

飞轮安装偏差的过驱动航天器有限时间姿态控制

张爱华^{1,2}, 胡庆雷¹, 霍星^{1,2}

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001; 2. 渤海大学 工学院, 辽宁 锦州 121001)

摘要: 针对反作用飞轮安装存在偏差的过驱动航天器姿态跟踪问题, 提出一种有限时间姿态补偿控制策略. 通过设计自适应滑模控制器保证实现对不确定性转动惯量与外部干扰的鲁棒控制, 同时实现对飞轮安装偏差的补偿控制, 并应用Lyapunov稳定性理论证明了该控制器能够在有限时间内实现姿态跟踪控制. 最后, 将该控制器应用于某型航天器的姿态跟踪控制, 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

关键词: 航天器; 安装偏差; 姿态控制; 有限时间; 自适应滑模控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite time attitude control for over-actuated spacecraft with reaction wheel misalignment

ZHANG Ai-hua^{1,2}, HU Qing-lei¹, HUO Xing^{1,2}

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. College of Engineering, Bohai University, Jinzhou 121001, China. Correspondent: HU Qing-lei, E-mail: huqinglei@hit.edu.cn)

Abstract: A finite-time control scheme is presented to address the attitude tracking problem of over-actuated spacecraft, in which reaction wheel misalignment, external disturbance and uncertain mass of moment inertia are considered. A finite time controller using adaptive sliding mode control technique is developed. It can guarantee finite-time reachability of the given attitude motion even in the presence of external disturbances, and uncertainties in the configuration matrix due to reaction wheel misalignment and mass of moment inertia. Numerical simulation results of an application to spacecraft show the effectiveness of the proposed attitude tracking control law.

Key words: spacecraft; misalignment; attitude control; finite time; adaptive sliding mode control

0 引言

目前, 航天器姿态控制器大都基于精确的飞行器安装信息设计完成^[1]. 然而在实际航天工程中, 受安装技术的限制, 航天器执行机构在不同程度上存在安装偏差, 从而使得姿控系统精确度下降, 严重时将导致整个航天任务失败. 虽然工程上常采用地面校准的方法以减少执行器的安装偏差, 但在航天器发射过程中, 由运载器的剧烈振动而引起的材料变形也极有可能引起执行器的安装偏差. 因此, 这种地面校准策略并不能完全消除执行器安装偏差存在的可能性. 同时, 航天器在轨时不可避免地会受到各种外部干扰力矩的作用, 而且有效载荷的运动以及燃料消耗等会引起惯量参数的不确定性. 因此, 针对存在外部干扰和

不确定转动惯量的航天器姿态稳定问题, 考虑航天器反作用飞轮存在安装偏差等姿态控制系统设计方法等问题正受到人们特别的关注.

近年来, 许多学者就提高航天器姿态控制精度、考虑航天器执行机构安装偏差、保证系统对干扰以及不确定转动惯量的鲁棒性做了大量的研究^[2-6]. 文献[2]针对哈密尔顿多输入多输出系统设计了自适应控制器, 并将该控制器成功地应用于航天器姿态控制器, 实现了在不确定转动惯量下的姿态稳定控制; 文献[3]利用优化控制理论设计了航天器姿态控制算法; 文献[4]提出了基于 H_∞ 的航天器姿态鲁棒控制策略; 文献[5]采用非连续控制方法实现了闭环制导系统的有限时间收敛特性; 文献[6]采用反步控制律实

收稿日期: 2012-09-01; 修回日期: 2013-01-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61304149, 61273175); 教育部新世纪优秀人才计划项目(NCET-11-0801); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(HIT.BRETHIII.201212); 黑龙江省青年科学基金项目(QC2012C024).

作者简介: 张爱华(1977—), 女, 副教授, 博士生, 从事航天器姿态容错控制的研究; 胡庆雷(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 从事容错控制、故障诊断等研究.

现了外部干扰下的航天器姿态精确控制. 然而上述文献中只考虑了外部干扰及不确定转动惯量等问题, 并未考虑执行器安装偏差存在的普遍性. 文献[7]针对执行器安装小角度偏差设计了自适应追踪姿态控制器. 文献[8]采用自适应追踪控制方法, 补偿了约 15° 以内的执行器安装偏差. 文献[9]提出一种新的算法来精确估计安装角度的控制力矩陀螺, 并根据估计信息设计控制器. 但上述方法存在角度偏差受限的约束. 此外, 文献[10]对卫星编队飞行推力器安装偏差下的自适应控制进行了探讨, 但推力器所产生的力与反作用飞轮产生的力是不同的, 前者为常值量, 后者为时变量. 因此, 文献[10]提出的设计方法并不适用于航天器执行机构安装偏差情况. 特别是, 执行器的安装偏差有可能导致转动惯量的不确定性.

