第 29 卷 第 1 期
Vol. 29 No. 1

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 1 月
Jan. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 01-0158-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2012.1326

缓冲算子调节度与光滑度的关系

戴文战, 苏 永

(浙江工商大学 信息与电子工程学院，杭州 310018)

摘 要: 针对如何选择合适的缓冲算子以提高模型精度的问题, 系统地研究缓冲算子调节度与光滑度的内在关系, 并对平均强化缓冲算子 (ASBO)、几何平均强化缓冲算子 (GASBO)、加权平均强化缓冲算子 (WASBO) 和加权几何平均强化缓冲算子 (WGASBO) 的调节度与光滑度进行了比较研究, 给出了若干定理. 理论证明和数字仿真结果都验证了定理的正确性.

关键词: 缓冲算子；调节度；光滑性；灰色系统

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Relationship between regulation degree and smoothness of buffer operators

DAI Wen-zhan，*SU Yong*

(School of Information and Electronic Engineering，Zhejiang Gongshang University，Hangzhou 310018，China. Correspondent：DAI Wen-zhan，E-mail：dwz@mail.zjgsu.edu.cn)

Abstract: How to choose a suitable kind of buffer operator is very important in practice. Therefore, the characters of traditional kinds of operator and their inherent relationship between regulation degree and smoothness degree are studied. Then, comparative studies on the relationship are conducted among average strengthening buffer operator(ASBO), geometry average strengthening buffer operator(GASBO), weigh average strengthening buffer operator(WASBO), and weigh geometry average strengthening buffer operator(WGASBO). Some theorems about regulation degree and smoothness degree are proposed. Finally, the theoretical analysis and empirical test show the correctness of the theorems.

Key words: buffer operator；regulation degree；smoothness；grey system

0 引 言

在本征灰色系统中, 通过对原始数据序列处理生成新灰色序列被认为是提高灰色建模精度的有效方法. 灰色序列的生成弱化了原始序列的随机性, 有助于揭示系统内部的本质特征. 已有的研究表明, 序列光滑度是影响建模精度的重要因素. 近年来, 为了排除干扰对建模的影响, 一些学者提出了缓冲算子的概念, 并对缓冲算子作了深入的研究[1-9]. 文献 [2] 基于新信息优先的原理, 构造了一类新的强化缓冲算子, 有效地提高了模型的预测精度. 文献 [3] 构造出一类新型的弱化缓冲算子, 拓展了缓冲算子的类型. 文献 [4] 研究了平均强化缓冲算子 (ASBO)、几何平均强化缓冲算子 (GASBO)、加权平均强化缓冲算子 (WASBO) 和加权几何平均强化缓冲算子 (WGASBO) 的特性和内在关系. 文献 [5] 提出了采用缓冲算子调节度来反映缓冲算子作用强度的概念. 文献 [6] 给出了不同调节度的缓冲算子. 文献 [7] 引进粒子群算法优化变权系数, 提出了关于变权缓冲算子的几个性质. 在改变序列光滑度方面, 许多学者也作了深入的研究, 对提高灰色系统的建模精度起到了一定的作用. 文献 [8] 提出了缓冲算子光滑性的概念, 研究了缓冲算子能否提高光滑度的条件.

本文在上述文献的基础上, 首先系统地研究了缓冲算子调节度与光滑度的关系, 并对若干强化和弱化缓冲算子的调节度与光滑度进行了比较研究. 理论证明和数字仿真结果均验证了所给出定理的正确性.

1 基本概念

定义 1[8] 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负数据序列, 满足 $x(k)>0$, $k=1,2,\cdots$; D_i 为缓冲

收稿日期: 2012-09-02；**修回日期:** 2013-02-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374022).

作者简介: 戴文战(1958−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统建模与控制、多目标决策等研究；苏永(1987−), 男, 硕士, 从事灰色系统建模与控制的研究.

算子, 相应的缓冲序列 $XD_i = (x(1)d_i, x(2)d_i, \cdots, x(n)d_i)$, $i = 1, 2$.

