar{K} + \Upsilon_i^{-1}F), \end{aligned}$$

$$\Xi_{13}^{(1)} = -R_1 + Q_2, \quad \Xi_{15}^{(1)} = R_2 + Q_5,$$

$$\Xi_{17}^{(1)} = \bar{A}^T (h_m^2 R_1/4 + h_M^2 R_2/4 + \delta^2 R_3),$$

$$\begin{aligned} \Xi_{22}^{(1)} = & \\ & -(1-\mu)S_1 - 4R_3 + [\bar{B}M(\Upsilon_i\bar{K} + \\ & \Upsilon_i^{-1}F)]^T (h_m^2 R_1/4 + h_M^2 R_2/4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta^2 R_3 [\bar{B}M(\Upsilon_i \bar{K} + \Upsilon_i^{-1} F)], \\ \Xi_{24}^{(1)} &= 3R_3, \quad \Xi_{26}^{(1)} = R_3, \\ \Xi_{27}^{(1)} &= [\bar{B}M(\Upsilon_i \bar{K} + \Upsilon_i^{-1} F)]^T (h_m^2 R_1 / 4 + \\ & \quad h_M^2 R_2 / 4 + \delta^2 R_3), \\ \Xi_{33}^{(1)} &= -R_1 + Q_3 - Q_1, \quad \Xi_{34}^{(1)} = -Q_2, \\ \Xi_{44}^{(1)} &= -S_2 - Q_3 - 3R_2, \quad \Xi_{55}^{(1)} = -R_2 + Q_6 - Q_4, \\ \Xi_{56}^{(1)} &= -Q_5, \quad \Xi_{66}^{(1)} = -S_3 - Q_6 - R_3, \\ \Xi_{77}^{(1)} &= h_m^2 R_1 / 4 + h_M^2 R_2 / 4 + \delta^2 R_3, \\ \tilde{\Xi}_{44}^{(1)} &= -S_2 - Q_3 - R_2, \quad \tilde{\Xi}_{66}^{(1)} = -S_3 - Q_6 - 3R_3. \end{aligned}$$

如果

$$\Xi_1 < 0 \text{ or } \tilde{\Xi}_1 < 0, \quad (34)$$

则  $\dot{V}(x(t)) < 0$ , 从而可知椭球体  $\varepsilon(P)$  为不变集, 即非脆弱鲁棒控制器 (3) 使得执行器饱和闭环故障系统 (9) 在吸引域  $\varepsilon(P)$  内稳定.

由于式 (34) 为矩阵不等式, 为方便控制器求解, 需对其进行如下变换.

首先对  $\Xi_1 < 0$  进行变换:

应用 Schur 补引理及引理 4, 式  $\Xi_1 < 0$  等价于

$$\Xi_2 < 0. \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_2 &= (\Xi_{ij}^{(2)})_{10 \times 10} < 0, \\ \Xi_{11}^{(2)} &= PA + A^T P + S_1 + S_2 + S_3 - \\ & \quad R_1 - R_2 + Q_1 + Q_4 + \varepsilon_1 P^T P + \\ & \quad \varepsilon_1^{-1} G^T G + \varepsilon_2 P H_1 H_1^T P, \\ \Xi_{12}^{(2)} &= PBM(\Upsilon_i \bar{K} + \Upsilon_i^{-1} F), \\ \Xi_{13}^{(2)} &= -R_1 + Q_2, \quad \Xi_{15}^{(2)} = R_2 + Q_5, \\ \Xi_{17}^{(2)} &= E_1^T, \quad \Xi_{18}^{(2)} = \Xi_{19}^{(2)} = \Xi_{110}^{(2)} = \bar{A}^T, \\ \Xi_{22}^{(2)} &= -(1 - \mu)S_1 - 4R_3, \\ \Xi_{24}^{(2)} &= 3R_3, \quad \Xi_{26}^{(2)} = R_3, \\ \Xi_{27}^{(2)} &= (\Upsilon_i \bar{K} + \Upsilon_i^{-1} F)^T M^T E_2^T, \\ \Xi_{28}^{(2)} &= \Xi_{29}^{(2)} = \Xi_{210}^{(2)} = (\Upsilon_i \bar{K} + \Upsilon_i^{-1} F)^T M^T \bar{B}^T, \\ \Xi_{33}^{(2)} &= -R_1 + Q_3 - Q_1, \\ \Xi_{34}^{(2)} &= -Q_2, \quad \Xi_{56}^{(2)} = -Q_5, \\ \Xi_{44}^{(2)} &= -S_2 - Q_3 - 3R_2, \\ \Xi_{55}^{(2)} &= -R_2 + Q_6 - Q_4, \\ \Xi_{66}^{(2)} &= -S_3 - Q_6 - R_3, \quad \Xi_{77}^{(2)} = -\varepsilon_2 I, \\ \Xi_{78}^{(2)} &= \Xi_{79}^{(2)} = \Xi_{710}^{(2)} = I, \quad \Xi_{1010}^{(2)} = -(\delta^2 R_3)^{-1}, \\ \Xi_{88}^{(2)} &= -\left(\frac{h_m^2}{4} R_1\right)^{-1}, \quad \Xi_{99}^{(2)} = -\left(\frac{h_M^2}{4} R_2\right)^{-1}, \\ \Xi_{23}^{(2)} &= \Xi_{25}^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{35}^{(2)} &= \Xi_{36}^{(2)} = \dots = \Xi_{310}^{(2)} = 0, \\ \Xi_{45}^{(2)} &= \Xi_{46}^{(2)} = \dots = \Xi_{410}^{(2)} = 0, \\ \Xi_{57}^{(2)} &= \Xi_{58}^{(2)} = \dots = \Xi_{510}^{(2)} = 0, \\ \Xi_{67}^{(2)} &= \Xi_{68}^{(2)} = \dots = \Xi_{610}^{(2)} = 0, \\ \Xi_{89}^{(2)} &= \Xi_{810}^{(2)} = \Xi_{910}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

将式 (10)、(11) 代入 (35), 应用引理 4, 得

$$\Xi_3 < 0. \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_3 &= (\Xi_{ij}^{(3)})_{13 \times 13} < 0, \quad \Xi_{11}^{(3)} = \Xi_{11}^{(2)}, \\ \Xi_{12}^{(3)} &= PBM(\Upsilon_i K + \Upsilon_i^{-1} F), \quad \Xi_{13}^{(3)} = \Xi_{13}^{(2)}, \\ \Xi_{15}^{(3)} &= \Xi_{15}^{(2)}, \quad \Xi_{17}^{(3)} = \Xi_{111}^{(3)} = \Xi_{17}^{(2)} = E_1^T, \\ \Xi_{18}^{(3)} &= \Xi_{19}^{(3)} = \Xi_{110}^{(3)} = A^T, \quad \Xi_{113}^{(3)} = PBM \Upsilon_i H_2, \\ \Xi_{22}^{(3)} &= \Xi_{22}^{(2)}, \quad \Xi_{24}^{(3)} = \Xi_{24}^{(2)}, \quad \Xi_{26}^{(3)} = \Xi_{26}^{(2)}, \\ \Xi_{27}^{(3)} &= \Xi_{211}^{(3)} = (\Upsilon_i K + \Upsilon_i^{-1} F)^T M^T E_2^T, \\ \Xi_{28}^{(3)} &= \Xi_{29}^{(3)} = \Xi_{210}^{(3)} = (\Upsilon_i K + \Upsilon_i^{-1} F)^T M^T B^T, \\ \Xi_{212}^{(3)} &= E_3^T, \quad \Xi_{33}^{(3)} = \Xi_{33}^{(2)}, \quad \Xi_{34}^{(3)} = \Xi_{34}^{(2)}, \\ \Xi_{44}^{(3)} &= \Xi_{44}^{(2)}, \quad \Xi_{55}^{(3)} = \Xi_{55}^{(2)}, \quad \Xi_{56}^{(3)} = \Xi_{56}^{(2)}, \\ \Xi_{66}^{(3)} &= \Xi_{66}^{(2)}, \quad \Xi_{77}^{(3)} = \Xi_{77}^{(2)}, \\ \Xi_{78}^{(3)} &= \Xi_{79}^{(3)} = \Xi_{710}^{(3)} = I, \\ \Xi_{713}^{(3)} &= \Xi_{1113}^{(3)} = E_2 M \Upsilon_i H_2, \\ \Xi_{88}^{(3)} &= -\left(\frac{h_m^2}{4} R_1\right)^{-1} + \varepsilon_3 H_1 H_1^T, \\ \Xi_{99}^{(3)} &= -\left(\frac{h_M^2}{4} R_2\right)^{-1} + \varepsilon_3 H_1 H_1^T, \\ \Xi_{1010}^{(3)} &= -(\delta^2 R_3)^{-1} + \varepsilon_3 H_1 H_1^T, \\ \Xi_{813}^{(3)} &= \Xi_{913}^{(3)} = \Xi_{1013}^{(3)} = BM \Upsilon_i H_2, \\ \Xi_{1111}^{(3)} &= -\varepsilon_3 I, \quad \Xi_{1212}^{(3)} = -\varepsilon_4^{-1} I, \quad \Xi_{1313}^{(3)} = -\varepsilon_4 I. \end{aligned}$$