在工程实践中, 为了保障在轨航天器运行的可靠性, 特别是面临高空严厉的外部环境, 现代实用的设计方法常采用冗余的执行机构来保证正常控制系统的可靠运行. 而上述文献均未考虑冗余执行机构情况下的安装偏差. 因此, 本文针对存在外部干扰、不确定转动惯量以及飞轮存在安装偏差的航天器姿态跟踪问题, 提出一种自适应滑模有限时间姿态控制算法, 并基于Lyapunov稳定性理论证明了该控制器能够在有限时间内实现对姿态的全局渐近跟踪控制. 最后, 考虑多种工况下将该控制器应用于某型航天器的姿态稳定控制, 仿真结果表明了该方法的可行性和有效性.

1 数学模型

1.1 航天器姿态动力学

本文采用姿态四元数法描述航天器姿态, 此时航天器姿态动力学方程可表示为^[11]

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}^\times + \boldsymbol{q}_0 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_0 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^\times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}. \quad (3)$$

其中: $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^3$ 为航天器相对于惯性系的角速度在本体系中的投影; $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_0 \ \boldsymbol{q}^\top]^\top \in \mathbf{R}^4$ 表示航天器本体坐标系和惯性坐标系间的姿态四元数, 且满足 $\boldsymbol{q}_0^2 + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{q} = 1$. 此外 \boldsymbol{I}_3 为 3 阶单位矩阵, 且对于 $\forall \boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]^\top$ 定义 \boldsymbol{a}^\times 为

$$\boldsymbol{a}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式(3)中: $\boldsymbol{J} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为航天器转动惯量矩阵, $\boldsymbol{d}(t) \in \mathbf{R}^3$ 为航天器受到的外部干扰力矩, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3$ 为作用于航天器本体轴的控制力矩. 由于有效载荷的转动

或飞轮安装偏差的存在, 转动惯量 \boldsymbol{J} 是不确定的, 记为 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 + \Delta\boldsymbol{J}$, \boldsymbol{J}_0 表示标称的转动惯量, $\Delta\boldsymbol{J}$ 表示不确定的转动惯量. 此时, 针对航天器动力学模型(3), 在全局范围内作如下假设:

假设 1 转动惯量矩阵 \boldsymbol{J} 是正定对称的, 且存在正常数 \boldsymbol{J}_{\max} 使得

$$0 < \|\Delta\boldsymbol{J}\| \leq \|\boldsymbol{J}\| \leq \boldsymbol{J}_{\max} < \infty. \quad (5)$$

假设 2 干扰力矩是有界的, 即存在未知的正常数 \boldsymbol{d}_{\max} 满足

$$\|\boldsymbol{d}\| \leq \boldsymbol{d}_{\max}. \quad (6)$$

注 1 $\|\cdot\|$ 表示向量的 2 范数及其诱导范数, $\|\cdot\|_\infty$ 表示矩阵或者向量的无穷范数.

本文中考虑安装 N ($N > 3$) 个反作用飞轮进行姿态控制, 则作用于航天器本体的控制力矩为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\tau}. \quad (7)$$

其中: $\boldsymbol{D} \in \mathbf{R}^{3 \times N}$ 为控制分配矩阵, $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_N]^\top \in \mathbf{R}^N$ 为反作用飞轮输出力矩. 考虑航天器反作用飞轮存在安装偏差, 且设安装偏差矩阵为 $\Delta\boldsymbol{D}$, 则式(3)可改写为

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}^\times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}. \quad (8)$$

1.2 航天器姿态跟踪数学模型

设航天器期望坐标系 \mathcal{T} 相对于惯性系 \mathcal{I} 期望角速度为 $\boldsymbol{\omega}_d \in \mathbf{R}^3$, 期望姿态为 $\boldsymbol{Q}_d = [\boldsymbol{q}_{d0} \ \boldsymbol{q}_d^\top]^\top \in \mathbf{R}^4$. 进而可知

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}_d^\times + \boldsymbol{q}_{d0} \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{\omega}_d, \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{d0} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_d^\top \boldsymbol{\omega}_d. \quad (10)$$

定义误差四元数 $\boldsymbol{Q}_e = \boldsymbol{Q}_d^{-1} \otimes \boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_0 \ \boldsymbol{e}^\top]^\top \in \mathbf{R}^4$ 为航天器实际姿态 \boldsymbol{Q} 与期望姿态 \boldsymbol{Q}_d 之间的姿态跟踪误差, 其中“ \otimes ”代表四元数乘法. 定义角速度误差为 $\boldsymbol{\omega}_e \in \mathbf{R}^3$, 其表示为本体系 \mathcal{B} 相对于期望坐标系 \mathcal{T} 的角速度, 则有

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d, \quad (11)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{R}} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 表示期望系 \mathcal{T} 到本体系 \mathcal{B} 的旋转矩阵, 且满足 $\tilde{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{e}_0^2 - \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{e})\boldsymbol{I}_3 + 2\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\top - 2\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}^\times$.