1) 若 X 为非负单调递增序列, 且

$$\frac{x(k)d_1}{\sum_{i=1}^{k-1} x(i)d_1} < \frac{x(k)d_2}{\sum_{i=1}^{k-1} x(i)d_2},\ k = 2, 3, \cdots, n; \tag{1}$$

2) 若 X 为非负单调递减序列, 且

$$\frac{x(k)d_1}{\sum_{i=1}^{k-1} x(i)d_1} > \frac{x(k)d_2}{\sum_{i=1}^{k-1} x(i)d_2},\ k = 2, 3, \cdots, n; \tag{2}$$

则称缓冲算子 D_1 的光滑性优于缓冲算子 D_2.

定义 2[8] 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为非负数据序列, 称

$$\rho(k) = \frac{x(k)}{\sum_{i=1}^{k-1} x(i)},\ k = 2, 3, \cdots, n \tag{3}$$

为序列光滑比.

引理 1[8] 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为非负数据序列, 若 X 为单调递增序列, 则其光滑比越小光滑性越好; 若 X 为单调递减序列, 则其光滑比越大光滑性越好.

2 缓冲算子调节度与序列光滑度的关系

定义 3[5] 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为非负数据序列, D 为缓冲算子, $XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d)$ 为缓冲序列, 称

$$r(k) = \frac{x(n) - x(k)}{n - k + 1} \tag{4}$$

为数据序列 X 中 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均增长率, 称

$$\delta(k) = \left|\frac{r(k) - r(k)d}{r(k)}\right| \tag{5}$$

为缓冲算子 D 在 k 点的调节度, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

2.1 强化缓冲算子调节度与光滑度的关系

定理 1 设 $\delta_i(k)$ 为强化缓冲算子 D_i 对非负单调递增序列 X 的调节度, 则有

$$\delta_1(k) < \delta_2(k) \Leftrightarrow x(k)d_1 > x(k)d_2 \Leftrightarrow \rho_1(k) < \rho_2(k). \tag{6}$$

证明 注意到 $x(n)d = x(n)$, 有

$$\delta(k) = \left|\frac{x(k)d - x(k)}{x(n) - x(k)}\right|. \tag{7}$$

1) 先证充分性, 即证 $\delta_1(k) < \delta_2(k) \Rightarrow x(k)d_1 > x(k)d_2 \Rightarrow \rho_1(k) < \rho_2(k)$. 对于单调递增序列, 根据强化缓冲算子性质, 有

$$x(k)d \leqslant x(k),\ x(k) < x(n), \tag{8}$$

所以

$$\delta(k) = -\frac{x(k)d - x(k)}{x(n) - x(k)}. \tag{9}$$

又因为 $\delta_1(k) < \delta_2(k)$, 所以

$$-(x(k)d_1 - x(k)) < -(x(k)d_2 - x(k)), \tag{10}$$

即

$$x(k)d_1 > x(k)d_2. \tag{11}$$

下面证明当 $x(k)d_1 > x(k)d_2$ 时, 有 $\rho_1(k) < \rho_2(k)$. 采用反证法. 假设当 $\delta_1(k) < \delta_2(k)(k, s = 1, 2, \cdots, n, k > s)$ 时如下不等式成立:

$$\frac{x(k)d_1}{x(k)d_2} \geqslant \frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}, \tag{12}$$

即

$$\frac{x(n)d_1}{x(n)d_2} \geqslant \frac{x(k)d_1}{x(k)d_2} \geqslant \frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}. \tag{13}$$

根据缓冲算子性质, 有 $x(n)d_1 = x(n)d_2 = x(n)$ 成立, 故对于 $k = n$ 有下式成立:

$$1 = \frac{x(n)d_1}{x(n)d_2} \geqslant \frac{x(k)d_1}{x(k)d_2} \geqslant \frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}, \tag{14}$$

即得出 $x(k)d_2 > x(k)d_1$, 这与式 (11) 矛盾, 所以原假设 (12) 不成立, 故如下不等式成立:

$$\frac{x(k)d_1}{x(k)d_2} < \frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}. \tag{15}$$

由文献 [8] 可知: 强化缓冲算子 D_1 的光滑性比 D_2 好; 且根据引理 1, 可得 $\rho_1(k) < \rho_2(k)$.