将式 (8) 代入 (36), 展开得

$$\Xi_4 + \Phi_1 L \Phi_2^T + \Phi_2 L^T \Phi_1^T < 0. \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_4 &= (\Xi_{ij}^{(4)})_{13 \times 13}, \\ \Xi_{12}^{(4)} &= PBM_0(\Upsilon_i \bar{K} + \Upsilon_i^{-1} F), \\ \Xi_{113}^{(4)} &= PBM_0 \Upsilon_i H_2, \\ \Xi_{27}^{(4)} &= \Xi_{211}^{(4)} = (\Upsilon_i K + \Upsilon_i^{-1} F)^T M_0^T E_2^T, \\ \Xi_{28}^{(4)} &= \Xi_{29}^{(4)} = \Xi_{210}^{(4)} = (\Upsilon_i K + \Upsilon_i^{-1} F)^T M_0^T \bar{B}^T, \\ \Xi_4 &\text{ 上三角形表达式中其余项同 } \Xi_3, \\ \Phi_1^T &= [(PBM_0)^T, \underbrace{0, \dots, 0}_5, (E_2 M_0)^T, (BM_0)^T, \\ & \quad (BM_0)^T, (BM_0)^T, (E_2 M_0)^T, 0, 0], \\ \Phi_2 &= [0, \underbrace{\Upsilon_i K + \Upsilon_i^{-1} F, 0, \dots, 0}_5, \Upsilon_i H_2]. \end{aligned}$$

由于  $|L| \leq J \leq I$ , 可将  $L$  写成  $L = JH$ , 其中  $H$  为满足  $H^T H \leq I$  的对角矩阵, 式 (37) 转换为

$$\Xi_4 + \Phi_1 JH \Phi_2^T + \Phi_2 H^T J^T \Phi_1^T < 0. \quad (38)$$

应用引理 5, 式 (38) 等价于存在一个对角矩阵  $W_1 > 0$ , 使得

$$\Xi_4 + \Phi_1 J W_1^{-1} (\Phi_1 J)^T + \Phi_2 W_1 \Phi_2^T < 0. \quad (39)$$

当  $R_i^{-1} > 0, i = 1, 2, 3$ , 可得  $(R_i^{-1} - P^{-1})R_i(R_i^{-1} - P^{-1}) \geq 0$ , 从而

$$-R_i^{-1} \leq P^{-1}R_iP^{-1} - 2P^{-1}. \quad (40)$$

将式 (40) 代入 (39), 应用 Schur 补引理, 并对变换后的结果进行合同变换, 即两端同时乘以对角矩阵  $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I, I, I, I, I, I, I\}$ , 并令  $P^{-1} = X, KX = \tilde{K}, FX = \tilde{F}, XS_iX = \tilde{S}_i, XR_iX = \tilde{R}_i, i = 1, 2, 3, XQ_jX = \tilde{Q}_j, j = 1, 2, \dots, 6$ , 则可得到式 (19a), 对  $\tilde{\Xi}_1 < 0$  进行类似变换, 可得到式 (19b), 即满足式 (19a)、(19b) 和  $\varepsilon(P) \subset \ell(F)$ , 状态反馈非脆弱鲁棒控制律 (3) 使得执行器饱和不确定 NCFS (9) 状态轨迹保持在不变集  $\varepsilon(P)$  内, 控制器参数可由  $K = \tilde{K}X^{-1}$  求得.  $\square$