基于上述分析, 由式(8)~(11)可得出航天器姿态跟踪数学模型为

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_e + (\boldsymbol{\omega}_e + \tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d)^\times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\omega}_e + \tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d) - \\ & \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\omega}_e^\times \tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}_d - \tilde{\boldsymbol{R}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d) = (\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}, \end{aligned} \quad (12)$$

且误差四元数将满足

$$\dot{\boldsymbol{e}}_0 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{\omega}_e, \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}^\times + \boldsymbol{e}_0 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{\omega}_e. \quad (14)$$

至此, 本文的控制目标可描述为: 针对采用安装反作

用飞轮数为 N 个的刚体航天器, 在安装偏差 ΔD 以及干扰力矩 d 作用下, 设计控制律 $\tau(t)$ 在有限时间内实现对期望姿态的全局渐近跟踪控制.

2 有限时间姿态控制器设计

引理 1 若 $p \in (0, 1)$, 则针对任意的向量 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 有如下不等式成立^[12]:

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^{1+p} \geq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{(1+p)/2}. \quad (15)$$

引理 2 若某一连续正定的函数 $V(\mathbf{x})$ 满足

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + \lambda_1 V(\mathbf{x}) + \lambda_2 V^\beta(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (16)$$

其中: $\lambda_1 \in \mathbf{R}^+$, $\lambda_2 \in \mathbf{R}^+$, $\beta \in \mathbf{R}^+$, 且 β 满足 $0 < \beta < 1$. 则对于任意的初始值 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, 在有限时间 t_{F1} 有 $V(\mathbf{x}) \equiv 0$ 成立^[13], 其中

$$t_{F1} \leq 1/\lambda_1(1-\alpha) \ln((\lambda_1 V^{1-\alpha}(\mathbf{x}_0) + \lambda_2)/\lambda_2). \quad (17)$$

本文设计如下滑模面^[14]:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}_e + \mu_1 \mathbf{e} + \mu_2 \text{sgn}(\mathbf{e})^r. \quad (18)$$

其中: $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ s_3]^T \in \mathbf{R}^3$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $0 < r < 1$, 且 $\text{sgn}(\mathbf{e})^r$ 定义为

$$\text{sgn}(\mathbf{e})^r = [|e_1|^r \text{sgn}(e_1) \ |e_2|^r \text{sgn}(e_2) \ |e_3|^r \text{sgn}(e_3)]^T.$$

此时, 有如下定理成立:

定理 1 若设计控制器 $\tau(t)$ 使得航天器姿态控制系统状态在滑模面 (18) 上滑动, 则存在有限时间 t_{F1} , 使得对于 $\forall t \geq t_{F1}$ 有 $\mathbf{e}(t) \equiv 0$, $e_0(t) \equiv 1$ 以及 $\boldsymbol{\omega}_e(t) \equiv 0$ 成立.

证明 当姿态控制系统状态到达滑模面 \mathbf{s} 时, 有

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}_e + \mu_1 \mathbf{e} + \mu_2 \text{sgn}(\mathbf{e})^r = 0. \quad (19)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V_1 = (1 - e_0)^2 + \mathbf{e}^T \mathbf{e}. \quad (20)$$

由于不等式

$$\sum_{i=0}^3 |e_i|^{r+1} \geq \left(\sum_{i=0}^3 |e_i|^2 \right)^{(r+1)/2}$$

对于 $0 < r < 1$ 恒成立, 根据式 (18), V_1 两边同时对时间求导数, 并由引理 1 可知

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -2\dot{e}_0 = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}_e = -\mu_1 \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mu_2 \sum_{i=1}^3 |e_i|^{r+1} \leq \\ & -\mu_1 \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mu_2 (\mathbf{e}^T \mathbf{e})^{(r+1)/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $\mathbf{Q}_e = [-1 \ 0]^T$ 为不稳定姿态平衡点^[15], 由式 (21) 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\mathbf{e} \rightarrow 0$, $e_0 \rightarrow 1$ 成立. 从而有

$$(1 - e_0)^2 \leq (1 - e_0)(1 + e_0) = \mathbf{e}^T \mathbf{e}, \quad (22)$$

由此可得

$$V_1 \leq 2\mathbf{e}^T \mathbf{e}. \quad (23)$$

至此, 由式 (21) 可得

$$\dot{V}_1 \leq -\mu_1 V_1/2 - (1/2)^{(r+1)/2} \mu_2 V_1^{(r+1)/2}. \quad (24)$$