2) 再证必要性, 即证 $\rho_1(k) < \rho_2(k) \Rightarrow x(k)d_1 > x(k)d_2 \Rightarrow \delta_1(k) < \delta_2(k)$.

根据引理 1, 如果 $\rho_1(k) < \rho_2(k)$, 则 D_1 的光滑性比 D_2 好; 又根据文献 [8], 可以得到

$$1 = \frac{x(n)d_1}{x(n)d_2} \leqslant \frac{x(k)d_1}{x(k)d_2} \leqslant \frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}, \tag{16}$$

所以 $\rho_1(k) < \rho_2(k) \Rightarrow x(k)d_1 > x(k)d_2$ 成立. 又因为 $x(k)d \leqslant x(k)$, $x(k) < x(n)$, 所以由

$$\delta_1(k) = -\frac{x(k)d_1 - x(k)}{x(n) - x(k)}, \tag{17}$$

$$\delta_2(k) = -\frac{x(k)d_2 - x(k)}{x(n) - x(k)} \tag{18}$$

可以推出 $x(k)d_1 > x(k)d_2 \Rightarrow \delta_1(k) < \delta_2(k)$.

综上可知: 当 X 为单调递增序列时, $\delta_1(k) < \delta_2(k) \Leftrightarrow x(k)d_1 > x(k)d_2 \Leftrightarrow \rho_1(k) < \rho_2(k)$ 成立. □

定理 2 设 $\delta_i(k)$ 为强化缓冲算子 D_i 对非负单调递减序列 X 的调节度, 则有

$$\delta_1(k) < \delta_2(k) \Leftrightarrow x(k)d_1 < x(k)d_2 \Leftrightarrow \rho_1(k) > \rho_2(k). \tag{19}$$

证明 1) 先证充分性, 即证 $\delta_1(k) < \delta_2(k) \Rightarrow x(k)d_1 < x(k)d_2 \Rightarrow \rho_1(k) > \rho_2(k)$. 对于单调递减序列 $x(n) < x(k)$, 根据强化缓冲算子性质, 有 $x(k) \leqslant x(k)d$, 所以

$$\delta(k) = \frac{x(k)d - x(k)}{x(k) - x(n)}. \tag{20}$$

如果 $\delta_1(k)<\delta_2(k)$, 则

$$\frac{x(k)d_1-x(k)}{x(k)-x(n)}<\frac{x(k)d_2-x(k)}{x(k)-x(n)}, \tag{21}$$

即

$$x(k)d_1<x(k)d_2. \tag{22}$$

下面证明当 $x(k)d_1<x(k)d_2$ 时, 有 $\rho_1(k)>\rho_2(k)$. 采用反证法. 假设当 $\delta_1(k)<\delta_2(k)\,(k,s=1,2,\cdots,n,k>s)$ 时如下不等式成立:

$$\frac{x(k)d_1}{x(k)d_2}\leqslant\frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}, \tag{23}$$

即

$$\frac{x(n)d_1}{x(n)d_2}\leqslant\frac{x(k)d_1}{x(k)d_2}\leqslant\frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}. \tag{24}$$

根据缓冲算子性质, 有 $x(n)d_1=x(n)d_2=x(n)$, 故

$$1=\frac{x(n)d_1}{x(n)d_2}\leqslant\frac{x(k)d_1}{x(k)d_2}\leqslant\frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}, \tag{25}$$

即得出 $x(k)d_1>x(k)d_2$, 这与式 (22) 矛盾, 所以原假设 (23) 不成立, 故存在

$$\frac{x(k)d_1}{x(k)d_2}>\frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}. \tag{26}$$

根据文献 [8] 可知: 强化缓冲算子 D_1 的光滑性比 D_2 好; 且根据引理 1, 可得 $\rho_1(k)>\rho_2(k)$.