**注 3** 定理 1 中包含了系统的各种时延信息, 所得结果是时滞/时滞变化率依赖的. 同时, 在定理推证中, 对  $-\delta \int_{t-h_M}^{t-h_m} \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds$  的处理未将  $\tau(t) - \tau_m$  和  $\tau_M - \tau(t)$  两项直接扩大为  $\tau_M - \tau_m$  [26], 而是应用了引理 3, 这均减少了结论的保守性. 另外, 定理的推证中未引入 Lyapunov-Krasovskii 泛函之外的其他自由权矩阵, 减少了决策变量的个数, 简化了计算.

**注 4** 定理 1 给出了  $h(t)$  可微时执行器饱和不确定 NCFS (9) 具有鲁棒完整性的充分条件. 然而, 在实际应用中, 受网络带宽限制和随机信息流量的影响, 考虑传输时延的时变性和丢包的随机性, 综合区间时延的变化率往往难以确定, 甚至不可微. 在此情况下, 选择  $S_1 = 0$ , 可得到使系统 (9) 具有鲁棒容错性能的一类时滞依赖/时滞变化率不依赖的充分条件.

### 2.2 吸引域的估计

在执行器饱和系统的控制中, 吸引域是一个密切相关的概念, 系统总是期望有尽可能大的吸引域, 因此如何扩大系统的吸引域, 得到保守性更小的结论显得至关重要.

本节给出从所有满足定理 1 的集合 (系统的稳定区域) 中选取最大的集合作为系统吸引域的估计, 此时的吸引域对容错控制器的设计应具有较少保守性.

集合的大小可采用参考集测量, 这里用一个包含原点的凸集  $X_R \subset R^n$  作为测量集合大小的参考集. 对于一个包含原点的集合  $\chi \subset R^n$ , 定义

$$\alpha_R(\chi) := \sup\{\alpha > 0 : \alpha X_R \subset \chi\}, \quad (41)$$

如果  $\alpha_R(\chi) \geq 1$ , 则  $X_R \subset \chi$ . 两种比较常用的参考集  $X_R$  如下 [21]:

椭圆

$$X_R = \{x \in R^n, x^T T x \leq 1, T > 0\}; \quad (42)$$

具有  $l$  个顶点的多面体

$$X_R = \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_l\}, \quad (43)$$

其中  $x_1, x_2, \dots, x_l$  是  $R^n$  中给定的向量.

利用上面定义的参考集, 从所有满足定理 1 的集合  $\varepsilon(P)$  中选出最大的一个  $\alpha_R(\varepsilon(P))$  作为系统少保守性的最大吸引域估计. 此问题可描述为如下具有约束的优化问题:

$$\max_{P>0, F} \alpha. \quad (44a)$$

$$\text{s.t. } \alpha X_R \subset \varepsilon(P); \quad (44b)$$

$$\text{式 (19a) 或 (19b), } \forall i \in [1, 2^m]; \quad (44c)$$

$$\varepsilon(P) \subset \ell(F). \quad (44d)$$

为方便求解, 转换上述约束条件为 LMI 形式, 如果  $X_R$  是一个多面体, 则约束条件 (44b) 等价于

$$\alpha^2 x_k^T P x_k \leq 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/\alpha^2 & x_k^T \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, k \in [1, l]. \quad (45)$$

如果  $X_R$  是一个椭圆, 则约束条件 (44b) 等价于

$$\frac{R}{\alpha^2} \geq P \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R/\alpha^2 & I \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0; \quad (46)$$

约束条件 (44d) 等价于

$$\begin{aligned} &|f_j x| \leq 1, \forall x \in \varepsilon(P), \\ &j \in [1, m] \Leftrightarrow f_j P^{-1} f_j^T \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\begin{bmatrix} 1 & f_j P^{-1} \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, j \in [1, m]. \end{aligned} \quad (47)$$

令  $\beta = 1/\alpha^2, X = P^{-1}, \tilde{F} = F P^{-1}$ , 则  $\tilde{f}_j$  为  $\tilde{F}$  的第  $j$  行.