显然 $1/2 < \frac{r+1}{2} < 1$, 故由引理 2 可证明在有限时间 t_{F1} , 有 $V_1(t) \equiv 0$. 根据 $V_1(t)$ 的表达式, 可进一步证明对于任意的时间 $t \geq t_{F1}$, 有 $\mathbf{e}(t) \equiv 0$, $e_0(t) \equiv 1$ 以及 $\boldsymbol{\omega}_e(t) \equiv 0$ 成立. \square

考虑反作用飞轮安装偏差与外部干扰力矩, 根据所选取的滑模面 (18), 同时由假设 1 可知 $\dot{\mathbf{J}} = 0$ 成立, 可得

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \Delta\mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{L} - \beta\mathbf{q}_e. \quad (25)$$

其中: $\|\mathbf{L}\| \leq \alpha_0 + \alpha_1 \|\boldsymbol{\omega}\| + \alpha_2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 为正常数^[16]. 为便于后面分析证明, 定义 $\kappa = \lambda_{\min}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)$, $3\|\Delta\mathbf{D}\|_\infty \|\mathbf{D}^\dagger\|_\infty = \varepsilon$, 其中 \mathbf{D}^\dagger 为矩阵 \mathbf{D} 的伪逆. 至此, 可得出如下定理:

定理 2 针对刚体航天器姿态系统 (1)~(3), 考虑反作用飞轮安装偏差 $\Delta\mathbf{D}$ 以及外部干扰力矩 d . 若安装偏差满足不等式 $\varepsilon < 1$, 则设计姿态补偿控制器

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{nom}}(t) + \boldsymbol{\tau}_{\text{adp}}(t) + \boldsymbol{\tau}_{\text{mis}}(t). \quad (26)$$

其中

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{nom}}(t) = -k_1 \beta \mathbf{D}^T \|\mathbf{q}_e\| \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\| - K \mathbf{D}^T \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\|^2, \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{adp}}(t) = \mathbf{D}^T (-\hat{k}_3 - \hat{k}_4 \|\boldsymbol{\omega}\| - \hat{k}_5 \|\boldsymbol{\omega}\|^2) \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\|, \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{mis}}(t) = -(\hat{\pi}_1 - 1) \varphi(t) \mathbf{D}^\dagger \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\|_\infty. \quad (29)$$

这里: $K \in \mathbf{R}^+$ 为控制参数, 控制参数 k_1 满足 $k_1 \kappa - 1 > 0$; $\hat{\pi}_1$ 为 $\pi_1 = 1/1 - \delta$ 的估计量, \hat{k}_3 为 $k_3 = \alpha_0/\kappa$ 的估计量, \hat{k}_4 为 $k_4 = \alpha_1/\kappa$ 的估计量, \hat{k}_5 为 $k_5 = \alpha_2/\kappa$ 的估计量. 采用自适应更新律 $\dot{\hat{\pi}}_1 = l_1 \varphi(t) \|\mathbf{s}\|_\infty$, $\dot{\hat{k}}_3 = \kappa \|\mathbf{s}\|/l_3$, $\dot{\hat{k}}_4 = \kappa \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}\|/l_4$, $\dot{\hat{k}}_5 = \kappa \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}\|^2/l_5$. 则对于任意的初始状态 $\mathbf{Q}(0)$, $\boldsymbol{\omega}(0)$, 姿态控制系统状态将在有限时间 t_{F2} 内到达滑模面 $\mathbf{s}(t) = 0$ 上, 并一直保持在该滑模面上运动.

证明 当 $\mathbf{s} \neq 0$ 时, 选取如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{s} + \frac{(1-\varepsilon)}{2l_1} \tilde{\pi}_1^2 + \\ & \frac{1}{2} l_3 \tilde{k}_3^2 + \frac{1}{2} l_4 \tilde{k}_4^2 + \frac{1}{2} l_5 \tilde{k}_5^2. \end{aligned} \quad (30)$$

其中: l_1, l_3, l_4, l_5 为已知正常数, 且有 $\tilde{\pi}_1 = \pi_1 - \hat{\pi}_1$, $\tilde{k}_3 = k_3 - \hat{k}_3$, $\tilde{k}_4 = k_4 - \hat{k}_4$, $\tilde{k}_5 = k_5 - \hat{k}_5$. 式 (30) 两边同时对时间求导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq \mathbf{s}(\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}_{\text{norm}} - \beta\mathbf{q}_e) + \mathbf{s}(\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}_{\text{adp}} + \mathbf{L}) + \\ & \mathbf{s}(\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}_{\text{mis}} + \Delta\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}) - (1-\varepsilon)\tilde{\pi}_1 \dot{\hat{\pi}}_1 / l_1 - \\ & l_3 \tilde{k}_3 \dot{\hat{k}}_3 - l_4 \tilde{k}_4 \dot{\hat{k}}_4 - l_5 \tilde{k}_5 \dot{\hat{k}}_5. \end{aligned} \quad (31)$$