2) 再证必要性, 即证 $\rho_1(k)>\rho_2(k)\Rightarrow x(k)d_1<x(k)d_2\Rightarrow\delta_1(k)<\delta_2(k)$.

根据引理 1, 如果 $\rho_1(k)>\rho_2(k)$, 则 D_1 的光滑性比 D_2 好; 又根据文献 [8], 可以得到

$$1=\frac{x(n)d_1}{x(n)d_2}\geqslant\frac{x(k)d_1}{x(k)d_2}\geqslant\frac{x(s)d_1}{x(s)d_2}, \tag{27}$$

所以 $\rho_1(k)>\rho_2(k)\Rightarrow x(k)d_1<x(k)d_2$ 成立. 又因为 $x(k)d\geqslant x(k),\ x(k)>x(n)$, 所以由

$$\delta_1(k)=\frac{x(k)d_1-x(k)}{x(k)-x(n)}, \tag{28}$$

$$\delta_2(k)=\frac{x(k)d_2-x(k)}{x(k)-x(n)} \tag{29}$$

可以推出 $x(k)d_1<x(k)d_2\Rightarrow\delta_1(k)<\delta_2(k)$.

综上可知: 当 X 为单调递减序列时, $\delta_1(k)<\delta_2(k)\Leftrightarrow x(k)d_1<x(k)d_2\Leftrightarrow\rho_1(k)>\rho_2(k)$ 成立. □

2.2 弱化缓冲算子调节度、光滑比和光滑度的关系

定理 3 设 $\delta_i(k)$ 为弱化缓冲算子 D_i 对非负单调递增序列 X 的调节度, 则有

$$\delta_1(k)>\delta_2(k)\Leftrightarrow x(k)d_1>x(k)d_2\Leftrightarrow\rho_1(k)<\rho_2(k). \tag{30}$$

证明 对于非负单调递增序列 $x(k)<x(n)$, 弱化缓冲算子 D_i 具有 $x(k)d_i\geqslant x(k)$, 仿照定理 1 的证明过程即可得到结论, 详细证明过程略. □

定理 4 设 $\delta_i(k)$ 为弱化缓冲算子 D_i 对非负单调递减序列 X 的调节度, 则有

$$\delta_1(k)>\delta_2(k)\Leftrightarrow x(k)d_1<x(k)d_2\Leftrightarrow\rho_1(k)>\rho_2(k). \tag{31}$$

证明 对于非负单调递减序列 $x(n)<x(k)$, 弱化缓冲算子 D_i 具有 $x(k)d_i\leqslant x(k)$, 仿照定理 1 的证明过程即可得到结论, 详细证明过程略. □

根据定理 1∼定理 4, 不难得到以下推论.

推论 1 缓冲算子 (不管是强化缓冲算子还是弱化缓冲算子) D_1 的光滑度比 D_2 好的充要条件是:

1) 当 X 为单调递增序列时, $x(k)d_1>x(k)d_1$, 或光滑比 $\rho_1(k)<\rho_2(k)$;

2) 当 X 为单调递减序列时, $x(k)d_1<x(k)d_1$, 或光滑比 $\rho_1(k)>\rho_2(k)$.

3 若干缓冲算子调节度与光滑度比较

3.1 若干强化缓冲算子调节度与光滑度比较

定理 5 设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负数据序列, 各时点权重向量为 $\omega=[\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n]$, $\omega_k\geqslant 0,\omega_n\neq 0$. 记强化缓冲算子为 $D_i, i=1,2,3,4$, 其中: D_1 为平均强化缓冲算子 (ASBO)

$$x(k)d_1=(n-k+1)x^2(k)\Big/\sum_{i=k}^{n}x(i);$$

D_2 为加权平均强化缓冲算子 (WASBO)

$$x(k)d_2=\sum_{i=k}^{n}\omega_i x^2(k)\Big/\sum_{i=k}^{n}\omega_i x(i);$$

D_3 为几何平均强化缓冲算子 (GASBO)

$$x(k)d_3=x^2(k)\Big/\Big[\prod_{i=k}^{n}x(i)\Big]^{\frac{1}{n-k+1}};$$

D_4 为加权几何平均强化缓冲算子 (WGASBO)

$$x(k)d_4=x^2(k)\Big/\Big[\prod_{i=k}^{n}x^{\omega_i}(i)\Big]^{1/\sum\limits_{i=k}^{n}\omega_i}.$$