如果  $X_R$  是一个多面体, 则式 (44a) 中的优化问题等价于

$$\min_{X, F} \beta. \quad (48a)$$

$$\text{s.t. } \begin{bmatrix} \beta & x_k^T \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, k \in [1, l]; \quad (48b)$$

$$\text{式 (19a) 或 (19b), } \forall i \in [1, 2^m]; \quad (48c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{f}_j \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, j \in [1, m]. \quad (48d)$$

如果  $X_R$  是一个椭圆, 则式 (44a) 中的优化问题等价于

$$\min_{X, F} \beta. \quad (49a)$$

$$\text{s.t. } \begin{bmatrix} \beta R & I \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, k \in [1, l]; \quad (49b)$$

式 (19a) 或 (19b),  $\forall i \in [1, 2^m]$ ; (49c)

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{f}_j \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, j \in [1, m]. \quad (49d)$$

### 3 仿真研究

考虑闭环系统 (9), 采用文献 [7] 中的模型数据, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\|A\| = 0.01, \|B\| = 0.01,$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$F_1(t) = F_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} 0.03 \sin x_1(t) \\ 0.01 \sin x_2(t) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

#### 3.1 结论有效性验证

假设采样周期为  $T = 0.1 \text{ s}$ , 从传感器到控制器和从控制器到执行器的最大丢包数目为 2, 若取时延  $\tau_k = 0.05 + 0.35|\sin t|$ , 则相应区间时变时延

$$h(t) = T \cdot \text{Random}(0 \sim 2) + 0.05 + 0.35|\sin t|,$$

$$h_M = 0.6, h_m = 0.05, \delta = 0.55, \mu = 0.35.$$

系统初始状态为  $x(0) = [1 \quad -1]^T$ , 执行器失效故障按如下 3 种情形进行讨论:  $M = M_u = M_l =$  下界; 一般情形  $M \in (M_l, M_u)$ ;  $M = M_u = M_l =$  正常. 参数如表 1 所示.

表 1 执行器参数

	$M_l$	$M_u$
下界	[0.1 0; 0 0.1]	[0.1 0; 0 0.1]
一般情形	[0.1 0; 0 0.1]	[0.8 0; 0 0.9]
正常情形	[1 0; 0 1]	[1 0; 0 1]

采用  $X_R = \left\{ \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \right\}, \theta \in [0, 2\pi]$  形式的凸多面体作为参考集, 其中  $\theta = 0.4\pi$ . 通过式 (48a) 对上述执行器情形分别进行优化, 所得参数如表 2 所示.

表 2 执行器各种情形下 NCS 控制器参数

	$\alpha^*$	$P^*$	$K^*$
下界	0.016 3	$\begin{bmatrix} 0.489 4 & -0.025 1 \\ -0.025 1 & 0.416 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.008 3 & -0.030 4 \\ -0.035 3 & 0.001 8 \end{bmatrix}$
一般情形	0.017 0	$\begin{bmatrix} 0.340 1 & -0.039 1 \\ -0.039 2 & 0.273 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.034 4 & -0.124 7 \\ -0.162 9 & 0.018 8 \end{bmatrix}$
正常情形	0.017 1	$\begin{bmatrix} 0.299 7 & -0.033 8 \\ -0.033 8 & 0.240 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.052 2 & -0.142 4 \\ -0.187 9 & 0.021 2 \end{bmatrix}$

分别画出闭环故障 NCS (9) 在执行器 3 种情形下的最大吸引域, 即最大收缩不变椭球  $\varepsilon(P^*, 1)$ , 如图 1 所示.