根据式 (27), 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}(\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}_{\text{norm}} - \beta\mathbf{q}_e) \leq \\ & \mathbf{s} \mathbf{D} \boldsymbol{\tau}_{\text{norm}} + \beta \|\mathbf{q}_e\| \|\mathbf{s}\| \leq -\kappa K. \end{aligned} \quad (32)$$

同理, 根据式 (28), 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}_{\text{adp}} + \mathbf{L}) &\leq \\ \kappa\tilde{k}_3\|\mathbf{s}\| + \kappa\tilde{k}_4\|\mathbf{s}\|\|\boldsymbol{\omega}\| + \kappa\tilde{k}_5\|\mathbf{s}\|\|\boldsymbol{\omega}\|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

令 $\varphi(t) = \|\mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}_{\text{norm}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{adp}})\|_{\infty}$, 同时, 由于 $3\|\Delta\mathbf{D}\|_{\infty} \times \|\mathbf{D}^{-1}\|_{\infty} = \varepsilon < 1$, 且对于任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ 有不等式 $\mathbf{x}\mathbf{y} \leq 3\|\mathbf{x}\|_{\infty}\|\mathbf{y}\|_{\infty} > 0$ 成立, 由式 (29) 有

$$\mathbf{s}(\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}_{\text{mis}} + \Delta\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}) \leq (1 - \varepsilon)\tilde{\pi}_1\varphi(t)\|\mathbf{s}\|_{\infty}. \quad (34)$$

将不等式 (32)~(34) 代入不等式 (31), 有

$$V_2(t) - V_2(0) \leq -\kappa K t. \quad (35)$$

因 $V_2(t) \geq 0$, 由不等式 (35) 可知, 对于 $t \geq t_{F2}$ 有 $V_2(t) \equiv 0$, 其中

$$t_{F2} \leq -(V_2(t) - V_2(0))/\kappa K, \quad (36)$$

故在有限时间 t_{F2} 内, 系统状态将到达滑模面 $\mathbf{s} = 0$ 上并保持在滑模面上. \square

定理 3 针对受外部干扰作用, 且存在反作用飞轮安装偏差的过驱动航天器姿态跟踪控制系统, 当安装偏差满足不等式 $\varepsilon < 1$ 时, 在控制器 (26) 的作用下将在有限时间 $t_F = t_{F1} + t_{F2}$ 内实现姿态的跟踪控制, 即对于任意的 $t \geq t_F$, 有 $\boldsymbol{\omega}_e(t) \equiv 0$, $\mathbf{e}(t) \equiv 0$ 成立.

证明 由定理 2 可知, 姿态控制系统状态将在有限时间 t_{F2} 内到达滑模面 $\mathbf{s}(t) = 0$ 上, 并一直保持在滑模面上运动. 由定理 1 可知, 当系统状态到达滑模面 (18) 时, 在有限时间 t_{F1} 内系统状态将到达平衡点. 因此, 对于任意的初始状态 $\mathbf{Q}(0)$ 、 $\boldsymbol{\omega}(0)$, 使得对于 $\forall t \geq t_F = t_{F1} + t_{F2}$ 有 $\mathbf{e}(t) \equiv 0$ 、 $\mathbf{e}_0(t) \equiv 1$ 以及 $\boldsymbol{\omega}_e(t) \equiv 0$ 成立. \square

3 仿真实证

3.1 反作用飞轮安装结构

为验证本文所设计姿态补偿控制器 (26) 的有效性, 应用 Matlab/Simulink 软件对某型航天器姿态稳定控制进行了数值仿真. 本文所考虑的航天器安装 4 个反作用飞轮进行姿态跟踪控制, 其安装结构如图 1 所示. 图 1 中, $\alpha_i = 35.26^\circ$, $\beta_i = 45^\circ$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 为飞

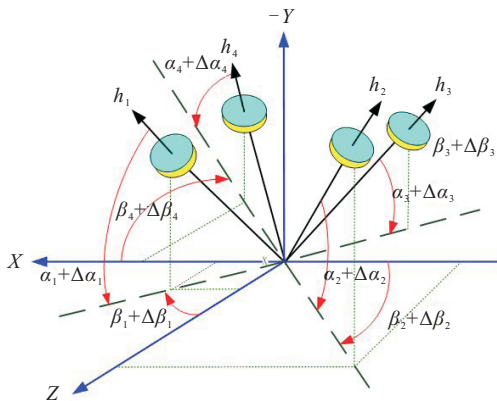


图 1 4 个反作用飞轮安装结构图

轮的标称安装角, 而 $\Delta\alpha_i$ 与 $\Delta\beta_i$ 为飞轮的安装偏差角.