1) 如果 X 为单调递增序列, 则有

$$\delta_2(k)\geqslant\delta_1(k)\geqslant\delta_3(k),$$

$$\rho_2(k)\geqslant\rho_1(k)\geqslant\rho_3(k).$$

即 XD_i 按调节度大小依次排序为 XD_2-XD_1-XD_3, 序列 XD_2 调节度最大, XD_3 最小; XD_i 按光滑性优劣依次排序为 XD_3-XD_1-XD_2, 序列 XD_3 光滑性最好, XD_2 最差.

2) 如果 X 为单调递减序列, 则有

$$\delta_1(k)\leqslant\delta_2(k)\leqslant\delta_3(k)\leqslant\delta_4(k),$$

$$\rho_1(k)\geqslant\rho_2(k)\geqslant\rho_3(k)\geqslant\rho_4(k).$$

即 XD_i 按调节度大小依次排序为 XD_4-XD_3-XD_2-XD_1, 序列 XD_4 调节度最大, XD_1 最小; 光滑性优劣依次排序为 XD_1-XD_2-XD_3-XD_4, 序列 XD_1 光滑性最好, XD_4 最差.

证明　1) X 为单调递增序列. 由文献 [9] 可知

$$x(k)d_2 \leqslant x(k)d_1 \leqslant x(k)d_3,$$

有 $\delta_2(k) \geqslant \delta_1(k) \geqslant \delta_3(k)$. 根据定理 2 及推论, 可得到

$$\rho_2(k) \geqslant \rho_1(k) \geqslant \rho_3(k),$$

所以有序列光滑性 XD_3 最好, XD_2 最差.

2) X 为单调递减序列. 由文献 [9] 可知

$$x(k)d_1 \leqslant x(k)d_2 \leqslant x(k)d_3 \leqslant x(k)d_4,$$

有 $\delta_1(k) \leqslant \delta_2(k) \leqslant \delta_3(k) \leqslant \delta_4(k)$. 根据定理 3 及推论, 可得到

$$\rho_1(k) \geqslant \rho_2(k) \geqslant \rho_3(k) \geqslant \rho_4(k),$$

所以序列 XD_1 光滑性最好, XD_4 最差. □

3.2　若干弱化缓冲算子调节度与光滑度比较

定理 6　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为非负数据序列, 各时点权重向量为 $\omega=[\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n]$, $\omega_k \geqslant 0, \omega_n \neq 0$. 记强化缓冲算子为 $D_i, i=1,2,3,4$, 其中: D_1 为平均弱化缓冲算子 (AWBO)

$$x(k)d_1 = \sum_{i=k}^{n} x(i) \Big/ (n-k+1);$$

D_2 为加权平均弱化缓冲算子 (WAWBO)

$$x(k)d_2 = \sum_{i=k}^{n} \omega_i x(i) \Big/ \sum_{i=k}^{n} \omega_i;$$

D_3 为几何平均弱化缓冲算子 (GAWBO)

$$x(k)d_3 = \Big[\prod_{i=k}^{n} x(i)\Big]^{\frac{1}{n-k+1}};$$

D_4 为加权几何平均强化缓冲算子 (WGAWBO)

$$x(k)d_4 = \Big[\prod_{i=k}^{n} x^{\omega_i}(i)\Big]^{1/\sum\limits_{i=k}^{n}\omega_i}.$$