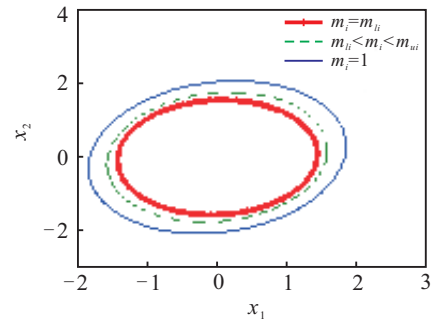


图 1 闭环故障 NCS 最大容错吸引域的估计

从图 1 的仿真曲线可以看出, 闭环系统在执行器发生结构性失效故障情况下, 故障最严重时所得吸引域最小, 但仍能保证执行器故障下闭环系统具有鲁棒完整性.

闭环故障系统状态分量  $x_1, x_2$  的响应曲线分别如图 2 和图 3 所示, 相应执行器饱和和信号曲线分别如图 4 和图 5 所示.

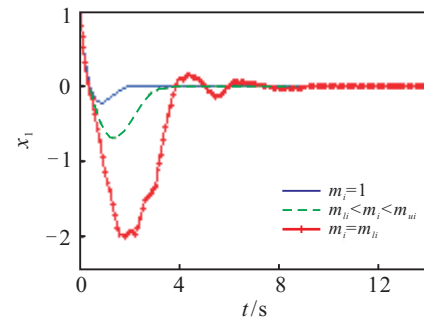


图 2 闭环系统状态  $x_1$  的响应曲线

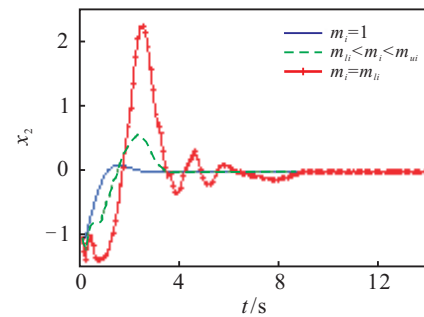


图 3 闭环系统状态  $x_2$  的响应曲线

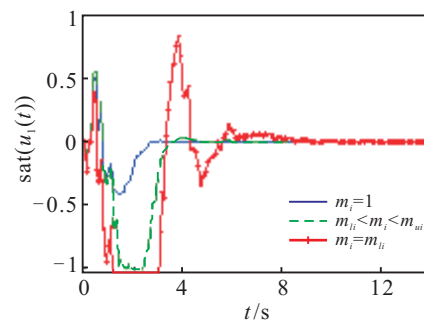


图 4 闭环系统饱和和执行器  $\text{sat}(u_1)$  输出曲线

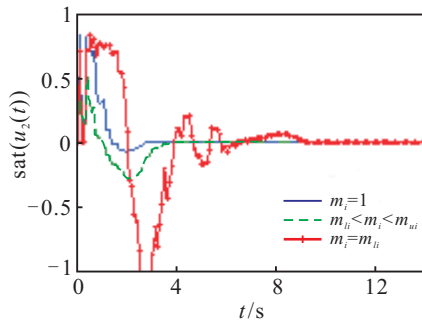


图 5 闭环系统饱和和执行器  $\text{sat}(u_2)$  输出曲线

从图 4 和图 5 的仿真曲线可以看出, 执行器的饱和现象出现在控制初始阶段, 即  $\text{sat}(u_1(t))$  在  $0.8 \sim 3.5$  s,  $\text{sat}(u_2(t))$  在  $2 \sim 3$  s。从图 2 和图 3 的仿真曲线可以看出, 即使在此情形下, 控制器参数同时发生摄动, 不确定 NCS 在执行器发生结构性失效故障时仍是稳定的, 说明采用文中所述方法设计的非脆弱鲁棒容错控制器, 对于具有执行器饱和、控制器参数摄动及非线性扰动约束的不确定 NCS, 在执行器发生结构性失效故障时仍能使系统具有鲁棒完整性。

### 3.2 结论保守性分析

当不考虑执行器饱和、控制器参数摄动及非线性扰动时, 本文针对系统 (9) 的研究退化为不确定 NCS 的鲁棒完整性问题。取  $\mu = 0.3$ , 与已有少保守性结论<sup>[9]</sup>比较, 其最大允许时延如表 3 所示。