根据图 1 给出的反作用飞轮安装框图, 可计算出飞轮实际输出力矩与作用于航天器本体轴的控制力矩之间关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \tau_1 \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) \sin(\beta_1 + \Delta\beta_1) \\ -\sin(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) \\ \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) \cos(\beta_1 + \Delta\beta_1) \end{bmatrix} + \\ &\tau_2 \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_2 + \Delta\alpha_2) \cos(\beta_2 + \Delta\beta_2) \\ -\sin(\alpha_2 + \Delta\alpha_2) \\ \cos(\alpha_2 + \Delta\alpha_2) \sin(\beta_2 + \Delta\beta_2) \end{bmatrix} + \\ &\tau_3 \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_3 + \Delta\alpha_3) \sin(\beta_3 + \Delta\beta_3) \\ -\sin(\alpha_3 + \Delta\alpha_3) \\ -\cos(\alpha_3 + \Delta\alpha_3) \cos(\beta_3 + \Delta\beta_3) \end{bmatrix} + \\ &\tau_4 \begin{bmatrix} \cos(\alpha_4 + \Delta\alpha_4) \cos(\beta_4 + \Delta\beta_4) \\ -\sin(\alpha_4 + \Delta\alpha_4) \\ -\cos(\alpha_4 + \Delta\alpha_4) \sin(\beta_4 + \Delta\beta_4) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中 τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 表示第 i 个反作用飞轮实际输出力矩. 考虑实际安装偏差角 $\Delta\alpha_i$ 与 $\Delta\beta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 为小量, 可进行如下的近似:

$$\begin{aligned} \cos(\Delta\alpha_i) &\approx 1, \quad \sin(\Delta\alpha_i) \approx \Delta\alpha_i, \\ \cos(\Delta\beta_i) &\approx 1, \quad \sin(\Delta\beta_i) \approx \Delta\beta_i, \\ \sin(\Delta\alpha_i) \sin(\Delta\beta_i) &\approx 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (38)$$

由式 (38), 式 (37) 可进一步简化为

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \Delta\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}. \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \\ \Delta\mathbf{D} &= [\Delta\mathbf{D}_1 \quad \Delta\mathbf{D}_2 \quad \Delta\mathbf{D}_3 \quad \Delta\mathbf{D}_4]. \end{aligned} \quad (40)$$

这里

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} \Delta\beta_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \Delta\alpha_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \\ -\Delta\alpha_1 \cos \alpha_1 \\ -\Delta\beta_1 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \Delta\beta_1 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \end{bmatrix}, \\ \Delta\mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} -\Delta\beta_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \Delta\alpha_2 \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \\ -\Delta\alpha_2 \cos \alpha_2 \\ -\Delta\beta_2 \cos \alpha_2 \sin \beta_2 - \Delta\beta_2 \sin \alpha_2 \cos \beta_2 \end{bmatrix}, \\ \Delta\mathbf{D}_3 &= \begin{bmatrix} -\Delta\beta_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 + \Delta\alpha_3 \sin \alpha_3 \sin \beta_3 \\ -\Delta\alpha_3 \cos \alpha_3 \\ \Delta\beta_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 + \Delta\beta_3 \sin \alpha_3 \cos \beta_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} \Delta\beta_4 \cos \alpha_4 \cos \beta_4 - \Delta\alpha_4 \sin \alpha_4 \sin \beta_4 \\ -\Delta\alpha_4 \cos \alpha_4 \\ \Delta\beta_4 \cos \alpha_4 \sin \beta_4 + \Delta\alpha_4 \sin \alpha_4 \cos \beta_4 \end{bmatrix}.$$

从式(39)可知,实际作用于航天器本体上的控制力矩包含反作用飞轮标称输出力矩 $\mathbf{D}\boldsymbol{\tau}$ 与飞轮安装偏差而产生的力矩 $\Delta \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}$.

注2 从上述证明可知,定理2给出了保证姿态控制器(26)对反作用飞轮安装偏差 $\Delta \mathbf{D}$ 有效处理的一个充分条件,即 $3\|\Delta \mathbf{D}\|_\infty \|\mathbf{D}^\dagger\|_\infty = \varepsilon < 1$. 特别地,由 $\Delta \mathbf{D}$ 与矩阵范数的定义,有 $\|\Delta \mathbf{D}\|_\infty \leq \max_{i=1,2,3} \theta_i$. 其中

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\sqrt{6}}{6} \sum_{i=1}^4 |\Delta\alpha_i| + \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{i=1}^4 |\Delta\beta_i|, \\ \theta_2 &= \sum_{i=1}^4 |\Delta\alpha_i \cos \alpha_i| = \frac{\sqrt{6}}{3} \sum_{i=1}^4 |\Delta\alpha_i|, \\ \theta_3 &= \frac{\sqrt{6}}{6} \sum_{i=1}^4 |\Delta\alpha_i| + \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{i=1}^4 |\Delta\beta_i|. \end{aligned} \quad (41)$$