1) 如果 X 为单调递增序列, 则有

$$\delta_3(k) \leqslant \delta_1(k) \leqslant \delta_2(k),$$

$$\rho_3(k) \geqslant \rho_1(k) \geqslant \rho_2(k).$$

2) 如果 X 为单调递减序列, 则有

$$\delta_4(k) \geqslant \delta_3(k) \geqslant \delta_2(k) \geqslant \delta_1(k),$$

$$\rho_4(k) \geqslant \rho_3(k) \geqslant \rho_2(k) \geqslant \rho_1(k).$$

证明　1) X 为单调递增序列. 由文献 [9] 可知

$$x(k)d_3 \leqslant x(k)d_1 \leqslant x(k)d_2,$$

有 $\delta_3(k) \leqslant \delta_1(k) \leqslant \delta_2(k)$. 根据定理 4 及推论, 可得到

$$\rho_3(k) \geqslant \rho_1(k) \geqslant \rho_2(k),$$

所以有序列光滑性 XD_2 最好, XD_1 次之, XD_3 最差.

2) X 为单调递减序列. 由文献 [9] 可知

$$x(k)d_4 \leqslant x(k)d_3 \leqslant x(k)d_2 \leqslant x(k)d_1,$$

有 $\delta_4(k) \geqslant \delta_3(k) \geqslant \delta_2(k) \geqslant \delta_1(k)$. 根据定理 5 及推论, 可得到

$$\rho_4(k) \geqslant \rho_3(k) \geqslant \rho_2(k) \geqslant \rho_1(k).$$ □

4　实例分析

例 1　某企业开发的一种新产品, 它的 1~7 月月销售额的原始数据为 X =(60.8, 62.6, 65.7, 70.4, 77.4, 86.7, 96.8)(单位: 万元). 计算各月的销售额增长率, 可以知道原始序列数据前半部分增长较慢, 后半部分增长较快. 现以 1～6 月销售额作为原始数据建立缓冲序列, 分别应用本文定理 5 的平均强化缓冲算子 D_1、加权平均强化缓冲算子 D_2 和几何平均强化缓冲算子 D_3 对原始序列进行平滑, 得到

$$XD_1 = (52.36, 54.01, 57.51, 63.40, 73.01, 86.70),$$

$$XD_2 = (49.39, 51.87, 56.06, 62.54, 72.64, 86.70),$$

$$XD_3 = (52.77, 54.38, 57.83, 63.64, 73.13, 86.70).$$

由此可知 $x(k)d_2 \leqslant x(k)d_1 \leqslant x(k)d_3$. XD_1, XD_2, XD_3 在各点的光滑比如表 1 所示, 调节度如表 2 所示. 从表 1 和表 2 可以看出, $\rho_2(k) \geqslant \rho_1(k) \geqslant \rho_3(k)$, $\delta_2(k) \geqslant \delta_1(k) \geqslant \delta_3(k)$, 这与定理 2 的结论完全一致. 即当 $x(k)d_2 \leqslant x(k)d_1 \leqslant x(k)d_3$ 时, 可得 $\delta_2(k) \geqslant \delta_1(k) \geqslant \delta_3(k)$, $\rho_2(k) \geqslant \rho_1(k) \geqslant \rho_3(k)$ 成立.

表 1　3 种强化序列光滑性比较

序列	光滑比				
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
XD_1	1.032	0.541	0.387	0.321	0.289
XD_2	1.050	0.554	0.398	0.330	0.296
XD_3	1.031	0.540	0.386	0.320	0.287

表 2　3 种强化序列调节度比较

序列	调节度				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
XD_1	0.326	0.356	0.390	0.429	0.472
XD_2	0.441	0.445	0.459	0.482	0.512
XD_3	0.310	0.341	0.375	0.415	0.459

例 2　某市 1997～2004 年工业总产值的原始数据序列为 X =(187.85, 303.79, 394.13, 498.27, 580.43, 640.21, 702.34, 708.86)(单位: 亿元). 计算各年工业总产值增长率, 可以知道原始序列数据前半部分增长较快, 后半部分增长较慢. 用 1997~2003 年数据作为原始数据建立缓冲序列, 分别应用本文定理 6 的平均弱化缓冲算子 D_1、加权平均弱化缓冲算子 D_2 和几何平均弱化缓冲算子 D_3 对原始序列进行平滑, 得到

$$XD_1 = (564.89, 598.50, 625.82, 650.74, 670.46, 686.45, 702.34),$$

$$XD_2 = (620.14, 629.65, 643.07, 659.02, 674.01, 687.67, 702.34),$$

$$XD_3 = (552.44, 592.42, 622.65, 649.43, 669.95, 686.26, 702.34).$$

由此可知 $x(k)d_2 \geqslant x(k)d_1 \geqslant x(k)d_3$.