表 3 最大允许时延上界  $h_M^{\max}$

方法	$h_m = 0.1$
文献 [9]	1.015 4
定理 1	1.283 9

从表 3 结果可以看出, 使闭环故障系统具有鲁棒完整性时, 本文方法得到的最大允许时延上界大于文献 [9], 说明本文结论具有更少的保守性, 这对多约束下增加控制器可行解的空间和提高容错满意度是很有价值的。

## 4 结 论

本文以 NCS 为被控对象, 考虑系统网络诱导时延和数据丢包、模型参数不确定性、非线性扰动、执行器饱和以及控制器参数摄动等多种约束, 研究了执行器发生结构性失效故障时系统的鲁棒容错控制问题。文中采用非脆弱鲁棒状态反馈控制律, 基于时滞依赖的 Lyapunov 方法, 结合输入饱和函数的凸组合表示, 推证出了闭环不确定 NCS 在执行器发生结构性失效故障时稳定的不变集条件; 充分应用各种时延信息, 在尽可能少放大的基础上保留了有用项, 未引入 Lyapunov-Krasovskii 泛函之外的其他自由权矩阵, 减少了决策变量的个数, 给出了可行性高、保守性少的非脆弱鲁棒容错控制器; 结合给出的容错吸引域定

义, 采用椭圆逼近法, 通过优化处理得到了最大容错吸引域的估计。最后以一个仿真算例验证了文中所述方法的可行性和有效性。

### 参考文献(References)

- [1] Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y. A survey of recent results in networked control systems[J]. Proc IEEE, 2007, 95(1): 138-162.
- [2] Gao Huijun, Chen Tongwen, James Lam. A new delay system approach to network-based control[J]. Automatica, 2008, 44(1): 39-52.
- [3] Patton R J, Kambhampati C, Casavola A, et al. Fault-tolerance as a key requirement for the control of modern systems[J]. The Int Federation of Automatic Control, 2006, 6(1): 26-36.
- [4] 郑英, 方华京. 不确定网络化控制系统的鲁棒容错控制[J]. 西安交通大学学报, 2004, 38(8): 804-807. (Zheng Y, Fang H J. Robust fault tolerant control of networked control system with time-varying delays[J]. J of Xi'an Jiaotong University, 2004, 38(8): 804-807.)
- [5] Huo Zhihong, Fang Huajing. Research on robust fault-tolerant control for networked control system with packet dropout[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2007, 18(1): 76-82.
- [6] 黄鹤, 韩笑冬, 谢德晓, 等. 网络控制系统的鲁棒  $H_\infty$  容错控制器设计[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2008, 38(增 2): 185-189. (Huang H, Han X D, Xie D X, et al. Robust  $H_\infty$  fault-tolerant controller design for networked control system[J]. J of Southeast University: Natural Science Edition, 2008, 38(S2): 185-189.)
- [7] 朱灵波, 戴冠中, 康军, 等. 具有传感器故障的网络化控制系统保性能可靠控制[J]. 控制与决策, 2008, 24(7): 1050-1058. (Zhu L B, Dai G Z, Kang J, et al. Guaranteed cost fault-tolerant control of networked control systems with sensor failure[J]. Control and Decision, 2008, 24(7): 1050-1058.)
- [8] 李炜, 曹慧超. 区间快变时延 NCS 鲁棒  $H_\infty$  保性能容错控制[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2011, 39(3): 105-110. (Li W, Cao H C. Robust  $H_\infty$ -guaranteed fault-tolerant control for networked control system with fast interval time-varying delay[J]. J of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2011, 39(3): 105-110.)
- [9] 李炜, 王艳飞. 一种少保守性的 NCS 鲁棒  $H_\infty$  保性能容错控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(12): 1768-1776. (Li W, Wang Y F. A less-conservative robust  $H_\infty$  guaranteed cost fault-tolerant control of networked control