另一方面,不等式 $3\|\Delta \mathbf{D}\|_\infty \|\mathbf{D}^\dagger\|_\infty = \varepsilon < 1$ 成立意味着

$$\|\Delta \mathbf{D}\|_\infty = \frac{\varepsilon}{3\|\mathbf{D}^\dagger\|_\infty} < \frac{1}{3\|\mathbf{D}^\dagger\|_\infty}.$$

因此,由式(41)可知,定理2成立的条件是

$$\max_{i=1,2,3,4} \theta_i < 1/3\|\mathbf{D}^\dagger\|_\infty = 0.2566 \text{ (rad)},$$

即本体轴中任意两个飞轮的安装偏差角不超过 0.2566 rad. 针对本文所考虑的反作用飞轮安装结构可算出,定理2适用的最大的总安装偏差角 $\max_{i=1,2,3,4} \theta_i$ 不能超过 0.2566 rad.

3.2 仿真结果

仿真中考虑转动惯量 \mathbf{J} 的不确定性,包括航天器标称转动惯量 \mathbf{J}_0 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$) 和不确定转动惯量 $\Delta \mathbf{J}$ 两部分,即

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 35 & 3 & -1.5 \\ 3 & 28 & 2 \\ -1.5 & 2 & 30 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{J} = [1 + e^{-0.1t} + 2\vartheta(t-10) - 4\vartheta(t-20)] \text{diag}(3, 2, 1).$$

其中: $\vartheta(t \geq 0) = 1, \vartheta(t < 0) = 0$. 考虑航天器所受到的外干扰力矩作用,其中重力梯度力矩、气动力矩、磁力矩等根据文献[17]进行计算. 在仿真中,考虑飞轮安装偏差角 $\Delta\alpha_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 均在 $[-4.5^\circ + 4.5^\circ]$ 之间随机选择, $\Delta\beta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 均在 $[-5.5^\circ + 5.5^\circ]$ 之间随机选择. 外部干扰力矩形式采用文献[18]中的时变干扰力矩.

在仿真中,航天器初始参数设定为:角速度 $\boldsymbol{\omega}(0)$

$= [0, 0, 0]^T$ (rad/s), $\mathbf{q}(0) = [-0.53, -0.26, -0.79]^T$; 期望角速度及期望姿态分别为 $\boldsymbol{\omega}_d(0) = 0.001 \sin(2\pi t) \times [0, 0, 0]^T$ (rad/s), $\mathbf{q}_d(0) = [0, 0, 0]^T$; 航天器滚动 ϕ 、俯仰 θ 与偏航 ψ 姿态角分别为 $0.8^\circ, -0.3^\circ, -0.5^\circ$. 控制器(26)中的控制参数 $\beta = 0.7, K = 0.05, \kappa = 1.05, k_i = 1.5$ ($i = 1, 3, 4, 5$), $l_i = 1.5$ ($i = 1, 3, 4, 5$); 自适应更新律初始参数为: $\hat{\pi}_1(0) = 1.25, \hat{k}_3(0) = 0.68, \hat{k}_4(0) = 0.42, \hat{k}_5(0) = 0.22$. 反作用飞轮控制最大反作用力矩为 1.5 N·m. 由图2误差角速度、欧拉角、姿态跟踪误差时间响应曲线可知,本文所提出的控制策略能够在外部干扰及飞轮安装偏差情况下实现航天器姿态的高精度稳定控制,其中姿态指向精度优于 0.01° , 而姿态稳定度优于 $0.001^\circ/\text{s}$.