XD_1, XD_2, XD_3 在各点光滑比如表3所示, 调节度如表4所示. 从表3和表4可以看出, $\rho_3(k) \geqslant \rho_1(k) \geqslant \rho_2(k)$, $\delta_2(k) \geqslant \delta_1(k) \geqslant \delta_3(k)$, 这与定理3的结论完全一致. 即当 $x(k)d_2 \geqslant x(k)d_1 \geqslant x(k)d_3$ 时, 可得 $\delta_2(k) \geqslant \delta_1(k) \geqslant \delta_3(k)$, $\rho_3(k) \geqslant \rho_1(k) \geqslant \rho_2(k)$ 成立.

表 3 3种弱化序列光滑性比较

序列	光滑比					
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
XD_1	1.060	0.538	0.364	0.275	0.185	0.185
XD_2	1.015	0.515	0.348	0.264	0.213	0.180
XD_3	1.072	0.541	0.367	0.277	0.186	0.186

表 4 3种弱化序列调节度比较

序列	调节度					
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
XD_1	0.733	0.739	0.752	0.747	0.738	0.744
XD_2	0.840	0.818	0.808	0.788	0.768	0.764
XD_3	0.709	0.724	0.741	0.741	0.734	0.741

5 结 论

缓冲算子在灰色系统建模中发挥重要作用, 不同强度的缓冲算子对光滑度的影响也不尽相同. 本文从理论上严格证明了不同强化缓冲算子和弱化算子的调节度与光滑比和光滑度的关系, 为在实践中选择不同调节度和不同光滑度的缓冲算子提供了理论依据.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 38-41.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 38-41.)

[2] 戴文战, 苏永. 基于新信息优先的一类强化缓冲算子的构造及应用[J]. 自动化学报, 2012, 38(8): 1329-1334.
(Dai W Z, Su Y. New strengthening buffer operators and their applications based on prior use of latest information[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(8): 1329-1334.)

[3] 崔杰, 党耀国. 一类新的弱化缓冲算子的构造及其应用[J]. 控制与决策, 2008, 23(7): 741-750.
(Cui J, Dang Y G. A kind of new weakening buffer operators and their applications[J]. Control and Decision, 2008, 23(7): 741-750.)

[4] 党耀国, 刘思峰, 米传民. 强化缓冲算子性质的研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(7): 730-734.
(Dang Y G, Liu S F, Mi C M. Study on characteristics of the strengthening buffer operators[J]. Control and Decision, 2007, 22(7): 730-734.)

[5] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 变权缓冲算子及缓冲算子公理的补充[J]. 系统工程, 2009, 27(1): 113-117.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Buffer operators with variable weights and the complement of axioms[J]. Systems Engineering, 2009, 27(1): 113-117.)

[6] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 变权缓冲算子及其作用强度的研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1218-1222.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Study on buffer operator with variable weights and their effect strength to original sequence[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1218-1222.)

[7] 钱吴永, 党耀国. 基于平均增长率的弱化变权缓冲算子及其性质[J]. 系统工程, 2011, 29(1): 105-110.
(Qian W Y, Dang Y G. Weakening buffer operator with variable weights based on the average growth rate and its properties[J]. Systems Engineering, 2011, 29(1): 105-110.)

[8] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 缓冲算子的光滑性[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1643-1649.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. The smoothness of buffer operators[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1643-1649.)

[9] 党耀国, 刘思峰, 王正新, 等. 灰色预测与决策模型研究[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 23-27.
(Dang Y G, Liu S F, Wang Z X, et al. Study on the grey prediction and decision model[M]. Beijing: Science Press, 2009: 23-27.)

(责任编辑: 孙艺红)