- system[J]. Control and Decision, 2011, 26(12): 1768-1776.)
- [10] 李炜, 曹慧超, 赵正天. 不确定 NCS 动态输出反馈鲁棒  $H_\infty$  完整性设计[J]. 南京理工大学学报, 2011, 35(增I): 40-45.  
(Li W, Cao H C, Zhao Z T. Dynamic output feedback robust  $H_\infty$  integrality design for uncertain NCS[J]. J of Nanjing University of Science and Technology, 2011, 35(SI): 40-45.)
- [11] 曹慧超. 具有时延和丢包的线性 NCS 时滞依赖鲁棒容错控制研究[D]. 兰州: 兰州理工大学电气工程与信息工程学院, 2011: 51-95.  
(Cao H C. Robust fault-tolerant control for linear networked control system based on delay-dependent method with time delay and packet dropout[D]. Lanzhou: College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, 2011: 51-95.)
- [12] Liu Z. Global control of linear systems with saturating actuators[J]. Automatica, 1998, 34(7): 897-905.
- [13] Zhang Yong, Tang Gong-You, Hu Nai-Ping. Non-fragile control for nonlinear networked control systems with long time-delay[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(10): 1630-1637.
- [14] Zhou Rujuan, Zhang Xiaomei, Shi Guiyin, et al. Output feedback stabilization of networked systems subject to actuator saturation and packet dropout[C]. Lecture Notes in Electrical Engineering. Heidelberg: Springer Verlag, 2012, 136: 149-154.
- [15] 李金娜, 张庆灵, 韩世迁. 具有饱和和非线性约束的网络控制系统鲁棒  $H_\infty$  优化控制[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2008, 29(5): 617-620.  
(Li J N, Zhang Q L, Han S Q. Optimal robust  $H_\infty$  control for networked control systems with saturated nonlinear restriction[J]. J of Northeastern University: Natural Science Edition, 2008, 29(5): 617-620.)
- [16] Zhu Junwei, Li Yanping, Che Weiwei. Non-fragile  $H_\infty$  control for networked control systems with quantization and time-delays[C]. Proc of the 2011 Chinese Control and Decision Conf. Mianyang, 2011: 4276-4280.
- [17] 于水情, 李俊明. 变采样周期网络控制系统的非脆弱保性能控制[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(4): 856-861.  
(Yu S Q, Li J M. Non-fragile guaranteed cost control for networked control systems under variable-period sampling[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33 (4): 856-861.)
- [18] Zhang Hongkai, Fang Qiansheng, Wang Xiaolong, et al. Non-fragile guaranteed-cost robust  $H_\infty$  control for a class of nonlinear networked control systems with long time-delay[C]. Proc of Int Conf on Intelligent Computation Technology and Automation(ICICTA). Piscataway: IEEE Computer Society, 2010: 784-787.
- [19] 孙文安, 孙风杰, 裴炳南, 等. 一类不确定时延网络控制系统的非脆弱  $H_\infty$  保成本控制[J]. 电机与控制学报, 2010, 14(2): 54-59.  
(Sun W A, Sun F J, Pei B N, et al. Non-fragile  $H_\infty$  guaranteed cost control for a class of networked control systems with uncertain time delay[J]. Electric Machines and Control, 2010, 14(2): 54-59.)
- [20] 张冬梅, 俞立, 周明华. 具有快变时延和丢包的网络化控制系统镇定[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 480-484.  
(Zhang D M, Yu L, Zhou M H. Stabilization of networked control systems with fast-varying delay and packet-dropout[J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(3): 480-484.)
- [21] Hu T S, Lin Z L, Chen B M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation[J]. Systems & Control Letters, 2002, 45(2): 97-112.
- [22] Han Qinglong. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12): 2171-2176.
- [23] Yu Jianjiang. Novel delay-dependent stability criteria for stochastic systems with time-varying interval delay[J]. Int J of Control, Automatica, and Systems, 2012, 10(1): 197-202.
- [24] Wang Y X, Xie L, de Souza E. Robust control of uncertain nonlinear systems[J]. Systems and Control Letters, 1992, 19(2): 139-149.
- [25] Lee Y S, Moon Y S, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for uncertain systems with a state-delay[J]. Automatica, 2004, 40(1): 65-72.
- [26] Jiang Xiefu, Han Qinglong. New stability criteria for linear systems with interval time-varying delay[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2680-2685.