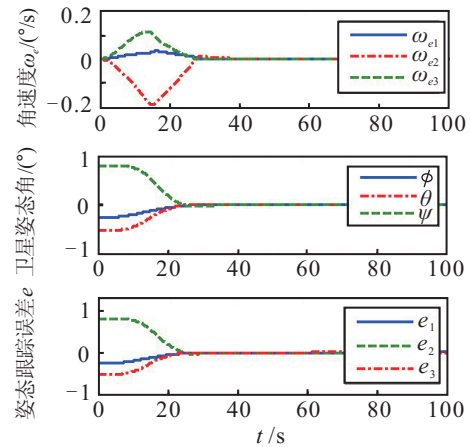


图2 误差角速度、欧拉角、姿态跟踪误差时间响应曲线

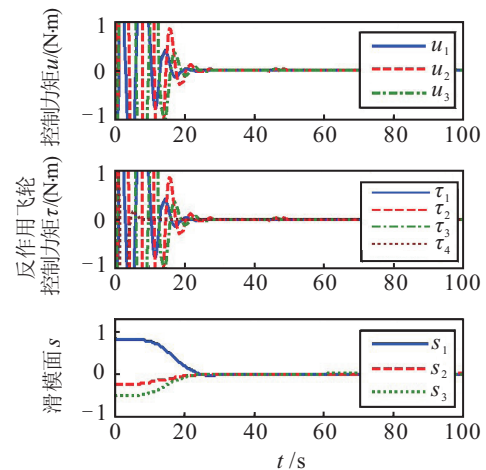


图3 控制力矩、反作用飞轮控制力矩、滑模面时间响应曲线

从图3可知,为了实现对安装偏差 $\Delta \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}$ 及外部干扰的补偿,所设计具有冗余配置的4反作用飞轮指令控制力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 分配于实际3轴输出力矩 \mathbf{u} , 以此实现了补偿控制目标,达到姿态高精度控制. 同时,验证了本文所提出有限时间控制的控制性能,在给定的初始角速度、初始姿态基础上,航天器姿态控制系统状态在 $t_F = 23.5 \text{ s}$ 处实现了航天器姿态控制的跟

踪控制. 其中, 航天器姿态在 $t_{F1} = 21.9\text{ s}$ 内到达滑模面 s 上之后, 在标准控制 $\tau(t)$ 的作用下保证了状态在 $t_{F2} = 1.6\text{ s}$ 内收敛于平衡点.

4 结 论

针对航天器存在反作用飞轮安装偏差、参数不确定性以及外部干扰力矩的姿态控制问题, 本文设计了一类自适应滑模控制器以实现航天器的有限时间姿态跟踪控制. 该控制器能够确保在有限时间内实现姿态跟踪的同时, 实现对反作用飞轮安装偏差、外部干扰以及不确定转动惯量特性的补偿, 并从定量的角度分析了这种飞轮安装偏差角的取值范围. 最后, 从理论和工程实用的角度分析了系统的稳定性及其工程实用价值, 仿真结果令人满意.

参考文献(References)

- [1] Hu Q L. Robust adaptive sliding mode fault-tolerant control with l2-gain performance for flexible spacecraft using redundant reaction wheels[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(8): 1055-1070.
- [2] Yoon H, Agrawal B N. Adaptive control of uncertain Hamiltonian multi-input multi-output systems: With application to spacecraft control[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2009, 17(4): 900-906.
- [3] Bai X L, Junkins J L. New results for time optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(4): 1071-1076.
- [4] 孙胜, 周荻. 有限时间收敛变结构导引律[J]. 宇航学报, 2008, 29(7): 1258-1262.
(Sun S, Zhou D. A finite time convergent variable structure guidance law[J]. J of Astronautics, 2008, 29(7): 1258-1262.)
- [5] Luo W C, Chu Y C, Ling K V. H_∞ inverse optimal attitude-tracking control of rigid spacecraft[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28(3): 481-493.
- [6] Kristiansen R, Nicklasson P J, Gravdahl J T. Satellite attitude control by quaternion-based backstepping[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2009, 17(1): 227-232.
- [7] Yoon H, Tsiotras P. Adaptive spacecraft attitude tracking control with actuator uncertainties[J]. The J of the Astronautical Sciences, 2008, 56(2): 251-268.
- [8] Scarritt S K. Nonlinear model reference adaptive control of satellite attitude tracking[C]. AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Honolulu, 2008: 1104-1109.
- [9] Peck M A. Estimation of wheel and CMG alignments from on-orbit telemetry[C]. NASA Flight Mechanics Symposium. Greenbelt, 2001: 187-201.
- [10] Lim H C, Bang H. Adaptive control for satellite formation flying under thrust misalignment[J]. Acta Astronautica, 2009, 65(1): 112-122.
- [11] Jin J K, Ryoo C K. Fault tolerant control for satellites with four reaction wheels[J]. Control Engineering Practice, 2008, 16(10): 1250-1258.
- [12] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952: 182-193.
- [13] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2000, 38(8): 751-766.
- [14] Zhu Z, Xia Y, Fu M. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(4): 686-702.
- [15] John T Y W, Kenneth K D. The attitude control problem[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(10): 1148-1162.
- [16] Cai W C, Liao X H, Song Y D. Indirect robust adaptive fault-tolerant control for attitude tracking of spacecraft[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(5): 1456-1463.
- [17] Yang C D, Sun Y P. Mixed H_2/H_∞ state-feedback design for micro-satellite attitude control[J]. Control Engineering Practice, 2002, 10(9): 951-970.
- [18] Gennaro S Di. Output stabilization of flexible spacecraft with active vibration suppression[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(3): 747-759.

(责任编辑: 李君玲)